

マルコフ決定過程を用いたヘルスケア支援方法 における半教師付き学習

前田 康成¹

1) 北見工業大学・地域未来デザイン工学科

要約： 従来研究では、ヘルスケア支援方法を表現するための確率モデルとしてマルコフ決定過程が採用され、マルコフ決定過程の真のパラメータが既知の仮定のもとで検討されている。本研究では、より現実に近い真のパラメータが未知の仮定のもとでヘルスケア支援のための半教師付き学習方法を提案する。学習データは完全データと不完全データによって構成される。提案方法ではEMアルゴリズム (expectation-maximization algorithm) を用いる。数例のシミュレーションによって提案方法の有効性を示す。シミュレーション結果より、学習データが大きくなるにつれて学習精度が高くなることが確認できる。

キーワード： ヘルスケア支援方法, マルコフ決定過程, EMアルゴリズム, 半教師付き学習

Semi-supervised Learning for a Healthcare Support Method using Markov Decision Processes

Yasunari MAEDA¹

1) School of Regional Innovation and Social Design Engineering, Kitami Institute of Technology

Abstract: Markov decision processes are applied to a healthcare support method in previous research. In the previous research the true parameters of Markov decision processes are known. In this research we propose a semi-supervised learning method for the healthcare support method under the condition that the true parameters of Markov decision processes are unknown. Learning data consist of complete data and incomplete data. In the proposed method EM(expectation-maximization) algorithm is used. The effectiveness of the proposed method is shown by some simulations. The result shows that the learning accuracy becomes higher as the learning data becomes bigger.

Keywords: healthcare support method, Markov decision processes, EM algorithm, semi-supervised learning

Yasunari MAEDA

165 Koen-cho, Kitami-shi, Hokkaido, 090-8507, Japan

Phone: +81-157-26-9328, Fax: +81-157-26-9344, E-mail: maedaya@mail.kitami-it.ac.jp

1. はじめに

近年の人工知能 (AI) 技術の発展に伴い、ヘルスケア分野においてもさまざまなAIの適用が検討されている [1]. 政府による人工知能技術戦略会議ではAIを活用した健康管理 (未病対策, 各種疾病の早期発見等), AIによる医師の補助 (診療支援, 処方箋提示等) などが検討されている [2]. 例えば, 既に実用化されているものには, 顧客の体重, 睡眠時間, 食事などのデータに基づいてAIが顧客に適した料理レシピなどの美容・健康に関するアドバイスを提供するソフトウェアがある [3]. また, 自社の健康組合が保有する特定健康診査 (特定健診) や診療報酬明細書 (レセプト) に基づいてAIが予測した将来の生活習慣病の発症や医療費に関する予測情報を, 生活習慣の改善や減量に関する社員への保健指導に活用している企業もある [4]. 本研究では, 管理栄養士や医師などが顧客 (または患者) に対してアドバイス (または指示, 治療) をする際に, 管理栄養士などを支援するシステムであるヘルスケア支援システムの基礎検討を行う。

従来研究では, 顧客の健康状態に相当する状態が未知のマルコフ決定過程 [5] を用いて, 治療などのコスト最小化がされている [6] [7]. 従来研究 [7] では, 管理栄養士などが顧客にアドバイスをする前に適応的に検査項目を検討選択し, 検査結果に基づいて顧客に提供するアドバイスを選択する問題設定のもとでコスト最小化が検討されている. 上記の企業事例 [4] では全社員が統一項目の検査を受け, 検査結果に基づくAIによる将来の生活習慣病の発症や医療費の予測結果を利用して, 人間 (管理栄養士など) が保健指導を実施していた. これに対して従来研究 [7] では, 検査項目はAIによって適応的に選択され, 保健指導内容であるアドバイスも検査結果に基づいてAIによって選択される. AIによる検査項目およびアドバイスの選択はコストを最小化するように実施されるので, 従来研究は企業事例におけるAIによる医療費の予測も含むヘルスケア支援方法である. よって, 従来研究は企業事例の拡張研究とも解釈できる. しかし, 従来研究では各種確率分布を支配する真のパラメータが既知と仮定されている.

そこで, 本研究ではより現実に近い各種確率分布を支配する真のパラメータが未知の場合の適応的な検査項目の選択を伴うヘルスケア支援におけるコスト最小化を検討する. 真のパラメータについて学習するための学習データとしてはいろいろなデータが考えられるが, 本研究では顧客の健康状態も既知の完全データと顧客の健康状態は未知の不完全データで構成される学習デー

タを受け取ったもとで未知パラメータを学習する半教師付き学習方法を検討する.

なお, 本研究は適応的な検査項目の選択を伴うヘルスケア支援の基礎検討であり, 従来研究同様に具体的な適用先は想定していない. 例えば, 管理栄養士に対する支援に適用する場合であれば, 検査項目としては体重, 身長, 腹囲, 血圧等の特定健診の検査項目や, 握力, 開眼片足立ち等の体力テストや, 食生活に関する質問などが想定される. アドバイスとしては, 管理栄養士が顧客に対して提供する食事や運動などの食生活に関するアドバイスが想定される. 医師に対する支援に適用する場合であれば, 検査項目としては人間ドックの基本的な検査項目やオプションの検査項目に加えて, 特定疾病向けの検査項目などが想定される. アドバイスとしては, 医師による治療方針の提示 (治療の指示) や処方箋の提示 (医薬品の指示) などが想定される.

半教師付き学習にはEMアルゴリズム (expectation-maximization algorithm) [8] を利用し, 顧客に対する適応的な検査項目の選択とアドバイスの選択には真のパラメータが既知の場合の従来研究 [7] で提案されているヘルスケア支援方法に半教師付き学習による学習結果 (真のパラメータの推定結果) を適用 (代入) する.

以下, 2章において本研究で使用する各種記号などについて説明し, 3章では真のパラメータ既知の場合の従来研究 [7] のヘルスケア支援方法を説明する. 4章においてEMアルゴリズムを利用した半教師付き学習方法を提案し, 5章では提案方法の有効性をシミュレーションによって確認し, 最後に6章でまとめと今後の課題について述べる.

2. 準備

ここでは, 本研究で使用する各種記号などを説明する. なお, 各種記号などの多くは従来研究 [7] と同様である.

s_i , $s_i \in S$ は顧客の健康状態を示し, $S = \{s_1, s_2, \dots, s_{|S|}\}$ は健康状態集合である. 健康状態は未知で直接観測できない. c_i , $c_i \in C$ は検査項目を示し, $C = \{c_1, c_2, \dots, c_{|C|}\}$ は検査項目集合である. o_i , $o_i \in O$ は検査における観測値 (検査結果) を示し, $O = \{o_1, o_2, \dots, o_{|O|}\}$ は観測値集合である. m_i , $m_i \in M$ は管理栄養士や医師が顧客に提供するアドバイス (または指示, 治療) を示し, $M = \{m_1, m_2, \dots, m_{|M|}\}$ はアドバイス集合である. e_i , $e_i \in E$ は顧客の健康状態に依存して確率的に生起するイベントを示し, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_{|E|}\}$ はイベント集合である. $h(m_i)$, $1 \leq i \leq |M|$ は顧客がアドバイス m_i を実行す

のためのコスト, $h(e_i)$, $1 \leq i \leq |E|$ はイベント e_i のコストを示し, 本研究ではアドバイスコストとイベントコストを合わせた総コストの最小化を検討する. 従来研究同様に本研究でもマルコフ決定過程を用いてモデル化する. 顧客の健康状態がマルコフ決定過程の状態, 検査項目とアドバイスの選択が行動選択に相当する.

$\Pr(o_k | s_i, c_j, \theta^*)$ は検査項目 c_j によって健康状態 s_i の顧客から観測値 (検査結果) o_k を観測する確率を示す. $\Pr(s_k | s_i, m_j, \theta^*)$ はアドバイス m_j の実行によって顧客の健康状態が s_i から s_k に遷移する健康状態遷移確率を示す. $\Pr(e_j | s_i, \theta^*)$ は健康状態 s_i のもとでイベント e_j が生起する確率を示す. $\Pr(s_i | \theta^*)$ は初期状態の確率分布である. θ^* は各種確率分布を支配する真のパラメータで本研究では未知である.

本研究では, T 期間のマルコフ決定過程問題を扱うが, 各期で N 回の検査項目の選択後にアドバイスを選択するので, 厳密には $T(N+1)$ 回の決定を実施する問題である. 管理栄養士などによる提供アドバイスの選択後に顧客による当該アドバイスの実行によって健康状態が遷移し, 健康状態の遷移後にイベントが生起する. 健康状態は未知で観測できないが, 各検査項目の検査結果およびイベントは観測可能である.

$X_t, X_t \in S$ は t 期の健康状態を示す. $Y_{t,i}$ は t 期の i 回目の選択で, i 回目, $1 \leq i \leq N$ は検査項目の選択 $Y_{t,i} \in C$, $N+1$ 回目はアドバイスの選択 $Y_{t,N+1} \in M$ である. $Y_t = Y_{t,1} Y_{t,2} \dots Y_{t,N+1}$ は t 期の選択系列である. $Z_{t,i}$ は t 期の i 回目の選択に対する観測結果で, i 回目, $1 \leq i \leq N$ は検査結果 $Z_{t,i} \in O$, $N+1$ 回目はイベント $Z_{t,N+1} \in E$ である. $Z_t = Z_{t,1} Z_{t,2} \dots Z_{t,N+1}$ は t 期の観測系列である. t 期のアドバイス $Y_{t,N+1}$ が選択されると, アドバイス $Y_{t,N+1}$ の実行により健康状態は健康状態遷移確率 $\Pr(X_{t+1} | X_t, Y_{t,N+1}, \theta^*)$ に従って状態 X_t から状態 X_{t+1} に遷移する. よって, t 期に観測されるイベント $Z_{t,N+1}$ は t 期の遷移後の状態 X_{t+1} で生起している. 従来研究[7]では, t 期の遷移後の状態を X'_t と表記してイベント $Z_{t,N+1}$ が状態 X'_t で生起した後に, $t+1$ 期の状態を $X_{t+1} = X'_t$ として定義している. 従来研究[7]と本研究における状態定義の違いは表記のみであり, 本質的には同様である.

