バイオメディカル・ファジィ・システム学会誌　Vol.20, No.1, pp.37－46（2018）
Copyright©2018 Biomedical Fuzzy Systems Association

[Original article]

（2018 年 3 月 19 日　Accepted）

推薦システムの新規顧客問題における半教師付き学習

前田　康成[1]，山内　翔[1]，鈴木　正清[1]，松嶋　敏泰[2]

1）北見工業大学・地域未来デザイン工学科　　2）早稲田大学・応用数理学科

要約：　従来研究では，推薦システムの新規顧客問題を表現するための確率モデルとしてマルコフ決定過程が採用され，マルコフ決定過程の真のパラメータが既知の仮定のもとで検討されている．本研究では，より現実に近い真のパラメータが未知の仮定のもとで推薦システムの新規顧客問題における半教師付き学習方法を提案する．学習データは完全データと不完全データによって構成される．提案方法では EM アルゴリズム（expectation-maximization algorithm）を用いる．数例のシミュレーションによって提案方法の有効性を示す．

キーワード：推薦システム，マルコフ決定過程，新規顧客問題，半教師付き学習

Semi-supervised Learning for a New Customer Problem in Recommender System

Yasunari MAEDA[1], Sho YAMAUCHI[1], Masakiyo SUZUKI[1], Toshiyasu MATSUSHIMA[2]

1) School of Regional Innovation and Social Design Engineering, Kitami Institute of Technology
2) Department of Applied Mathematics, Waseda University

Abstract: *Markov decision processes(MDP) are applied to a new customer problem of recommender system in previous research. In the previous research the true parameters of MDP are known. In this research we propose a semi-supervised learning method for the new customer problem of recommender system under the condition that the true parameters of MDP are unknown. Learning data consist of complete data and incomplete data. In the proposed method EM(expectation-maximization) algorithm is used. The effectiveness of the proposed method is shown by some simulations.*

Keywords: *recommender system, Markov decision processes, new customer problem, semi-supervised learning*

Yasunari MAEDA
165 Koen-cho, Kitami-shi, Hokkaido, 090-8507, Japan
Phone:　+81-157-26-9328,　Fax: +81-157-26-9344,　E-mail: maedaya@mail.kitami-it.ac.jp

1. はじめに

本研究では，インターネット上の通信販売サイトなどにおいて顧客に商品を推薦する際に利用されている推薦システム[1]を扱う．従来研究[2][3][4][5][6]では推薦システムを表現するための確率モデルとしてマルコフ決定過程（MDP）[7]を採用しており，本研究でもMDPを採用する．

従来研究[4][5]では，商品の好みなどが似た顧客が同一クラスに属すると仮定し，クラス未知の顧客に対する商品の推薦方法が検討されている．これらの従来研究では，推薦商品に対する顧客の反応（推薦および購買履歴）から当該顧客の未知クラスについて学習するが，当該顧客に関する情報収集を目的とした質問などは検討していない．履歴情報がない新規の顧客に対して質問などによって当該新規顧客に関する情報を収集する問題設定は新規顧客問題[1]と呼ばれている．従来研究[6]では，新規顧客問題を研究対象とし，統計的決定理論[8]に基づいて期待総利得（総売上高の期待値）を最大化するための新規顧客に対する質問および推薦方法を検討している．しかし，従来研究[6]では各種確率分布を支配する真のパラメータが既知と仮定されている．

そこで，本研究ではより現実に近い真のパラメータが未知の場合の新規顧客問題を対象にする．顧客のクラスも既知の完全データと顧客のクラスは未知の不完全データからなる学習データ（質問および回答履歴と推薦および購買履歴）を受け取ったもとで未知パラメータを学習する半教師付き学習方法を検討する．EMアルゴリズム（expectation-maximization algorithm）[9]を用いて半教師付き学習を実施し，新規顧客に対する質問および商品の推薦については真のパラメータが既知の場合の従来研究[6]で提案されている質問および推薦方法にEMアルゴリズムによる学習結果（真のパラメータの推定結果）を適用する．

以下，2章で本研究で使用する各種記号などについて説明し，3章で真のパラメータが既知の場合の従来研究[6]の質問および推薦方法を説明する．4章でEMアルゴリズムを用いた半教師付き学習方法を提案し，5章で提案方法の有効性をシミュレーションによって確認し，最後に6章でまとめと今後の課題について述べる．