3. 真のパラメータ既知の場合の従来研究のヘルスケア支援方法

各種確率分布を支配する真のパラメータが既知の場合のコスト最小化を検討した従来研究[7]において提案されたヘルスケア支援方法を紹介する. 本研究では, 半

教師付き学習 (EMアルゴリズム) で学習 (推定) 後のパラメータを従来研究のヘルスケア支援方法に適用 (代入) して使用する. 本章の記号の表記は2章と同様である.

従来研究のヘルスケア支援方法では動的計画法を利用し, T 期から遡りながら計算して検査項目の選択とアドバイスの選択を実施する.

最初に事後確率 $\Pr(X_t | Y^{t-1} Z^{t-1}, Y_{t,i}^{i+1} Z_{t,i}^{i+1})$, $0 \leq i \leq N-1$ と, $\Pr(X_{t+1} | Y^t Z^t)$ の計算式を示す. $Y^{t-1} = Y_1 Y_2 \dots Y_{t-1}$ は1期から $t-1$ 期の選択系列, $Z^{t-1} = Z_1 Z_2 \dots Z_{t-1}$ は1期から $t-1$ 期の観測系列, $Y_{t,i}^{i+1} = Y_{t,1} Y_{t,2} \dots Y_{t,i+1}$ は t 期の1回目から $i+1$ 回目までの選択系列 (検査項目の系列), $Z_{t,i}^{i+1} = Z_{t,1} Z_{t,2} \dots Z_{t,i+1}$ は t 期の1回目から $i+1$ 回目までの選択 (検査) に対する観測系列 (検査結果) である.

$$\Pr(X_t | Y^{t-1} Z^{t-1}, Y_{t,i}^{i+1} Z_{t,i}^{i+1}) = \frac{\Pr(X_t | Y^{t-1} Z^{t-1}, Y_{t,i}^i Z_{t,i}^i) \Pr(Z_{t,i+1} | X_t, Y_{t,i+1}, \theta)}{\sum_{X \in S} \Pr(X | Y^{t-1} Z^{t-1}, Y_{t,i}^i Z_{t,i}^i) \Pr(Z_{t,i+1} | X, Y_{t,i+1}, \theta)} \quad (1)$$

$$\Pr(X_{t+1} | Y^t Z^t) = \frac{\Pr(X_{t+1} | Y^{t-1} Z^{t-1}, Y_{t,N+1}^N Z_{t,N+1}^N) \Pr(Z_{t,N+1} | X_{t+1}, \theta)}{\sum_{X \in S} \Pr(X | Y^{t-1} Z^{t-1}, Y_{t,N+1}^N Z_{t,N+1}^N) \Pr(Z_{t,N+1} | X, \theta)} \quad (2)$$

ただし,

$$\Pr(X_{t+1} | Y^{t-1} Z^{t-1}, Y_{t,N+1}^N Z_{t,N+1}^N) = \sum_{X_t \in S} \Pr(X_t | Y^{t-1} Z^{t-1}, Y_{t,N+1}^N Z_{t,N+1}^N) \Pr(X_{t+1} | X_t, Y_{t,N+1}, \theta). \quad (3)$$

T 期の $N+1$ 回目の選択 (アドバイスの選択) は次式のとおりである.

$$\begin{aligned} & V(Y^{T-1} Z^{T-1}, Y_{T,N+1}^N Z_{T,N+1}^N, T, N+1) \\ &= \min_{Y_{T,N+1} \in M} h(Y_{T,N+1}) + \sum_{X_{T+1} \in S} \sum_{Z_{T,N+1} \in E} \\ & \Pr(X_{T+1} | Y^{T-1} Z^{T-1}, Y_{T,N+1}^N Z_{T,N+1}^N) \Pr(Z_{T,N+1} | X_{T+1}, \theta) \\ & \quad h(Z_{T,N+1}), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & d(Y^{T-1} Z^{T-1}, Y_{T,N+1}^N Z_{T,N+1}^N, T, N+1) \\ &= \arg \min_{Y_{T,N+1} \in M} h(Y_{T,N+1}) + \sum_{X_{T+1} \in S} \sum_{Z_{T,N+1} \in E} \\ & \Pr(X_{T+1} | Y^{T-1} Z^{T-1}, Y_{T,N+1}^N Z_{T,N+1}^N) \Pr(Z_{T,N+1} | X_{T+1}, \theta) \\ & \quad h(Z_{T,N+1}), \end{aligned} \quad (5)$$

ただし, $\Pr(X_{T+1} | Y^{T-1} Z^{T-1}, Y_{T,N+1}^N Z_{T,N+1}^N)$ は式(3)による.

T 期の i 回目, $1 \leq i \leq N$ の選択 (検査項目の選択) は次式のとおりである.

$$\begin{aligned} & V(Y^{T-1} Z^{T-1}, Y_{T,i}^{i-1} Z_{T,i}^{i-1}, T, i) \\ &= \min_{Y_{T,i} \in (C - Y_{T,i}^{i-1})} \sum_{X_T \in S} \sum_{Z_{T,i} \in O} \\ & \Pr(X_T | Y^{T-1} Z^{T-1}, Y_{T,i}^{i-1} Z_{T,i}^{i-1}) \Pr(Z_{T,i} | X_T, Y_{T,i}, \theta) \\ & \quad V(Y^{T-1} Z^{T-1}, Y_{T,i}^i Z_{T,i}^i, T, i+1), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
 & d(Y^{T-1}Z^{T-1}, Y_{T,i}^{i-1}Z_{T,i}^{i-1}, T, i) \\
 &= \arg \min_{Y_{T,i} \in (C - Y_{T,i}^{i-1})} \sum_{X_T \in S} \sum_{Z_{T,i} \in O} \\
 & \Pr(X_T | Y^{T-1}Z^{T-1}, Y_{T,i}^{i-1}Z_{T,i}^{i-1}) \Pr(Z_{T,i} | X_T, Y_{T,i}, \theta) \\
 & \quad V(Y^{T-1}Z^{T-1}, Y_{T,i}^i, Z_{T,i}^i, T, i + 1), \quad (7)
 \end{aligned}$$

ただし、 $(C - Y_{T,i}^{i-1})$ は*T*期において未選択の残りの検査項目集合である。

*t*期、 $1 \leq t \leq T - 1$ の*N* + 1回目の選択（アドバイスの選択）は次式のとおりである。

$$\begin{aligned}
 & V(Y^{t-1}Z^{t-1}, Y_{t,i}^N, Z_{t,i}^N, t, N + 1) \\
 &= \min_{Y_{t,N+1} \in M} h(Y_{t,N+1}) + \sum_{X_{t+1} \in S} \sum_{Z_{t,N+1} \in E} \\
 & \Pr(X_{t+1} | Y^{t-1}Z^{t-1}, Y_{t,i}^{N+1}Z_{t,i}^N) \Pr(Z_{t,N+1} | X_{t+1}, \theta) \\
 & \quad (h(Z_{t,N+1}) + V(Y^t Z^t, Y_{t+1,i}^0, Z_{t+1,i}^0, t + 1, 1)). \quad (8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & d(Y^{t-1}Z^{t-1}, Y_{t,i}^N, Z_{t,i}^N, t, N + 1) \\
 &= \arg \min_{Y_{t,N+1} \in M} h(Y_{t,N+1}) + \sum_{X_{t+1} \in S} \sum_{Z_{t,N+1} \in E} \\
 & \Pr(X_{t+1} | Y^{t-1}Z^{t-1}, Y_{t,i}^{N+1}Z_{t,i}^N) \Pr(Z_{t,N+1} | X_{t+1}, \theta) \\
 & \quad (h(Z_{t,N+1}) + V(Y^t Z^t, Y_{t+1,i}^0, Z_{t+1,i}^0, t + 1, 1)). \quad (9)
 \end{aligned}$$

*t*期、 $1 \leq t \leq T - 1$ の*i*回目、 $1 \leq i \leq N$ の選択（検査項目の選択）は次式のとおりである。

$$\begin{aligned}
 & V(Y^{t-1}Z^{t-1}, Y_{t,i}^{i-1}Z_{t,i}^{i-1}, t, i) \\
 &= \min_{Y_{t,i} \in (C - Y_{t,i}^{i-1})} \sum_{X_t \in S} \sum_{Z_{t,i} \in O} \\
 & \Pr(X_t | Y^{t-1}Z^{t-1}, Y_{t,i}^{i-1}Z_{t,i}^{i-1}) \Pr(Z_{t,i} | X_t, Y_{t,i}, \theta) \\
 & \quad V(Y^{t-1}Z^{t-1}, Y_{t,i}^i, Z_{t,i}^i, t, i + 1). \quad (10) \\
 & d(Y^{t-1}Z^{t-1}, Y_{t,i}^{i-1}Z_{t,i}^{i-1}, t, i) \\
 &= \arg \min_{Y_{t,i} \in (C - Y_{t,i}^{i-1})} \sum_{X_t \in S} \sum_{Z_{t,i} \in O} \\
 & \Pr(X_t | Y^{t-1}Z^{t-1}, Y_{t,i}^{i-1}Z_{t,i}^{i-1}) \Pr(Z_{t,i} | X_t, Y_{t,i}, \theta) \\
 & \quad V(Y^{t-1}Z^{t-1}, Y_{t,i}^i, Z_{t,i}^i, t, i + 1). \quad (11)
 \end{aligned}$$

4. EM アルゴリズムを利用した半教師付き学習方法の提案

各種確率分布を支配する真のパラメータが未知の場合の適応的な検査項目の選択を伴うヘルスケア支援のための、EMアルゴリズムを利用した半教師付き学習方法を提案する。

4.1 学習データ（学習系列）

以下で、学習データを定義する。学習データの表記では複数本の学習系列を表現できるように2章の一部の定

義の添え字を拡張している。

健康状態が既知の*L_c*本の完全データの学習系列 $X'Y'Z'$ と、健康状態が未知の*L_u*本の不完全データの学習系列 XYZ を受け取ったもとで半教師付き学習を実施する。ただし、

$$X'Y'Z' = X'_1Y'_1Z'_1X'_2Y'_2Z'_2 \cdots X'_{L_c}Y'_{L_c}Z'_{L_c}, \quad (12)$$

X'_i, Y'_i, Z'_i はそれぞれ*i*本目の完全データの健康状態系列、選択系列、観測系列ですべて既知である。

$$X'_i = X'_{i,1}X'_{i,2} \cdots X'_{i,T}X'_{i,T+1}, \quad (13)$$

$X'_{i,t}$ は*i*本目の完全データの*t*期の健康状態である。

$$Y'_i = Y'_{i,1}Y'_{i,2} \cdots Y'_{i,T}, \quad (14)$$

$Y'_{i,t}$ は*i*本目の完全データの*t*期の選択系列で、

$$Y'_{i,t} = Y'_{i,t,1}Y'_{i,t,2} \cdots Y'_{i,t,N}Y'_{i,t,N+1}, \quad (15)$$

$Y'_{i,t,j}$ 、 $1 \leq j \leq N$ 、 $Y'_{i,t,j} \in C$ は*i*本目の完全データの*t*期の*j*回目の検査項目の選択、 $Y'_{i,t,N+1}$ 、 $Y'_{i,t,N+1} \in M$ は*i*本目の完全データの*t*期の*N* + 1回目の選択でアドバイスの選択である。

$$Z'_i = Z'_{i,1}Z'_{i,2} \cdots Z'_{i,T}, \quad (16)$$

$Z'_{i,t}$ は*i*本目の完全データの*t*期の観測系列で、

$$Z'_{i,t} = Z'_{i,t,1}Z'_{i,t,2} \cdots Z'_{i,t,N}Z'_{i,t,N+1}, \quad (17)$$

$Z'_{i,t,j}$ 、 $1 \leq j \leq N$ 、 $Z'_{i,t,j} \in O$ は*i*本目の完全データの*t*期の*j*回目の検査項目の観測値（検査結果）、 $Z'_{i,t,N+1}$ 、 $Z'_{i,t,N+1} \in E$ は*i*本目の完全データの*t*期の*N* + 1回目の観測でイベントである。なお、*t*期の検査結果 $Z'_{i,t,j}$ 、 $1 \leq j \leq N$ 、 $Z'_{i,t,j} \in O$ は*t*期の状態 $X'_{i,t}$ のもとで観測されるが、*t*期のイベント $Z'_{i,t,N+1}$ 、 $Z'_{i,t,N+1} \in E$ は*t*期のアドバイス $Y'_{i,t,N+1}$ 実行による遷移後の状態 $X'_{i,t+1}$ のもとで観測される。

$$XYZ = X_1Y_1Z_1X_2Y_2Z_2 \cdots X_{L_u}Y_{L_u}Z_{L_u}, \quad (18)$$

X_i, Y_i, Z_i は*i*本目の不完全データの健康状態系列、選択系列、観測系列で健康状態系列 X_i のみ未知である。

$$X_i = X_{i,1}X_{i,2} \cdots X_{i,T}X_{i,T+1}, \quad (19)$$

$X_{i,t}$ は*i*本目の不完全データの*t*期の健康状態で未知である。

$$Y_i = Y_{i,1}Y_{i,2} \cdots Y_{i,T}, \quad (20)$$

$Y_{i,t}$ は*i*本目の不完全データの*t*期の選択系列で、

$$Y_{i,t} = Y_{i,t,1}Y_{i,t,2} \cdots Y_{i,t,N}Y_{i,t,N+1}, \quad (21)$$

$Y_{i,t,j}$ 、 $1 \leq j \leq N$ 、 $Y_{i,t,j} \in C$ は*i*本目の不完全データの*t*期の*j*回目の検査項目の選択、 $Y_{i,t,N+1}$ 、 $Y_{i,t,N+1} \in M$ は*i*本目の不完全データの*t*期の*N* + 1回目の選択でアドバイスの選択である。

$$Z_i = Z_{i,1}Z_{i,2} \cdots Z_{i,T}, \quad (22)$$

$Z_{i,t}$ は*i*本目の不完全データの*t*期の観測系列で、

$$Z_{i,t} = Z_{i,t,1}Z_{i,t,2} \cdots Z_{i,t,N}Z_{i,t,N+1}, \quad (23)$$

$Z_{i,t,j}$, $1 \leq j \leq N$, $Z_{i,t,j} \in O$ は本目の不完全データの t 期の j 回目の検査項目の観測値 (検査結果), $Z_{i,t,N+1}$, $Z_{i,t,N+1} \in E$ は本目の不完全データの t 期の $N+1$ 回目の観測でイベントである. なお, t 期の検査結果 $Z_{i,t,j}$, $1 \leq j \leq N$, $Z_{i,t,j} \in O$ は t 期の状態 $X_{i,t}$ のもとで観測されるが, t 期のイベント $Z_{i,t,N+1}$, $Z_{i,t,N+1} \in E$ は t 期のアドバイス $Y_{i,t,N+1}$ 実行による遷移後の状態 $X_{i,t+1}$ のもとで観測される.

4.2 EM アルゴリズムの不完全データへの適用

本節では, 不完全データに対する EM アルゴリズムの適用について説明する. 完全データについては, 不完全データへの EM アルゴリズムの適用結果の拡張による対応を 4.4 節で説明する.

不完全データ XYZ の生起確率は以下のとおりである.

$$\begin{aligned} \Pr(XYZ|\theta) &= \prod_{i=1}^{L_u} \Pr(X_i Y_i Z_i|\theta) \\ &= \prod_{i=1}^{L_u} \Pr(X_{i,1}|\theta) \prod_{j=1}^N \Pr(Z_{i,1,j}|X_{i,1}, Y_{i,1,j}, \theta) \\ &\quad \Pr(X_{i,2}|X_{i,1}, Y_{i,1,N+1}, \theta) \Pr(Z_{i,1,N+1}|X_{i,2}, \theta) \\ &\quad \prod_{k=2}^T \prod_{l=1}^N \Pr(Z_{i,k,l}|X_{i,k}, Y_{i,k,l}, \theta) \\ &\quad \Pr(X_{i,k+1}|X_{i,k}, Y_{i,k,N+1}, \theta) \\ &\quad \Pr(Z_{i,k,N+1}|X_{i,k+1}, \theta). \end{aligned} \quad (24)$$

EM アルゴリズムにおいて最大化する $Q(\theta^0, \theta)$ 関数を次式に示す. 式中の θ は θ^0 の更新後のパラメータである.

$$\begin{aligned} Q(\theta^0, \theta) &= \sum_X \Pr(X|Y, Z, \theta^0) \log \Pr(X, Y, Z|\theta) \\ &= \sum_X \Pr(X|Y, Z, \theta^0) \sum_{i=1}^{L_u} \log \Pr(X_i Y_i Z_i|\theta) \\ &= \sum_X \Pr(X|Y, Z, \theta^0) \sum_{i=1}^{L_u} \log \Pr(X_{i,1}|\theta) \\ &\quad + \sum_X \Pr(X|Y, Z, \theta^0) \\ &\quad \sum_{i=1}^{L_u} \sum_{j=1}^T \sum_{k=1}^N \log \Pr(Z_{i,j,k}|X_{i,j}, Y_{i,j,k}, \theta) \\ &\quad + \sum_X \Pr(X|Y, Z, \theta^0) \\ &\quad \sum_{i=1}^{L_u} \sum_{j=1}^T \log \Pr(X_{i,j+1}|X_{i,j}, Y_{i,j,N+1}, \theta) \\ &\quad + \sum_X \Pr(X|Y, Z, \theta^0) \\ &\quad \sum_{i=1}^{L_u} \sum_{j=1}^T \log \Pr(Z_{i,j,N+1}|X_{i,j+1}, \theta) \\ &= Q_1(\theta^0, \theta) + Q_2(\theta^0, \theta) + Q_3(\theta^0, \theta) \\ &\quad + Q_4(\theta^0, \theta), \end{aligned} \quad (25)$$

ただし,

$$Q_1(\theta^0, \theta) = \sum_X \Pr(X|Y, Z, \theta^0) \sum_{i=1}^{L_u} \log \Pr(X_{i,1}|\theta), \quad (26)$$

$$Q_2(\theta^0, \theta) = \sum_X \Pr(X|Y, Z, \theta^0) \sum_{i=1}^{L_u} \sum_{j=1}^T \sum_{k=1}^N \log \Pr(Z_{i,j,k}|X_{i,j}, Y_{i,j,k}, \theta), \quad (27)$$

$$Q_3(\theta^0, \theta) = \sum_X \Pr(X|Y, Z, \theta^0) \sum_{i=1}^{L_u} \sum_{j=1}^T \log \Pr(X_{i,j+1}|X_{i,j}, Y_{i,j,N+1}, \theta), \quad (28)$$

$$Q_4(\theta^0, \theta) = \sum_X \Pr(X|Y, Z, \theta^0) \sum_{i=1}^{L_u} \sum_{j=1}^T \log \Pr(Z_{i,j,N+1}|X_{i,j+1}, \theta). \quad (29)$$

$Q_1(\theta^0, \theta)$, $Q_2(\theta^0, \theta)$, $Q_3(\theta^0, \theta)$, $Q_4(\theta^0, \theta)$ の最大化の

詳細は付録に示し, ここでは結果のみ紹介する.

$Q_1(\theta^0, \theta)$ を最大化する $\Pr(s_j|\theta)$ の推定値 $\widehat{\Pr}(s_j|\theta)$ は次式のとおりである.

$$\widehat{\Pr}(s_j|\theta) = \frac{\sum_{i=1}^{L_u} \Pr(X_{i,1} = s_j | Y_i, Z_i, \theta^0)}{L_u}. \quad (30)$$

式(30)の分子は L_u 本の不完全データにおいて初期の健康状態が s_j である頻度の期待値に相当する. ただし, $\Pr(X_{i,1} = s_j | Y_i, Z_i, \theta^0)$ は Y_i (i 本目の不完全データの選択系列) と Z_i (i 本目の不完全データの観測系列) を観測したもとの初期の健康状態 s_j の事後確率に相当する.