2. 準備

ここでは，本研究で用いる各種記号などを説明する．なお，各種記号などの多くは従来研究[6]と共通である．

c_i，$c_i \in C$は顧客のクラスを示し，$C = \{c_1, c_2, \dots, c_{|C|}\}$は顧客クラスの集合である．$q_i$，$q_i \in Q$は新規顧客に関する情報を入手するための質問を示し，$Q = \{q_1, q_2, \dots, q_{|Q|}\}$は質問集合である．$a_i$，$a_i \in A$は質問に対する回答を示し，$A = \{a_1, a_2, \dots, a_{|A|}\}$は回答集合である．$m_i$，$m_i \in M$は推薦対象の商品を示し，$M = \{m_1, m_2, \dots, m_{|M|}\}$は商品集合である．本研究では，従来研究と同様にMDPを用いてモデル化し，質問q_iの実施および商品m_iの推薦がMDPにおける行動選択に相当する．n_i，$n_i \in N$は推薦に対する顧客の反応を示し，$N = \{n_1, n_2, \dots, n_{|N|}\}$は反応集合である．$1 \le i \le |M|$では$n_i = m_i$であり，顧客の反応が商品$m_i$の購入に相当する．$|N| = |M| + 1$であり，$n_{|M|+1}$は顧客が何も購入しなかったことを示す．$r(n_i)$，$1 \le i \le |M|$は商品$m_i$の売上高を示し，顧客が何も購入しなかった場合には$r(n_{|M|+1}) = 0$である．$r(n_i)$はMDPの利得に相当する．本研究では新規顧客に対して$\tilde{T}$回の質問（長さ$\tilde{T}$期の質問期間）後にT回の商品の推薦（長さT期の推薦期間）を行う，$\tilde{T} + T$期間のMDP問題を扱う．質問期間には利得は発生しない．

y_tはMDPにおけるt期の行動を示し，質問期間（$1 \le t \le \tilde{T}$）にはt回目の質問$y_t \in Q$，推薦期間（$\tilde{T} + 1 \le t \le \tilde{T} + T$）には$t - \tilde{T}$回目の商品の推薦$y_t \in M$に相当する．なお，MDP問題としては$\tilde{T} + T$期間の問題設定になるが，実際の推薦システムとしては新規顧客のアクセス時に$\tilde{T}$回の質問と1回目の推薦（$y_{\tilde{T}+1}$）を実施し，当該顧客の2回目以降のアクセス時に2回目以降の推薦（$y_{\tilde{T}+2}$以降）を実施する．

z_tはMDPにおける推薦システムの行動y_tに対する顧客の回答または反応を示す．質問期間（$1 \le t \le \tilde{T}$）にはt回目の質問$y_t \in Q$に対する回答$z_t \in A$，推薦期間（$\tilde{T} + 1 \le t \le \tilde{T} + T$）には$t - \tilde{T}$回目の商品の推薦$y_t \in M$に対する反応$z_t \in N$に相当する．

w，$w \in C$は新規顧客のクラスを示し，未知である．クラスの事前確率$p(w)$は既知とする．(y_{t-1}, z_{t-1})はt回目（$t \ge \tilde{T} + 2$）の推薦を受ける際の顧客の状態で，MDPのt期の状態に相当する．状態は1期前の推薦商品と顧客の反応で構成される．上記の状態定義を採用しているため，厳密には質問期間および1回目の推薦の際に状態が未定義になるが，本研究でも利用する従来研究[6]で提案された動的計画法（DP）を用いるアルゴリズムでは系列$y^{t-1}z^{t-1} = y_1 z_1 \cdots y_{t-1} z_{t-1}$を計算に用いるので状態が未定義の期が存在しても問題はない．

$p(w|\theta^*)$は顧客クラスの生起確率である．$p(a_k|q_i, c_j, \theta^*)$はクラス$c_j$に属する顧客が質問$q_i$に対し

て回答a_kを返す確率を示す．$p(n_k|m_i, c_j, \theta^*)$は1回目の推薦（$t = \tilde{T} + 1$）において，クラス$c_j$に属する顧客が商品$m_i$を推薦されたときに反応$n_k$を返す確率である．$p(n_o|m_i, n_j, m_k, c_l, \theta^*)$は2回目以降の推薦（$t \geq \tilde{T} + 2$）において，クラス$c_l$に属する顧客が1期前の推薦と反応が$m_i$と$n_j$のもとで商品$m_k$を推薦されたときに反応$n_o$を返す確率を示す．$\theta^*$は各種確率分布を支配する真のパラメータで本研究では未知である．