$Q_2(\theta^0, \theta)$ を最大化する $\Pr(o_{l_3} | s_{l_1}, c_{l_2}, \theta)$ の推定値 $\widehat{\Pr}(o_{l_3} | s_{l_1}, c_{l_2}, \theta)$ は次式のとおりである.

$$\begin{aligned} \widehat{\Pr}(o_{l_3} | s_{l_1}, c_{l_2}, \theta) &= \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{L_u} \sum_{j=1}^T \sum_{k=1}^N \delta(Y_{i,j,k}, Z_{i,j,k}, c_{l_2}, o_{l_3}) \Pr(X_{i,j} = s_{l_1} | Y_i, Z_i, \theta^0)}{\sum_{l_3=1}^{O_l} \sum_{i=1}^{L_u} \sum_{j=1}^T \sum_{k=1}^N \delta(Y_{i,j,k}, Z_{i,j,k}, c_{l_2}, o_{l_3}) \Pr(X_{i,j} = s_{l_1} | Y_i, Z_i, \theta^0)}, \end{aligned} \quad (31)$$

ただし,

$$\begin{aligned} \delta(Y_{i,j,k}, Z_{i,j,k}, c_{l_2}, o_{l_3}) &= \\ &= \begin{cases} 1, & Y_{i,j,k} = c_{l_2} \text{かつ} Z_{i,j,k} = o_{l_3}; \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases} \end{aligned} \quad (32)$$

式(31)の分子は L_u 本の不完全データにおいて健康状態が s_{l_1} の顧客に対して検査項目 c_{l_2} を実施して検査結果 o_{l_3} を観測した頻度の期待値である. 分母は L_u 本の不完全データにおいて健康状態が s_{l_1} の顧客に対して検査項目 c_{l_2} を実施した頻度の期待値である.

$Q_3(\theta^0, \theta)$ を最大化する $\Pr(s_{k_3} | s_{k_1}, m_{k_2}, \theta)$ の推定値 $\widehat{\Pr}(s_{k_3} | s_{k_1}, m_{k_2}, \theta)$ は次式のとおりである.

$$\begin{aligned} \widehat{\Pr}(s_{k_3} | s_{k_1}, m_{k_2}, \theta) &= \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{L_u} \sum_{j=1}^T \delta(Y_{i,j,N+1}, m_{k_2}) \Pr(X_{i,j} = s_{k_1}, X_{i,j+1} = s_{k_3} | Y_i, Z_i, \theta^0)}{\sum_{k_3=1}^{S_l} \sum_{i=1}^{L_u} \sum_{j=1}^T \delta(Y_{i,j,N+1}, m_{k_2}) \Pr(X_{i,j} = s_{k_1}, X_{i,j+1} = s_{k_3} | Y_i, Z_i, \theta^0)}, \end{aligned} \quad (33)$$

ただし,

$$\delta(Y_{i,j,N+1}, m_{k_2}) = \begin{cases} 1, & Y_{i,j,N+1} = m_{k_2}; \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases} \quad (34)$$

式(33)の分子は L_u 本の不完全データにおいて健康状態が s_{k_1} の顧客に対してアドバイス m_{k_2} を選択し, アドバイス m_{k_2} 実行後に健康状態が s_{k_3} に遷移した頻度の期待値である. 分母は L_u 本の不完全データにおいて健康状態が s_{k_1} の顧客に対してアドバイス m_{k_2} を選択した頻度の期待値である.

$Q_4(\theta^0, \theta)$ を最大化する $\Pr(e_{k_2} | s_{k_1}, \theta)$ の推定値 $\widehat{\Pr}(e_{k_2} | s_{k_1}, \theta)$ は次式のとおりである.

$$\widehat{\Pr}(e_{k_2} | s_{k_1}, \theta) = \frac{\sum_{i=1}^{L_u} \sum_{j=1}^T \delta(Z_{i,j,N+1}, e_{k_2}) \Pr(X_{i,j+1} = s_{k_1} | Y_i, Z_i, \theta^0)}{\sum_{k_2=1}^{|\mathcal{E}|} \sum_{i=1}^{L_u} \sum_{j=1}^T \delta(Z_{i,j,N+1}, e_{k_2}) \Pr(X_{i,j+1} = s_{k_1} | Y_i, Z_i, \theta^0)} \quad (35)$$

ただし、

$$\delta(Z_{i,j,N+1}, e_{k_2}) = \begin{cases} 1, & Z_{i,j,N+1} = e_{k_2}; \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases} \quad (36)$$

式(35)の分子は L_u 本の不完全データにおいてアドバイス実行後の健康状態が s_{k_1} の顧客に対してイベント e_{k_2} が生じた頻度の期待値である。分母は L_u 本の不完全データにおいてアドバイス実行後の顧客の健康状態が s_{k_1} である頻度の期待値に相当する。

4.3 事後確率の計算

本節では式(30), 式(31), 式(33), 式(35)中の系列 $Y_i Z_i$ を観測したもとの事後確率 $\Pr(X_{i,j} = s_k | Y_i, Z_i, \theta^0)$ および事後確率 $\Pr(X_{i,j} = s_k, X_{i,j+1} = s_l | Y_i, Z_i, \theta^0)$ を再帰的な計算を利用して算出する方法を説明する。

式(24)より、 i 本目の不完全データ $X_i Y_i Z_i$ の生起確率 $\Pr(X_i Y_i Z_i | \theta)$ は次式のとおりである。

$$\begin{aligned} & \Pr(X_i Y_i Z_i | \theta) \\ &= \Pr(X_{i,1} | \theta) \prod_{j=1}^N \Pr(Z_{i,1,j} | X_{i,1}, Y_{i,1,j}, \theta) \\ & \quad \Pr(X_{i,2} | X_{i,1}, Y_{i,1,N+1}, \theta) \Pr(Z_{i,1,N+1} | X_{i,2}, \theta) \\ & \quad \prod_{k=2}^T \prod_{l=1}^N \Pr(Z_{i,k,l} | X_{i,k}, Y_{i,k,l}, \theta) \\ & \quad \Pr(X_{i,k+1} | X_{i,k}, Y_{i,k,N+1}, \theta) \\ & \quad \Pr(Z_{i,k,N+1} | X_{i,k+1}, \theta). \end{aligned} \quad (37)$$

ここで、以下の表記を導入する。

$$\alpha_{i,j}(k) = \Pr(Y_{i,1}^{j-1}, Z_{i,1}^{j-2}, Z_{i,j-1}^N, X_{i,j} = s_k | \theta)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{X_{i,1} X_{i,2} \cdots X_{i,j-1}} \\ & \Pr(X_{i,1} | \theta) \prod_{l_1=1}^N \Pr(Z_{i,1,l_1} | X_{i,1}, Y_{i,1,l_1}, \theta) \\ & \quad \Pr(X_{i,2} | X_{i,1}, Y_{i,1,N+1}, \theta) \Pr(Z_{i,1,N+1} | X_{i,2}, \theta) \\ & \quad \prod_{l_2=2}^{j-2} \prod_{l_3=1}^N \Pr(Z_{i,l_2,l_3} | X_{i,l_2}, Y_{i,l_2,l_3}, \theta) \\ & \quad \Pr(X_{i,l_2+1} | X_{i,l_2}, Y_{i,l_2,N+1}, \theta) \\ & \quad \Pr(Z_{i,l_2,N+1} | X_{i,l_2+1}, \theta) \\ & \quad \prod_{l_4=1}^N \Pr(Z_{i,j-1,l_4} | X_{i,j-1}, Y_{i,j-1,l_4}, \theta) \\ & \quad \Pr(X_{i,j} = s_k | X_{i,j-1}, Y_{i,j-1,N+1}, \theta), \end{aligned} \quad (38)$$

ただし、

$$Y_{i,1}^{j-1} = Y_{i,1} Y_{i,2} \cdots Y_{i,j-1}, \quad (39)$$

$$Z_{i,1}^{j-2} = Z_{i,1} Z_{i,2} \cdots Z_{i,j-2}, \quad (40)$$

$$Z_{i,j-1}^N = Z_{i,j-1,1} Z_{i,j-1,2} \cdots Z_{i,j-1,N}, \quad (41)$$

$$\alpha_{i,1}(k) = \Pr(X_{i,1} = s_k | \theta), \quad (42)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{|\mathcal{S}|} \alpha_{i,T+1}(k) \Pr(Z_{i,T,N+1} | X_{i,T+1} = s_k, \theta) \\ &= \Pr(Y_i Z_i | \theta). \end{aligned} \quad (43)$$

$\alpha_{i,j}(k)$ は次式で再帰的に計算できる。

$$\begin{aligned} & \alpha_{i,j}(k) \\ &= \sum_{l_1=1}^{|\mathcal{S}|} \alpha_{i,j-1}(l_1) \Pr(Z_{i,j-2,N+1} | X_{i,j-1} = s_{l_1}, \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \prod_{l_2=1}^N \Pr(Z_{i,j-1,l_2} | X_{i,j-1} = s_{l_1}, Y_{i,j-1,l_2}, \theta) \\ & \Pr(X_{i,j} = s_k | X_{i,j-1} = s_{l_1}, Y_{i,j-1,N+1}, \theta) \end{aligned} \quad (44)$$

ただし、

$$\begin{aligned} & \alpha_{i,2}(k) = \sum_{l_1=1}^{|\mathcal{S}|} \alpha_{i,1}(l_1) \\ & \prod_{l_2=1}^N \Pr(Z_{i,1,l_2} | X_{i,1} = s_{l_1}, Y_{i,1,l_2}, \theta) \\ & \Pr(X_{i,2} = s_k | X_{i,1} = s_{l_1}, Y_{i,1,N+1}, \theta). \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} & \beta_{i,j}(k) = \\ & \Pr(Z_{i,j-1,N+1}, Y_{i,j} \cdots Y_{i,T}, Z_{i,j} \cdots Z_{i,T} | X_{i,j} = s_k, \theta) \\ &= \sum_{X_{i,j+1} X_{i,j+2} \cdots X_{i,T+1}} \\ & \quad \Pr(Z_{i,j-1,N+1} | X_{i,j} = s_k, \theta) \\ & \quad \prod_{l_1=j}^T \prod_{l_2=1}^N \Pr(Z_{i,l_1,l_2} | X_{i,l_1}, Y_{i,l_1,l_2}, \theta) \\ & \quad \Pr(X_{i,l_1+1} | X_{i,l_1}, Y_{i,l_1,N+1}, \theta) \\ & \quad \Pr(Z_{i,l_1,N+1} | X_{i,l_1+1}, \theta), \end{aligned} \quad (46)$$