3. 真のパラメータθ^*既知の従来研究における質問および推薦方法

各種確率分布を支配する真のパラメータθ^*既知の場合の新規顧客問題を検討した従来研究[6]におけるベイズ最適な質問および推薦方法を以下に掲載する．本研究でも，半教師付き学習後のパラメータの推定値を代入することによって，当該質問よび推薦方法を利用する．

当該質問および推薦方法では動的計画法（DP）を用いて，$\tilde{T} + T$期目から遡りながら計算して，ベイズ最適な質問および推薦を算出する．

$\tilde{T} + T$期目のすべての遷移系列$y^{\tilde{T}+T-1}z^{\tilde{T}+T-1}$に対する処理は以下のとおりである．

$$V(y^{\tilde{T}+T-1}z^{\tilde{T}+T-1}, \tilde{T} + T) = \max_{y_{\tilde{T}+T} \in M} \sum_{z_{\tilde{T}+T} \in N} p(z_{\tilde{T}+T}|y^{\tilde{T}+T-1}z^{\tilde{T}+T-1}, y_{\tilde{T}+T}, \theta^*) r(z_{\tilde{T}+T}), \quad (1)$$

ただし，

$$p(z_{\tilde{T}+T}|y^{\tilde{T}+T-1}z^{\tilde{T}+T-1}, y_{\tilde{T}+T}, \theta^*) = \sum_{w \in C} p(w|y^{\tilde{T}+T-1}z^{\tilde{T}+T-1}) p(z_{\tilde{T}+T}|y_{\tilde{T}+T-1}, z_{\tilde{T}+T-1}, y_{\tilde{T}+T}, w, \theta^*), \quad (2)$$

$$p(w|y^{\tilde{T}+T-1}z^{\tilde{T}+T-1}) p(w|y^{\tilde{T}+T-2}z^{\tilde{T}+T-2}) = \frac{p(z_{\tilde{T}+T-1}|y_{\tilde{T}+T-2}, z_{\tilde{T}+T-2}, y_{\tilde{T}+T-1}, w, \theta^*)}{\sum_{w' \in C} p(w'|y^{\tilde{T}+T-2}z^{\tilde{T}+T-2}) p(z_{\tilde{T}+T-1}|y_{\tilde{T}+T-2}, z_{\tilde{T}+T-2}, y_{\tilde{T}+T-1}, w', \theta^*)}, \quad (3)$$

$p(z_{\tilde{T}+T}|y^{\tilde{T}+T-1}z^{\tilde{T}+T-1}, y_{\tilde{T}+T}, \theta^*)$は顧客の反応確率の事後確率$p(w|y^{\tilde{T}+T-1}z^{\tilde{T}+T-1})$による期待値で，$V(y^{\tilde{T}+T-1}z^{\tilde{T}+T-1}, \tilde{T} + T)$は最後の期の期待利得の最大値である．式(1)の右辺を最大化する行動$y_{\tilde{T}+T}$がベイズ最適な最後の推薦商品である．

t期目（$\tilde{T} + 2 \leq t \leq \tilde{T} + T - 1$）のすべての遷移系列$y^{t-1}z^{t-1}$に対する処理は以下のとおりである．$\tilde{T} + 2 \leq t \leq \tilde{T} + T - 1$は2回目以降の推薦の期に対応する．

$$V(y^{t-1}z^{t-1}, t) = \max_{y_t \in M} \sum_{z_t \in N} p(z_t|y^{t-1}z^{t-1}, y_t, \theta^*) \left(r(z_t) + V(y^t z^t, t + 1)\right), \quad (4)$$

ただし，

$$p(z_t|y^{t-1}z^{t-1}, y_t, \theta^*) = \sum_{w \in C} p(w|y^{t-1}z^{t-1}) p(z_t|y_{t-1}, z_{t-1}, y_t, w, \theta^*), \quad (5)$$

$\tilde{T} + 3 \leq t \leq \tilde{T} + T - 1$の場合，

$$p(w|y^{t-1}z^{t-1}) = \frac{p(w|y^{t-2}z^{t-2}) p(z_{t-1}|y_{t-2}, z_{t-2}, y_{t-1}, w, \theta^*)}{\sum_{w' \in C} p(w'|y^{t-2}z^{t-2}) p(z_{t-1}|y_{t-2}, z_{t-2}, y_{t-1}, w', \theta^*)}, \quad (6)$$

$t = \tilde{T} + 2$の場合，

$$p(w|y^{t-1}z^{t-1}) = \frac{p(w|y^{t-2}z^{t-2}) p(z_{t-1}|y_{t-1}, w, \theta^*)}{\sum_{w' \in C} p(w'|y^{t-2}z^{t-2}) p(z_{t-1}|y_{t-1}, w', \theta^*)}, \quad (7)$$

$V(y^{t-1}z^{t-1}, t)$はt期以降の期待総利得の最大値である．式(4)の右辺を最大化する行動y_tがベイズ最適なt期の推薦商品である．

t期目（$t = \tilde{T} + 1$）のすべての遷移系列$y^{t-1}z^{t-1}$に対する処理は以下のとおりである．$t = \tilde{T} + 1$は1回目の推薦の期に対応する．

$$V(y^{t-1}z^{t-1}, t) = \max_{y_t \in M} \sum_{z_t \in N} p(z_t|y^{t-1}z^{t-1}, y_t, \theta^*) \left(r(z_t) + V(y^t z^t, t + 1)\right), \quad (8)$$

ただし，

$$p(z_t|y^{t-1}z^{t-1}, y_t, \theta^*) = \sum_{w \in C} p(w|y^{t-1}z^{t-1}) p(z_t|y_t, w, \theta^*), \quad (9)$$

$$p(w|y^{t-1}z^{t-1}) = \frac{p(w|y^{t-2}z^{t-2}) p(z_{t-1}|y_{t-1}, w, \theta^*)}{\sum_{w' \in C} p(w'|y^{t-2}z^{t-2}) p(z_{t-1}|y_{t-1}, w', \theta^*)}, \quad (10)$$

$V(y^{t-1}z^{t-1}, t)$はt期以降の期待総利得の最大値である．式(8)の右辺を最大化する行動y_tがベイズ最適なt期の推薦商品である．

t期目（$1 \leq t \leq \tilde{T}$）のすべての遷移系列$y^{t-1}z^{t-1}$に対する処理は以下のとおりである．$1 \leq t \leq \tilde{T}$は質問期間に対応する．

$$V(y^{t-1}z^{t-1}, t) = \max_{y_t \in Q - y^{t-1}} \sum_{z_t \in A} p(z_t|y^{t-1}z^{t-1}, y_t, \theta^*) V(y^t z^t, t + 1), \quad (11)$$

ただし，

$$p(z_t|y^{t-1}z^{t-1}, y_t, \theta^*) = \sum_{w \in C} p(w|y^{t-1}z^{t-1}) p(z_t|y_t, w, \theta^*), \quad (12)$$

$$p(w|y^{t-1}z^{t-1}) = \frac{p(w|y^{t-2}z^{t-2}) p(z_{t-1}|y_{t-1}, w, \theta^*)}{\sum_{w' \in C} p(w'|y^{t-2}z^{t-2}) p(z_{t-1}|y_{t-1}, w', \theta^*)}, \quad (13)$$

$Q - y^{t-1}$は未実施の質問集合である．$V(y^{t-1}z^{t-1}, t)$は$\tilde{T} + 1$期以降（推薦期間）の期待総利得の最大値である．

式(11)の右辺を最大化する行動y_tがベイズ最適なt期の質問である.

4. EM アルゴリズムを利用した半教師付き学習方法の提案

各種確率分布を支配する真のパラメータが未知の新規顧客問題における半教師付き学習方法を，EMアルゴリズムを利用して提案する.

4.1 学習データ（学習系列）

顧客クラスが既知のL_c本の完全データの学習系列$W'Y'Z'$と，顧客クラスが未知のL_u本の不完全データの学習系列WYZを受け取ったもとで半教師付き学習を実施する．ただし,

$$W'Y'Z' = w'_1Y'_1Z'_1w'_2Y'_2Z'_2\cdots w'_{L_c}Y'_{L_c}Z'_{L_c}, \tag{14}$$

w'_i, Y'_i, Z'_iはそれぞれi本目の完全データの顧客クラス，質問および推薦商品系列，顧客の回答および反応系列で，すべて既知である.

$$Y'_i = y'_{i,1}y'_{i,2}\cdots y'_{i,\tilde{T}'_i}\cdots y'_{i,\tilde{T}'_i+T'_i}, \tag{15}$$