ただし、

$$\beta_{i,T+1}(k) = \Pr(Z_{i,T,N+1} | X_{i,T+1} = s_k, \theta). \quad (47)$$

$\beta_{i,j}(k)$ は次式で再帰的に計算できる。

$$\begin{aligned} & \beta_{i,j}(k) = \sum_{l_1=1}^{|\mathcal{S}|} \Pr(Z_{i,j-1,N+1} | X_{i,j} = s_k, \theta) \\ & \prod_{l_2=1}^N \Pr(Z_{i,j,l_2} | X_{i,j} = s_k, Y_{i,j,l_2}, \theta) \\ & \Pr(X_{i,j+1} = s_{l_1} | X_{i,j} = s_k, Y_{i,j,N+1}, \theta) \beta_{i,j+1}(l_1). \end{aligned} \quad (48)$$

ただし、

$$\begin{aligned} & \beta_{i,1}(k) = \sum_{l_1=1}^{|\mathcal{S}|} \prod_{l_2=1}^N \Pr(Z_{i,1,l_2} | X_{i,1} = s_k, Y_{i,1,l_2}, \theta) \\ & \Pr(X_{i,2} = s_{l_1} | X_{i,1} = s_k, Y_{i,1,N+1}, \theta) \beta_{i,2}(l_1). \end{aligned} \quad (49)$$

$$\Pr(Y_i Z_i, X_{i,j} = s_k | \theta) = \alpha_{i,j}(k) \beta_{i,j}(k). \quad (50)$$

$$\begin{aligned} & \Pr(Y_i Z_i, X_{i,j} = s_k, X_{i,j+1} = s_l | \theta) \\ &= \alpha_{i,j}(k) \Pr(Z_{i,j-1,N+1} | X_{i,j} = s_k, \theta) \\ & \quad \prod_{n=1}^N \Pr(Z_{i,j,n} | X_{i,j} = s_k, Y_{i,j,n}, \theta) \\ & \Pr(X_{i,j+1} = s_l | X_{i,j} = s_k, Y_{i,j,N+1}, \theta) \beta_{i,j+1}(l). \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} & \Pr(Y_i Z_i, X_{i,1} = s_k, X_{i,2} = s_l | \theta) \\ &= \alpha_{i,1}(k) \prod_{n=1}^N \Pr(Z_{i,1,n} | X_{i,1} = s_k, Y_{i,1,n}, \theta) \\ & \Pr(X_{i,2} = s_l | X_{i,1} = s_k, Y_{i,1,N+1}, \theta) \beta_{i,2}(l). \end{aligned} \quad (52)$$

式(43) (i 本目の不完全データの系列 $Y_i Z_i$ の生起確率 $\Pr(Y_i Z_i | \theta)$)、式(50) (i 本目の不完全データの系列 $Y_i Z_i$ と j 期の状態 $X_{i,j} = s_k$ の生起確率 $\Pr(Y_i Z_i, X_{i,j} = s_k | \theta)$)より、

$$\Pr(X_{i,j} = s_k | Y_i, Z_i, \theta^0) = \frac{\Pr(Y_i Z_i, X_{i,j} = s_k | \theta^0)}{\Pr(Y_i Z_i | \theta^0)}$$

$$= \frac{\alpha_{i,j}(k) \beta_{i,j}(k)}{\sum_{k=1}^{|S|} \alpha_{i,T+1}(k) \Pr(Z_{i,T,N+1} | X_{i,T+1} = s_k, \theta^0)}. \quad (53)$$

式(43) (i本目の不完全データの系列 $Y_i Z_i$ の生起確率 $\Pr(Y_i Z_i | \theta)$), 式(51) (i本目の不完全データの系列 $Y_i Z_i$ とj期の状態 $X_{i,j} = s_k$ とj+1期の状態 $X_{i,j+1} = s_l$ の生起確率 $\Pr(Y_i Z_i, X_{i,j} = s_k, X_{i,j+1} = s_l | \theta)$) より,

$$\Pr(X_{i,j} = s_k, X_{i,j+1} = s_l | Y_i, Z_i, \theta^0)$$

$$= \frac{\Pr(Y_i Z_i, X_{i,j} = s_k, X_{i,j+1} = s_l | \theta^0)}{\Pr(Y_i Z_i | \theta^0)}$$

$$= \frac{\Pr(Y_i Z_i, X_{i,j} = s_k, X_{i,j+1} = s_l | \theta^0)}{\sum_{k=1}^{|S|} \alpha_{i,T+1}(k) \Pr(Z_{i,T,N+1} | X_{i,T+1} = s_k, \theta^0)}, \quad (54)$$

ただし,

$$\Pr(Y_i Z_i, X_{i,j} = s_k, X_{i,j+1} = s_l | \theta^0)$$

$$= \alpha_{i,j}(k) \Pr(Z_{i,j-1,N+1} | X_{i,j} = s_k, \theta^0)$$

$$\prod_{n=1}^N \Pr(Z_{i,j,n} | X_{i,j} = s_k, Y_{i,j,n}, \theta^0)$$

$$\Pr(X_{i,j+1} = s_l | X_{i,j} = s_k, Y_{i,j,N+1}, \theta^0) \beta_{i,j+1}(l). \quad (55)$$

$$\Pr(Y_i Z_i, X_{i,1} = s_k, X_{i,2} = s_l | \theta^0)$$

$$= \alpha_{i,1}(k) \prod_{n=1}^N \Pr(Z_{i,1,n} | X_{i,1} = s_k, Y_{i,1,n}, \theta^0)$$

$$\Pr(X_{i,2} = s_l | X_{i,1} = s_k, Y_{i,1,N+1}, \theta^0) \beta_{i,2}(l). \quad (56)$$

4.4 完全データへの対応

本節では, 不完全データにEMアルゴリズムを適用する際のパラメータの更新式, 式(30), 式(31), 式(33), 式(35)を完全データにも対応するように拡張する.

式(30)の分子は L_u 本の不完全データにおいて初期の健康状態が s_j の頻度の期待値である. 他方, 完全データでは健康状態は既知なので, 確定的な値になる. 完全データも追加した $\Pr(s_j | \theta)$ の推定は以下ようになる.

$$\widehat{\Pr}(s_j | \theta) = \frac{H'(s_j) + \sum_{i=1}^{L_u} \Pr(X_{i,1} = s_j | Y_i, Z_i, \theta^0)}{L_c + L_u}. \quad (57)$$

ただし, $H'(s_j)$ は L_c 本の完全データにおいて初期の健康状態が s_j の頻度を示す.

式(31)の分子は L_u 本の不完全データにおいて健康状態が s_{l_1} の顧客に対して検査項目 c_{l_2} を実施して検査結果 o_{l_3} を観測した頻度の期待値である. 他方, 完全データでは確定的な値になる. 完全データも追加した $\Pr(o_{l_3} | s_{l_1}, c_{l_2}, \theta)$ の推定は以下ようになる.

$$\widehat{\Pr}(o_{l_3} | s_{l_1}, c_{l_2}, \theta) =$$

$$\frac{H'(s_{l_1}, c_{l_2}, o_{l_3}) + \sum_{i=1}^{L_u} \sum_{j=1}^T \sum_{k=1}^N \delta(Y_{i,j,k}, Z_{i,j,k}, c_{l_2}, o_{l_3}) \Pr(X_{i,j} = s_{l_1} | Y_i, Z_i, \theta^0)}{\sum_{l_3=1}^{|O|} H'(s_{l_1}, c_{l_2}, o_{l_3}) + \sum_{l_3=1}^{|O|} \sum_{i=1}^{L_u} \sum_{j=1}^T \sum_{k=1}^N \delta(Y_{i,j,k}, Z_{i,j,k}, c_{l_2}, o_{l_3}) \Pr(X_{i,j} = s_{l_1} | Y_i, Z_i, \theta^0)}. \quad (58)$$

ただし, $H'(s_{l_1}, c_{l_2}, o_{l_3})$ は L_c 本の完全データにおいて健康状態が s_{l_1} の顧客に対して検査項目 c_{l_2} を実施して検査結果 o_{l_3} を観測した頻度を示す.

式(33)の分子は L_u 本の不完全データにおいて健康状態が s_{k_1} の顧客に対してアドバイス m_{k_2} を選択し, アドバイス m_{k_2} 実行後に健康状態が s_{k_3} に遷移した頻度の期待値である. 他方, 完全データでは確定的な値になる. 完全データも追加した $\Pr(s_{k_3} | s_{k_1}, m_{k_2}, \theta)$ の推定は以下ようになる.

$$\widehat{\Pr}(s_{k_3} | s_{k_1}, m_{k_2}, \theta) =$$

$$\frac{H'(s_{k_1}, m_{k_2}, s_{k_3}) + \sum_{i=1}^{L_u} \sum_{j=1}^T \delta(Y_{i,j,N+1}, m_{k_2}) \Pr(X_{i,j} = s_{k_1}, X_{i,j+1} = s_{k_3} | Y_i, Z_i, \theta^0)}{\sum_{k_3=1}^{|S|} H'(s_{k_1}, m_{k_2}, s_{k_3}) + \sum_{k_3=1}^{|S|} \sum_{i=1}^{L_u} \sum_{j=1}^T \delta(Y_{i,j,N+1}, m_{k_2}) \Pr(X_{i,j} = s_{k_1}, X_{i,j+1} = s_{k_3} | Y_i, Z_i, \theta^0)}. \quad (59)$$

ただし, $H'(s_{k_1}, m_{k_2}, s_{k_3})$ は L_c 本の完全データにおいて健康状態が s_{k_1} の顧客に対してアドバイス m_{k_2} を選択し, アドバイス m_{k_2} 実行後に健康状態が s_{k_3} に遷移した頻度を示す.

式(35)の分子は L_u 本の不完全データにおいてアドバイス実行後の健康状態が s_{k_1} の顧客に対してイベント e_{k_2} が生じた頻度の期待値である. 他方, 完全データでは確定的な値になる. 完全データも追加した $\Pr(e_{k_2} | s_{k_1}, \theta)$ の推定は以下ようになる.

$$\widehat{\Pr}(e_{k_2} | s_{k_1}, \theta) =$$

$$\frac{H'(s_{k_1}, e_{k_2}) + \sum_{i=1}^{L_u} \sum_{j=1}^T \delta(Z_{i,j,N+1}, e_{k_2}) \Pr(X_{i,j+1} = s_{k_1} | Y_i, Z_i, \theta^0)}{\sum_{k_2=1}^{|E|} H'(s_{k_1}, e_{k_2}) + \sum_{k_2=1}^{|E|} \sum_{i=1}^{L_u} \sum_{j=1}^T \delta(Z_{i,j,N+1}, e_{k_2}) \Pr(X_{i,j+1} = s_{k_1} | Y_i, Z_i, \theta^0)}. \quad (60)$$

ただし, $H'(s_{k_1}, e_{k_2})$ は L_c 本の完全データにおいてアドバイス実行後の健康状態が s_{k_1} の顧客に対してイベント e_{k_2} が生じた頻度を示す.