$\tilde{T}'_i$はi本目の完全データの質問回数，T'_iはi本目の完全データの推薦回数，$y'_{i,j}$，$1 \le j \le \tilde{T}'_i$はi本目の完全データのj回目の質問，$y'_{i,j}$，$\tilde{T}'_i + 1 \le j \le \tilde{T}'_i + T'_i$は$i$本目の完全データの$j - \tilde{T}'_i$回目の推薦商品である.

$$Z'_i = z'_{i,1}z'_{i,2}\cdots z'_{i,\tilde{T}'_i}\cdots z'_{i,\tilde{T}'_i+T'_i}, \tag{16}$$

$z'_{i,j}$，$1 \le j \le \tilde{T}'_i$はi本目の完全データのj回目の質問に対する回答，$z'_{i,j}$，$\tilde{T}'_i + 1 \le j \le \tilde{T}'_i + T'_i$は$i$本目の完全データの$j - \tilde{T}'_i$回目の推薦に対する反応である.

$$WYZ = w_1Y_1Z_1w_2Y_2Z_2\cdots w_{L_u}Y_{L_u}Z_{L_u}, \tag{17}$$

w_i, Y_i, Z_iはそれぞれi本目の不完全データの顧客クラス，質問および推薦商品系列，顧客の回答および反応系列で，顧客クラスw_iのみ未知である.

$$Y_i = y_{i,1}y_{i,2}\cdots y_{i,\tilde{T}_i}\cdots y_{i,\tilde{T}_i+T_i}, \tag{18}$$

$\tilde{T}_i$はi本目の不完全データの質問回数，T_iはi本目の不完全データの推薦回数，$y_{i,j}$，$1 \le j \le \tilde{T}_i$はi本目の不完全データのj回目の質問，$y_{i,j}$，$\tilde{T}_i + 1 \le j \le \tilde{T}_i + T_i$は$i$本目の不完全データの$j - \tilde{T}_i$回目の推薦商品である.

$$Z_i = z_{i,1}z_{i,2}\cdots z_{i,\tilde{T}_i}\cdots z_{i,\tilde{T}_i+T_i}, \tag{19}$$

$z_{i,j}$，$1 \le j \le \tilde{T}_i$はi本目の不完全データのj回目の質問に対する回答，$z_{i,j}$，$\tilde{T}_i + 1 \le j \le \tilde{T}_i + T_i$は$i$本目の不完全データの$j - \tilde{T}_i$回目の推薦に対する反応である.

4.2 EM アルゴリズムの不完全データへの適用

ここでは，不完全データに対するEMアルゴリズムの適用について説明する．完全データについては，次節で不完全データへのEMアルゴリズムの適用結果を拡張することによって対応する.

不完全データWYZの生起確率は以下のとおりである.

$$\begin{aligned} p(WYZ|\theta) &= \textstyle\prod_{i=1}^{L_u} p(w_iY_iZ_i|\theta) \\ &= \textstyle\prod_{i=1}^{L_u} p(w_i|\theta)\prod_{j=1}^{\tilde{T}_i} p\left(z_{i,j}\middle|y_{i,j},w_i,\theta\right) \\ &\quad p\left(z_{i,\tilde{T}_i+1}\middle|y_{i,\tilde{T}_i+1},w_i,\theta\right) \\ &\quad \textstyle\prod_{k=\tilde{T}_i+2}^{\tilde{T}_i+T_i} p\left(z_{i,k}\middle|y_{i,k-1},z_{i,k-1},y_{i,k},w_i,\theta\right). \end{aligned} \tag{20}$$

EMアルゴリズムにおいて最大化する$Q(\theta^0,\theta)$関数を次式に示す．次式中のθはθ^0の更新後のパラメータである.

$$\begin{aligned} Q(\theta^0,\theta) &= \textstyle\sum_W p(W|Y,Z,\theta^0)\log p(W,Y,Z|\theta) \\ &= \textstyle\sum_W p(W|Y,Z,\theta^0)\sum_{i=1}^{L_u}\log p(w_iY_iZ_i|\theta) \\ &= \textstyle\sum_W p(W|Y,Z,\theta^0)\sum_{i=1}^{L_u}\log p(w_i|\theta) \\ &\quad + \textstyle\sum_W p(W|Y,Z,\theta^0)\sum_{i=1}^{L_u}\sum_{j=1}^{\tilde{T}_i}\log p\left(z_{i,j}\middle|y_{i,j},w_i,\theta\right) \\ &\quad + \textstyle\sum_W p(W|Y,Z,\theta^0)\sum_{i=1}^{L_u}\log p\left(z_{i,\tilde{T}_i+1}\middle|y_{i,\tilde{T}_i+1},w_i,\theta\right) \\ &\quad + \textstyle\sum_W p(W|Y,Z,\theta^0) \\ &\qquad \textstyle\sum_{i=1}^{L_u}\sum_{j=\tilde{T}_i+2}^{\tilde{T}_i+T_i}\log p\left(z_{i,j}\middle|y_{i,j-1},z_{i,j-1},y_{i,j},w_i,\theta\right) \\ &= Q_1(\theta^0,\theta) + Q_2(\theta^0,\theta) + Q_3(\theta^0,\theta) + Q_4(\theta^0,\theta), \end{aligned} \tag{21}$$

ただし,

$$Q_1(\theta^0,\theta) = \textstyle\sum_W p(W|Y,Z,\theta^0)\sum_{i=1}^{L_u}\log p(w_i|\theta), \tag{22}$$

$$\begin{aligned} Q_2(\theta^0,\theta) &= \textstyle\sum_W p(W|Y,Z,\theta^0) \\ &\quad \textstyle\sum_{i=1}^{L_u}\sum_{j=1}^{\tilde{T}_i}\log p\left(z_{i,j}\middle|y_{i,j},w_i,\theta\right), \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} Q_3(\theta^0,\theta) &= \textstyle\sum_W p(W|Y,Z,\theta^0) \\ &\quad \textstyle\sum_{i=1}^{L_u}\log p\left(z_{i,\tilde{T}_i+1}\middle|y_{i,\tilde{T}_i+1},w_i,\theta\right), \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} Q_4(\theta^0,\theta) &= \textstyle\sum_W p(W|Y,Z,\theta^0)\sum_{i=1}^{L_u}\sum_{j=\tilde{T}_i+2}^{\tilde{T}_i+T_i} \\ &\quad \log p\left(z_{i,j}\middle|y_{i,j-1},z_{i,j-1},y_{i,j},w_i,\theta\right). \end{aligned} \tag{25}$$

以下では$Q_1(\theta^0,\theta)$，$Q_2(\theta^0,\theta)$，$Q_3(\theta^0,\theta)$，$Q_4(\theta^0,\theta)$のそれぞれを最大化する．最初に$Q_1(\theta^0,\theta)$の最大化を説明する.

$$\begin{aligned} Q_1(\theta^0,\theta) &= \textstyle\sum_W p(W|Y,Z,\theta^0)\sum_{i=1}^{L_u}\log p(w_i|\theta) \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{|C|}\left(\sum_{i=1}^{L_u}\sum_{W,w_i=c_j}\right. \\ &\qquad \left.\textstyle\prod_{k=1}^{L_u} p(w_k|Y_k,Z_k,\theta^0)\right)\log p(c_j|\theta) \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{|C|}\sum_{i=1}^{L_u} p(c_j|Y_i,Z_i,\theta^0)\log p(c_j|\theta) \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{|C|} d_j \log p(c_j|\theta), \tag{26}$$

ただし,

$$d_j = \sum_{i=1}^{L_u} p(c_j|Y_i, Z_i, \theta^0). \tag{27}$$

$\sum_{j=1}^{|C|} p(c_j|\theta) = 1$の制約のもとで，$f = \sum_{j=1}^{|C|} d_j \log p(c_j|\theta)$を最大化する$p(c_j|\theta)$をラグランジュの未定乗数法によって求める．ラグランジュの未定乗数法より,

$$L = f - \lambda\left(\sum_{j=1}^{|C|} p(c_j|\theta) - 1\right), \tag{28}$$

として，$p(c_j|\theta)$で偏微分して0とおくと以下のようになる.

$$\frac{\partial L}{\partial p(c_j|\theta)} = \frac{\partial f}{\partial p(c_j|\theta)} - \lambda = \frac{d_j}{p(c_j|\theta)} - \lambda = 0. \tag{29}$$

$$\lambda p(c_j|\theta) = d_j. \tag{30}$$

式(30)の両辺をjについて（顧客クラス集合の全要素について）足し合わせて制約を考慮すると以下のようになる.

$$\lambda = \sum_{j=1}^{|C|} d_j. \tag{31}$$

よって，$Q_1(\theta^0, \theta)$を最大化する$p(c_j|\theta)$の推定値$\hat{p}(c_j|\theta)$は次式のとおりである.