本研究におけるEMアルゴリズムの具体的な手順は, 最初に各パラメータ $\widehat{\Pr}(s_j | \theta)$, $\widehat{\Pr}(o_{l_3} | s_{l_1}, c_{l_2}, \theta)$, $\widehat{\Pr}(s_{k_3} | s_{k_1}, m_{k_2}, \theta)$, $\widehat{\Pr}(e_{k_2} | s_{k_1}, \theta)$ の初期値を設定する. 次に式(57)から式(60)を用いて各パラメータを推定し, $\widehat{\Pr}(s_j | \theta)$, $\widehat{\Pr}(o_{l_3} | s_{l_1}, c_{l_2}, \theta)$, $\widehat{\Pr}(s_{k_3} | s_{k_1}, m_{k_2}, \theta)$, $\widehat{\Pr}(e_{k_2} | s_{k_1}, \theta)$ を更新する. 推定結果が収束するまで, または経験則などで事前に決めておいた繰返し回数に従って推定と更新を繰り返す. なお, 式(57)から式(60)中の健康状態の事後確率の計算には式(53), 式(54)を用いる.

5. シミュレーション例

提案方法の有効性を確認するため, シミュレーション

を実施したので以下で報告する。

健康状態数 $|S| = 4$, アドバイス数 $|M| = 4$, イベント数 $|E| = 3$, 検査項目数 $|C| = 3$, 観測値数 $|O| = 3$, 期間長 $T = 3$, 検査項目選択回数 $N = 1$, アドバイスコスト $h(m_1) = 50, h(m_2) = 100, h(m_3) = 500, h(m_4) = 1000$, イベントコスト $h(e_1) = 100, h(e_2) = 1000, h(e_3) = 2500$, 健康状態遷移確率 $\Pr(s_k|s_i, m_j, \theta^*)$ を表1, 検査結果の観測確率 $\Pr(o_k|s_i, c_j, \theta^*)$ を表2, イベント生起確率 $\Pr(e_j|s_i, \theta^*)$ を表3, 顧客の健康状態の初期分布 $\Pr(s_i|\theta^*)$ を表4とした. 本来であればヘルスケア支援の実データに基づく設定が望ましいが, 本研究では実データは未入手である. そのため, 以上の各種設定については, 「悪い健康状態/症状になるほど疾病の発生率や治療費が高くなる傾向がある」, 「効果が大きい医薬品/治療ほど価格/治療費が高くなる傾向がある」という事実[9][10][11][12]を反映するように著者が主観的に設定した. なお, 本シミュレーション例では提案方法の特徴が把握し易いように健康状態数, アドバイス数, イベント数, 検査項目数などを小さく設定して簡易なモデルを対象としているが, 実データに基づく設定の場合にはより大きな健康状態数等を伴うより複雑なモデルになることが想定される.

表1. 健康状態遷移確率 $\Pr(s_k|s_i, m_j, \theta^*)$ の設定

i	j	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
1	1	0.70	0.20	0.08	0.02
2	1	0.05	0.65	0.20	0.10
3	1	0.01	0.02	0.70	0.27
4	1	0.01	0.01	0.01	0.97
1	2	0.90	0.05	0.04	0.01
2	2	0.30	0.60	0.08	0.02
3	2	0.05	0.35	0.50	0.10
4	2	0.02	0.08	0.30	0.60
1	3	0.95	0.03	0.01	0.01
2	3	0.60	0.35	0.04	0.01
3	3	0.15	0.65	0.15	0.05
4	3	0.05	0.25	0.50	0.20
1	4	0.96	0.02	0.01	0.01
2	4	0.90	0.07	0.02	0.01
3	4	0.40	0.50	0.08	0.02
4	4	0.05	0.30	0.55	0.10

表2. 検査結果の観測確率 $\Pr(o_k|s_i, c_j, \theta^*)$ の設定

i	j	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
1	1	0.90	0.05	0.05
2	1	0.05	0.90	0.05
3	1	0.05	0.05	0.90
4	1	0.05	0.05	0.90
1	2	0.90	0.05	0.05
2	2	0.05	0.90	0.05
3	2	0.05	0.90	0.05
4	2	0.05	0.05	0.90
1	3	0.90	0.05	0.05
2	3	0.90	0.05	0.05
3	3	0.05	0.90	0.05
4	3	0.05	0.05	0.90

表3. イベント生起確率 $\Pr(e_j|s_i, \theta^*)$ の設定

i	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
1	0.90	0.09	0.01
2	0.70	0.25	0.05
3	0.40	0.45	0.15
4	0.01	0.39	0.60

表4. 顧客の健康状態の初期分布 $\Pr(s_i|\theta^*)$ の設定

$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
0.2	0.3	0.3	0.2

学習データの系列(期間)長も3とした. 健康状態が既知の完全データの学習系列数を $L_c = 100$ で固定し, 健康状態が未知の不完全データの学習系列数を $L_u = 10, L_u = 100, L_u = 1000$ とした. 学習系列は一様乱数を利用して表1から表4の各種確率分布に従って1000パターン用意し, EMアルゴリズムの繰返し回数は著者の経験から100回とした. 学習系列の各パターンに対してEMアルゴリズムで学習後の各パラメータの推定値を従来研究のヘルスケア支援方法に代入して1000回のシミュレーションを実施した. 1000パターンの学習系列に対する1000回のシミュレーションでの平均コストを表5に示す.

表5. 完全データ数 $L_c = 100$ のもとで不完全データ数を変化させた場合の平均コストと真のパラメータ既知の場合の平均コストの比較

$L_u = 10$	$L_u = 100$	$L_u = 1000$	既知
2754.2	2738.5	2690.5	2664.3

表5の既知は真のパラメータ既知の場合の最適な行動選択による1000回のシミュレーションでの平均コストである。各平均コストは小数点以下第二位を四捨五入した値である。表5から不完全データ数の増加により徐々に真のパラメータ既知の場合の平均コストに近づいていることが確認できる。以上より、本研究の提案アルゴリズムの有効性が確認できた。

6. まとめと今後の課題

本研究では、各種確率分布を支配する真のパラメータが未知の場合の適応的な検査項目の選択を伴うヘルスケア支援におけるコスト最小化問題を対象とした。学習データとして健康状態も既知の完全データと健康状態は未知の不完全データを利用して、各種確率分布を支配する真のパラメータをEMアルゴリズムで推定する半教師付き学習方法を提案した。提案アルゴリズムの評価のために、提案アルゴリズムで推定後のパラメータを従来研究の真のパラメータ既知の場合のヘルスケア支援方法に代入することによるシミュレーションを実施した。シミュレーション結果より、不完全データ数の増加に伴って提案アルゴリズムの推定パラメータを使用した場合の平均コストが真のパラメータ既知の場合の平均コストに近づくことを確認した。

本研究では、ヘルスケア支援に関する基礎検討として各種コストや各種確率分布を支配する真のパラメータなどの設定を著者の主観に基づいて設定した。今後の課題として、ヘルスケア支援の実データに基づくより現実に近いモデル化が挙げられる。特に、現実に適した健康状態、検査項目、アドバイス、イベントの検討、各種コストや各種確率分布に関する実データの収集などは重要な課題である。

謝辞

本研究の一部はJSPS 科研費 JP16K00417 の助成による。

参考文献

- [1] 緒方真一, ヘルスケア分野でのAI・ビッグデータ活用と事業展開, 神奈川県第2回未病産業研究会, 2017.
<http://www.pref.kanagawa.jp/docs/mv4/cnt/f536433/documents/904343.pdf>, 参照 (2019. 3. 26)
- [2] 内閣府, 人工知能の研究開発目標と産業化のロードマップの検討状況 (中間まとめ案), 第4回人工知能技術戦略会議, 2017.
<https://www.nedo.go.jp/content/100860018.pdf>, 参照 (2019. 3. 26)
- [3] FiNC, <https://finc.com/>, 参照 (2019. 3. 26)
- [4] 日立製作所, 特定健診とレセプトデータから生活週間病の発症率と医療費を予測するモデルを開発, 2014.
<http://www.hitachi.co.jp/New/cnews/month/2014/03/0312.html>, 参照 (2019. 3. 26)
- [5] 金子哲夫: マルコフ決定理論入門, 槇書店, 東京, 1973.
- [6] C. C. Bennett, K. Hauser, Artificial intelligence framework for simulating clinical decision-making: A Markov decision process approach, *Artificial Intelligence in Medicine*, Vol.57, pp.9-19, 2013.
- [7] 前田康成, 山内翔, 鈴木正清, 高野賢裕, 松嶋敏泰: マルコフ決定過程を用いたヘルスケア支援に関する一考察, *バイオメディカル・ファジィ・システム学会誌*, Vol.19, No.2, pp.21-27, 2017.
- [8] A.P. Dempster, N.M. Laird, and D.B. Rubin, : Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, Vol.39, No.1, pp.1-38, 1977.
- [9] 国立がん研究センター, 肥満度 (BMI) とがん全体の発生率との関係について,
<https://epi.ncc.go.jp/jphc/outcome/266.html>, 参照 (2019. 3. 28)
- [10] 吉池信男, 日本人における肥満の疫学, 第124回日本医学会シンポジウム, 2003.
- [11] 厚生労働省, 新医薬品の薬価算定方式, 2012.
<https://www.mhlw.go.jp/stf/shingi/2r98520000027ha4-att/2r98520000027p4k.pdf>, 参照 (2019. 3. 28)
- [12] 進行するがん, ステージIVではIIIと比べ治療費に大差が出る, 週刊ポスト, 2019.
https://www.news-postseven.com/archives/20190206_862942.html, 参照 (2019. 3. 28)