$$\hat{p}(c_j|\theta) = \frac{d_j}{\lambda} = \frac{d_j}{\sum_{j=1}^{|C|} d_j} = \frac{\sum_{i=1}^{L_u} p(c_j|Y_i, Z_i, \theta^0)}{\sum_{j=1}^{|C|}\sum_{i=1}^{L_u} p(c_j|Y_i, Z_i, \theta^0)}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{L_u} p(c_j|Y_i, Z_i, \theta^0)}{L_u}. \tag{32}$$

式(32)の分子はL_u本の不完全データにおいて顧客クラスがc_jの頻度の期待値である．ただし，$p(c_j|Y_i, Z_i, \theta^0)$は$Y_i$（$i$本目の不完全データの質問および推薦商品系列）と$Z_i$（$i$本目の不完全データの顧客の回答および反応系列）を観測したもとでの顧客クラスc_jの事後確率に相当する.

$$p(c_j|Y_i, Z_i, \theta^0)$$
$$= p(c_j|y_{i,1} \cdots y_{i,\tilde{T}_i+T_i}, z_{i,1} \cdots z_{i,\tilde{T}_i+T_i}, \theta^0), \tag{33}$$

事後確率の逐次的な更新式を以下に示す．質問期間である$1 \le k \le \tilde{T}_i$の場合には,

$$p(c_j|y_i^k, z_i^k, \theta^0)$$
$$= \frac{p(c_j|y_i^{k-1}, z_i^{k-1}, \theta^0)p(z_{i,k}|y_{i,k}, c_j, \theta^0)}{\sum_{j=1}^{|C|} p(c_j|y_i^{k-1}, z_i^{k-1}, \theta^0)p(z_{i,k}|y_{i,k}, c_j, \theta^0)}, \tag{34}$$

$$y_i^k = y_{i,1}y_{i,2} \cdots y_{i,k}, \tag{35}$$

$$z_i^k = z_{i,1}z_{i,2} \cdots z_{i,k}, \tag{36}$$

$$p(c_j|y_i^0, z_i^0, \theta^0) = p(c_j|\theta^0), \tag{37}$$

1回目の推薦（$k = \tilde{T}_i + 1$）の場合には,

$$p(c_j|y_i^k, z_i^k, \theta^0)$$
$$= \frac{p(c_j|y_i^{k-1}, z_i^{k-1}, \theta^0)p(z_{i,k}|y_{i,k}, c_j, \theta^0)}{\sum_{j=1}^{|C|} p(c_j|y_i^{k-1}, z_i^{k-1}, \theta^0)p(z_{i,k}|y_{i,k}, c_j, \theta^0)}, \tag{38}$$

2回目以降の推薦（$\tilde{T}_i + 2 \le k \le \tilde{T}_i + T_i$）の場合には,

$$p(c_j|y_i^k, z_i^k, \theta^0) =$$
$$\frac{p(c_j|y_i^{k-1}, z_i^{k-1}, \theta^0)p(z_{i,k}|y_{i,k-1}, z_{i,k-1}, y_{i,k}, c_j, \theta^0)}{\sum_{j=1}^{|C|} p(c_j|y_i^{k-1}, z_i^{k-1}, \theta^0)p(z_{i,k}|y_{i,k-1}, z_{i,k-1}, y_{i,k}, c_j, \theta^0)}. \tag{39}$$

次に$Q_2(\theta^0, \theta)$の最大化を説明する.

$$Q_2(\theta^0, \theta)$$
$$= \sum_W p(W|Y, Z, \theta^0) \sum_{i=1}^{L_u} \sum_{j=1}^{\tilde{T}_i} \log p(z_{i,j}|y_{i,j}, w_i, \theta)$$
$$= \sum_{k_1=1}^{|C|} \sum_{k_2=1}^{|Q|} \sum_{k_3=1}^{|A|} \left(\sum_{i=1}^{L_u} \sum_{j=1}^{\tilde{T}_i} \delta(y_{i,j}, z_{i,j}, q_{k_2}, a_{k_3})\right.$$
$$\left.\sum_{W, w_i = c_{k_1}} \prod_{k_4=1}^{L_u} p(w_{k_4}|Y_{k_4}, Z_{k_4}, \theta^0)\right)$$
$$\log p(a_{k_3}|q_{k_2}, c_{k_1}, \theta)$$
$$= \sum_{k_1=1}^{|C|} \sum_{k_2=1}^{|Q|} \sum_{k_3=1}^{|A|}$$
$$\left(\sum_{i=1}^{L_u} \sum_{j=1}^{\tilde{T}_i} \delta(y_{i,j}, z_{i,j}, q_{k_2}, a_{k_3}) p(c_{k_1}|Y_i, Z_i, \theta^0)\right)$$
$$\log p(a_{k_3}|q_{k_2}, c_{k_1}, \theta)$$
$$= \sum_{k_1=1}^{|C|} \sum_{k_2=1}^{|Q|} \left(\sum_{k_3=1}^{|A|} d_{k_1k_2k_3} \log p(a_{k_3}|q_{k_2}, c_{k_1}, \theta)\right), \tag{40}$$