付録

本付録では、4.2節で結果のみ紹介した $Q_1(\theta^0, \theta)$, $Q_2(\theta^0, \theta)$, $Q_3(\theta^0, \theta)$, $Q_4(\theta^0, \theta)$ の最大化の詳細を説明する。最初に $Q_1(\theta^0, \theta)$ の最大化を説明する。

$$\begin{aligned}
Q_1(\theta^0, \theta) &= \sum_X \Pr(X|Y, Z, \theta^0) \sum_{i=1}^{L_u} \log \Pr(X_{i,1}|\theta) \\
&= \sum_{j=1}^{|S|} \left(\sum_{i=1}^{L_u} \sum_{X, X_{i,1}=s_j} \prod_{k=1}^{L_u} \Pr(X_k|Y_k, Z_k, \theta^0) \right) \log \Pr(s_j|\theta) \\
&= \sum_{j=1}^{|S|} d_j \log \Pr(s_j|\theta), \tag{61}
\end{aligned}$$

ただし、

$$d_j = \sum_{i=1}^{L_u} \Pr(X_{i,1} = s_j | Y_i, Z_i, \theta^0). \tag{62}$$

$f = \sum_{j=1}^{|S|} d_j \log \Pr(s_j|\theta)$ を $\sum_{j=1}^{|S|} \Pr(s_j|\theta) = 1$ の制約のもと

とで最大化する $\Pr(s_j|\theta)$ をラグランジュの未定乗数法によって求める。ラグランジュの未定乗数法より、

$$L = f - \lambda \left(\sum_{j=1}^{|S|} \Pr(s_j|\theta) - 1 \right), \tag{63}$$

として、 $\Pr(s_j|\theta)$ で偏微分して0とおくと以下のようになる。

$$\frac{\partial L}{\partial \Pr(s_j|\theta)} = \frac{\partial f}{\partial \Pr(s_j|\theta)} - \lambda = \frac{d_j}{\Pr(s_j|\theta)} - \lambda = 0. \tag{64}$$

$$\lambda \Pr(s_j|\theta) = d_j. \tag{65}$$

式(65)の両辺を j について(健康状態集合の全要素について) 足し合わせて制約を考慮すると以下のようになる。

$$\lambda = \sum_{j=1}^{|S|} d_j. \tag{66}$$

よって、 $Q_1(\theta^0, \theta)$ を最大化する $\Pr(s_j|\theta)$ の推定値 $\widehat{\Pr}(s_j|\theta)$ は次式のとおりである。

$$\begin{aligned}
\widehat{\Pr}(s_j|\theta) &= \frac{d_j}{\lambda} = \frac{d_j}{\sum_{j=1}^{|S|} d_j} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{L_u} \Pr(X_{i,1} = s_j | Y_i, Z_i, \theta^0)}{\sum_{j=1}^{|S|} \sum_{i=1}^{L_u} \Pr(X_{i,1} = s_j | Y_i, Z_i, \theta^0)} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{L_u} \Pr(X_{i,1} = s_j | Y_i, Z_i, \theta^0)}{L_u}. \tag{67}
\end{aligned}$$

式(67)の分子は L_u 本の不完全データにおいて初期の健康状態が s_j である頻度の期待値に相当する。ただし、 $\Pr(X_{i,1} = s_j | Y_i, Z_i, \theta^0)$ は Y_i (i 本目の不完全データの選択系列) と Z_i (i 本目の不完全データの観測系列) を観測したもとの初期の健康状態 s_j の事後確率に相当する。

次に $Q_2(\theta^0, \theta)$ の最大化を説明する。

$$\begin{aligned}
Q_2(\theta^0, \theta) &= \sum_X \Pr(X|Y, Z, \theta^0) \\
&\quad \sum_{i=1}^{L_u} \sum_{j=1}^T \sum_{k=1}^N \log \Pr(Z_{i,j,k} | X_{i,j}, Y_{i,j,k}, \theta) \\
&= \sum_{l_1=1}^{|S|} \sum_{l_2=1}^{|C|} \sum_{l_3=1}^{|O|} \\
&\quad \left(\sum_{i=1}^{L_u} \sum_{j=1}^T \sum_{k=1}^N \delta(Y_{i,j,k}, Z_{i,j,k}, c_{l_2}, o_{l_3}) \right. \\
&\quad \left. \sum_{X, X_{i,j}=s_{l_1}} \prod_{l_4=1}^{L_u} \Pr(X_{l_4} | Y_{l_4}, Z_{l_4}, \theta^0) \right) \\
&\quad \log \Pr(o_{l_3} | s_{l_1}, c_{l_2}, \theta) \\
&= \sum_{l_1=1}^{|S|} \sum_{l_2=1}^{|C|} \sum_{l_3=1}^{|O|} \\
&\quad \left(\sum_{i=1}^{L_u} \sum_{j=1}^T \sum_{k=1}^N \delta(Y_{i,j,k}, Z_{i,j,k}, c_{l_2}, o_{l_3}) \right. \\
&\quad \left. \Pr(X_{i,j} = s_{l_1} | Y_i, Z_i, \theta^0) \right) \\
&\quad \log \Pr(o_{l_3} | s_{l_1}, c_{l_2}, \theta) \\
&= \sum_{l_1=1}^{|S|} \sum_{l_2=1}^{|C|} \left(\sum_{l_3=1}^{|O|} d_{l_1 l_2 l_3} \log \Pr(o_{l_3} | s_{l_1}, c_{l_2}, \theta) \right), \tag{68}
\end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned}
&\delta(Y_{i,j,k}, Z_{i,j,k}, c_{l_2}, o_{l_3}) \\
&= \begin{cases} 1, & Y_{i,j,k} = c_{l_2} \text{かつ} Z_{i,j,k} = o_{l_3}; \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}, \tag{69}
\end{aligned}$$

$$d_{l_1 l_2 l_3} = \sum_{i=1}^{L_u} \sum_{j=1}^T \sum_{k=1}^N \delta(Y_{i,j,k}, Z_{i,j,k}, c_{l_2}, o_{l_3}) \Pr(X_{i,j} = s_{l_1} | Y_i, Z_i, \theta^0). \tag{70}$$

$\sum_{l_3=1}^{|O|} \Pr(o_{l_3} | s_{l_1}, c_{l_2}, \theta) = 1$ の制約のもとで、各 (l_1, l_2) の組に対して $f = \sum_{l_3=1}^{|O|} d_{l_1 l_2 l_3} \log \Pr(o_{l_3} | s_{l_1}, c_{l_2}, \theta)$ を最大化する $\Pr(o_{l_3} | s_{l_1}, c_{l_2}, \theta)$ をラグランジュの未定乗数法によって求める。ラグランジュの未定乗数法より、

$$L = f - \lambda \left(\sum_{l_3=1}^{|O|} \Pr(o_{l_3} | s_{l_1}, c_{l_2}, \theta) - 1 \right), \tag{71}$$

として、 $\Pr(o_{l_3} | s_{l_1}, c_{l_2}, \theta)$ で偏微分して0とおくと以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \Pr(o_{l_3} | s_{l_1}, c_{l_2}, \theta)} &= \frac{\partial f}{\partial \Pr(o_{l_3} | s_{l_1}, c_{l_2}, \theta)} - \lambda \\
&= \frac{d_{l_1 l_2 l_3}}{\Pr(o_{l_3} | s_{l_1}, c_{l_2}, \theta)} - \lambda = 0. \tag{72}
\end{aligned}$$

$$\lambda \Pr(o_{l_3} | s_{l_1}, c_{l_2}, \theta) = d_{l_1 l_2 l_3}. \tag{73}$$

式(73)の両辺を l_3 について(検査結果の観測値集合の全要素について) 足し合わせて制約を考慮すると以下のようになる。

$$\lambda = \sum_{l_3=1}^{|O|} d_{l_1 l_2 l_3}. \tag{74}$$

よって、 $Q_2(\theta^0, \theta)$ を最大化する $\Pr(o_{l_3}|s_{l_1}, c_{l_2}, \theta)$ の推定値 $\widehat{\Pr}(o_{l_3}|s_{l_1}, c_{l_2}, \theta)$ は次式のとおりである。

$$\widehat{\Pr}(o_{l_3}|s_{l_1}, c_{l_2}, \theta) = \frac{d_{l_1 l_2 l_3}}{\lambda} = \frac{d_{l_1 l_2 l_3}}{\sum_{l_3=1}^{|O|} d_{l_1 l_2 l_3}} = \frac{\sum_{i=1}^{L_u} \sum_{j=1}^T \sum_{k=1}^N \delta(Y_{i,j,k}, Z_{i,j,k}, c_{l_2}, o_{l_3}) \Pr(X_{i,j} = s_{l_1} | Y_i, Z_i, \theta^0)}{\sum_{l_3=1}^{|O|} \sum_{i=1}^{L_u} \sum_{j=1}^T \sum_{k=1}^N \delta(Y_{i,j,k}, Z_{i,j,k}, c_{l_2}, o_{l_3}) \Pr(X_{i,j} = s_{l_1} | Y_i, Z_i, \theta^0)}. \quad (75)$$

式(75)の分子は L_u 本の不完全データにおいて健康状態が s_{l_1} の顧客に対して検査項目 c_{l_2} を実施して検査結果 o_{l_3} を観測した頻度の期待値である。分母は L_u 本の不完全データにおいて健康状態が s_{l_1} の顧客に対して検査項目 c_{l_2} を実施した頻度の期待値である。

次に $Q_3(\theta^0, \theta)$ の最大化を説明する。

$$\begin{aligned} Q_3(\theta^0, \theta) &= \sum_X \Pr(X|Y, Z, \theta^0) \\ &\quad \sum_{i=1}^{L_u} \sum_{j=1}^T \log \Pr(X_{i,j+1} | X_{i,j}, Y_{i,j}, Z_{i,j}, \theta) \\ &= \sum_{k_1=1}^{|S|} \sum_{k_2=1}^{|M|} \sum_{k_3=1}^{|S|} \\ &\quad \left(\sum_{i=1}^{L_u} \sum_{j=1}^T \delta(Y_{i,j}, Z_{i,j}, m_{k_2}) \right. \\ &\quad \left. \sum_{X, X_{i,j}=s_{k_1}, X_{i,j+1}=s_{k_3}} \prod_{k_4=1}^{L_u} \Pr(X_{k_4} | Y_{k_4}, Z_{k_4}, \theta^0) \right) \\ &\quad \log \Pr(s_{k_3} | s_{k_1}, m_{k_2}, \theta) \\ &= \sum_{k_1=1}^{|S|} \sum_{k_2=1}^{|M|} \sum_{k_3=1}^{|S|} \\ &\quad \left(\sum_{i=1}^{L_u} \sum_{j=1}^T \delta(Y_{i,j}, Z_{i,j}, m_{k_2}) \right. \\ &\quad \left. \Pr(X_{i,j} = s_{k_1}, X_{i,j+1} = s_{k_3} | Y_i, Z_i, \theta^0) \right) \\ &\quad \log \Pr(s_{k_3} | s_{k_1}, m_{k_2}, \theta) \\ &= \sum_{k_1=1}^{|S|} \sum_{k_2=1}^{|M|} \\ &\quad \left(\sum_{k_3=1}^{|S|} d_{k_1 k_2 k_3} \log \Pr(s_{k_3} | s_{k_1}, m_{k_2}, \theta) \right), \quad (76) \end{aligned}$$

ただし、

$$\delta(Y_{i,j}, Z_{i,j}, m_{k_2}) = \begin{cases} 1, & Y_{i,j}, Z_{i,j} = m_{k_2}; \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}, \quad (77)$$

$$d_{k_1 k_2 k_3} = \sum_{i=1}^{L_u} \sum_{j=1}^T \delta(Y_{i,j}, Z_{i,j}, m_{k_2}) \Pr(X_{i,j} = s_{k_1}, X_{i,j+1} = s_{k_3} | Y_i, Z_i, \theta^0). \quad (78)$$

$f = \sum_{k_3=1}^{|S|} d_{k_1 k_2 k_3} \log \Pr(s_{k_3} | s_{k_1}, m_{k_2}, \theta)$ を各 (k_1, k_2)

の組に対して、 $\sum_{k_3=1}^{|S|} \Pr(s_{k_3} | s_{k_1}, m_{k_2}, \theta) = 1$ の制約のもとで最大化する $\Pr(s_{k_3} | s_{k_1}, m_{k_2}, \theta)$ をラグランジュの未定乗数法によって求める。ラグランジュの未定乗数法より、

$$L = f - \lambda \left(\sum_{k_3=1}^{|S|} \Pr(s_{k_3} | s_{k_1}, m_{k_2}, \theta) - 1 \right), \quad (79)$$

として、 $\Pr(s_{k_3} | s_{k_1}, m_{k_2}, \theta)$ で偏微分して0とおくと以下のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \Pr(s_{k_3} | s_{k_1}, m_{k_2}, \theta)} &= \frac{\partial f}{\partial \Pr(s_{k_3} | s_{k_1}, m_{k_2}, \theta)} - \lambda \\ &= \frac{d_{k_1 k_2 k_3}}{\Pr(s_{k_3} | s_{k_1}, m_{k_2}, \theta)} - \lambda = 0. \quad (80) \end{aligned}$$

$$\lambda \Pr(s_{k_3} | s_{k_1}, m_{k_2}, \theta) = d_{k_1 k_2 k_3}. \quad (81)$$

式(81)の両辺を k_3 について(健康状態集合の全要素について)足し合わせて制約を考慮すると以下のようになる。

$$\lambda = \sum_{k_3=1}^{|S|} d_{k_1 k_2 k_3}. \quad (82)$$

よって、 $Q_3(\theta^0, \theta)$ を最大化する $\Pr(s_{k_3} | s_{k_1}, m_{k_2}, \theta)$ の推定値 $\widehat{\Pr}(s_{k_3} | s_{k_1}, m_{k_2}, \theta)$ は次式のとおりである。

$$\begin{aligned} \widehat{\Pr}(s_{k_3} | s_{k_1}, m_{k_2}, \theta) &= \frac{d_{k_1 k_2 k_3}}{\lambda} = \frac{d_{k_1 k_2 k_3}}{\sum_{k_3=1}^{|S|} d_{k_1 k_2 k_3}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{L_u} \sum_{j=1}^T \delta(Y_{i,j}, Z_{i,j}, m_{k_2}) \Pr(X_{i,j} = s_{k_1}, X_{i,j+1} = s_{k_3} | Y_i, Z_i, \theta^0)}{\sum_{k_3=1}^{|S|} \sum_{i=1}^{L_u} \sum_{j=1}^T \delta(Y_{i,j}, Z_{i,j}, m_{k_2}) \Pr(X_{i,j} = s_{k_1}, X_{i,j+1} = s_{k_3} | Y_i, Z_i, \theta^0)}. \quad (83) \end{aligned}$$

式(83)の分子は L_u 本の不完全データにおいて健康状態が s_{k_1} の顧客に対してアドバイス m_{k_2} を選択し、アドバイス m_{k_2} 実行後に健康状態が s_{k_3} に遷移した頻度の期待値である。分母は L_u 本の不完全データにおいて健康状態が s_{k_1} の顧客に対してアドバイス m_{k_2} を選択した頻度の期待値である。

次に $Q_4(\theta^0, \theta)$ の最大化を説明する。

$$\begin{aligned} Q_4(\theta^0, \theta) &= \sum_X \Pr(X|Y, Z, \theta^0) \\ &\quad \sum_{i=1}^{L_u} \sum_{j=1}^T \log \Pr(Z_{i,j}, Z_{i,j+1} | X_{i,j+1}, \theta) \\ &= \sum_{k_1=1}^{|S|} \sum_{k_2=1}^{|E|} \\ &\quad \left(\sum_{i=1}^{L_u} \sum_{j=1}^T \delta(Z_{i,j}, Z_{i,j+1}, e_{k_2}) \right. \\ &\quad \left. \sum_{X, X_{i,j+1}=s_{k_1}} \prod_{k_3=1}^{L_u} \Pr(X_{k_3} | Y_{k_3}, Z_{k_3}, \theta^0) \right) \\ &\quad \log \Pr(e_{k_2} | s_{k_1}, \theta) \\ &= \sum_{k_1=1}^{|S|} \sum_{k_2=1}^{|E|} \\ &\quad \left(\sum_{i=1}^{L_u} \sum_{j=1}^T \delta(Z_{i,j}, Z_{i,j+1}, e_{k_2}) \right. \\ &\quad \left. \Pr(X_{i,j+1} = s_{k_1} | Y_i, Z_i, \theta^0) \right) \\ &\quad \log \Pr(e_{k_2} | s_{k_1}, \theta) \\ &= \sum_{k_1=1}^{|S|} \end{aligned}$$

$$\left(\sum_{k_2=1}^{|E|} d_{k_1 k_2} \log \Pr(e_{k_2} | s_{k_1}, \theta) \right), \quad (84)$$

ただし,

$$\delta(Z_{i,j,N+1}, e_{k_2}) = \begin{cases} 1, & Z_{i,j,N+1} = e_{k_2}; \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}, \quad (85)$$

$$d_{k_1 k_2} = \frac{\sum_{i=1}^{L_u} \sum_{j=1}^T \delta(Z_{i,j,N+1}, e_{k_2})}{\Pr(X_{i,j+1} = s_{k_1} | Y_i, Z_i, \theta^0)}. \quad (86)$$

$\sum_{k_2=1}^{|E|} \Pr(e_{k_2} | s_{k_1}, \theta) = 1$ の制約のもとで、各 k_1 に対して

$f = \sum_{k_2=1}^{|E|} d_{k_1 k_2} \log \Pr(e_{k_2} | s_{k_1}, \theta)$ を最大化する

$\Pr(e_{k_2} | s_{k_1}, \theta)$ をラグランジュの未定乗数法によって求める。ラグランジュの未定乗数法より、

$$L = f - \lambda \left(\sum_{k_2=1}^{|E|} \Pr(e_{k_2} | s_{k_1}, \theta) - 1 \right), \quad (87)$$

として、 $\Pr(e_{k_2} | s_{k_1}, \theta)$ で偏微分して0とおくと以下のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \Pr(e_{k_2} | s_{k_1}, \theta)} &= \frac{\partial f}{\partial \Pr(e_{k_2} | s_{k_1}, \theta)} - \lambda \\ &= \frac{d_{k_1 k_2}}{\Pr(e_{k_2} | s_{k_1}, \theta)} - \lambda = 0. \end{aligned} \quad (88)$$

$$\lambda \Pr(e_{k_2} | s_{k_1}, \theta) = d_{k_1 k_2}. \quad (89)$$

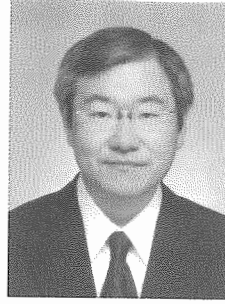
式(89)の両辺を k_2 について(イベント集合の全要素について)足し合わせて制約を考慮すると以下のようになる。

$$\lambda = \sum_{k_2=1}^{|E|} d_{k_1 k_2}. \quad (90)$$

よって、 $Q_4(\theta^0, \theta)$ を最大化する $\Pr(e_{k_2} | s_{k_1}, \theta)$ の推定値 $\widehat{\Pr}(e_{k_2} | s_{k_1}, \theta)$ は次式のとおりである。

$$\begin{aligned} \widehat{\Pr}(e_{k_2} | s_{k_1}, \theta) &= \frac{d_{k_1 k_2}}{\lambda} = \frac{d_{k_1 k_2}}{\sum_{k_2=1}^{|E|} d_{k_1 k_2}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{L_u} \sum_{j=1}^T \delta(Z_{i,j,N+1}, e_{k_2})}{\sum_{k_2=1}^{|E|} \sum_{i=1}^{L_u} \sum_{j=1}^T \delta(Z_{i,j,N+1}, e_{k_2})} \cdot \frac{\Pr(X_{i,j+1} = s_{k_1} | Y_i, Z_i, \theta^0)}{\Pr(X_{i,j+1} = s_{k_1} | Y_i, Z_i, \theta^0)}. \end{aligned} \quad (91)$$

式(91)の分子は L_u 本の不完全データにおいてアドバイス実行後の健康状態が s_{k_1} の顧客に対してイベント e_{k_2} が生じた頻度の期待値である。分母は L_u 本の不完全データにおいてアドバイス実行後の顧客の健康状態が s_{k_1} である頻度の期待値に相当する。



前田康成 (まえだやすなり)

平成7年早大・理工卒。平成9年同大学院理工学研究科修士課程修了。日本電信電話(株)、東日本電信電話(株)、北見工大助手、助教、准教授を経て平成28年同大学教授、現在に至る。博士(工学)。統計的決定理論の学習問題への応用に関する研究に従事。電子情報通信学会等各会員。