ただし,

$$\delta(y_{i,j}, z_{i,j}, q_{k_2}, a_{k_3})$$
$$= \begin{cases} 1, & y_{i,j} = q_{k_2} \text{かつ} z_{i,j} = a_{k_3}; \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}, \tag{41}$$

$$d_{k_1k_2k_3} =$$
$$\sum_{i=1}^{L_u} \sum_{j=1}^{\tilde{T}_i} \delta(y_{i,j}, z_{i,j}, q_{k_2}, a_{k_3}) p(c_{k_1}|Y_i, Z_i, \theta^0). \tag{42}$$

$\sum_{k_3=1}^{|A|} p(a_{k_3}|q_{k_2}, c_{k_1}, \theta) = 1$の制約のもとで，各$(k_1, k_2)$の組に対して$f = \sum_{k_3=1}^{|A|} d_{k_1k_2k_3} \log p(a_{k_3}|q_{k_2}, c_{k_1}, \theta)$を最大化する$p(a_{k_3}|q_{k_2}, c_{k_1}, \theta)$をラグランジュの未定乗数法によって求める．ラグランジュの未定乗数法より,

$$L = f - \lambda\left(\sum_{k_3=1}^{|A|} p(a_{k_3}|q_{k_2}, c_{k_1}, \theta) - 1\right), \tag{43}$$

として，$p(a_{k_3}|q_{k_2}, c_{k_1}, \theta)$で偏微分して0とおくと以下のようになる.

$$\frac{\partial L}{\partial p(a_{k_3}|q_{k_2}, c_{k_1}, \theta)} = \frac{\partial f}{\partial p(a_{k_3}|q_{k_2}, c_{k_1}, \theta)} - \lambda$$
$$= \frac{d_{k_1k_2k_3}}{p(a_{k_3}|q_{k_2}, c_{k_1}, \theta)} - \lambda = 0. \tag{44}$$

$$\lambda p(a_{k_3}|q_{k_2}, c_{k_1}, \theta) = d_{k_1k_2k_3}. \tag{45}$$

式(45)の両辺をk_3について（回答集合の全要素について）足し合わせて制約を考慮すると以下のようになる．

$$\lambda = \sum_{k_3=1}^{|A|} d_{k_1k_2k_3}. \tag{46}$$

よって，$Q_2(\theta^0,\theta)$を最大化する$p(a_{k_3}|q_{k_2},c_{k_1},\theta)$の推定値$\hat{p}(a_{k_3}|q_{k_2},c_{k_1},\theta)$は次式のとおりである．

$$\hat{p}(a_{k_3}|q_{k_2},c_{k_1},\theta) = \frac{d_{k_1k_2k_3}}{\lambda} = \frac{d_{k_1k_2k_3}}{\sum_{k_3=1}^{|A|} d_{k_1k_2k_3}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{L_u}\sum_{j=1}^{\bar{T}_i}\delta(y_{i,j},z_{i,j},q_{k_2},a_{k_3})p(c_{k_1}|Y_i,Z_i,\theta^0)}{\sum_{k_3=1}^{|A|}\sum_{i=1}^{L_u}\sum_{j=1}^{\bar{T}_i}\delta(y_{i,j},z_{i,j},q_{k_2},a_{k_3})p(c_{k_1}|Y_i,Z_i,\theta^0)}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{L_u} H(i,q_{k_2},a_{k_3})p(c_{k_1}|Y_i,Z_i,\theta^0)}{\sum_{i=1}^{L_u} H(i,q_{k_2})p(c_{k_1}|Y_i,Z_i,\theta^0)}. \tag{47}$$

$H(i,q_{k_2},a_{k_3})$はi本目の不完全データ中で質問q_{k_2}に対して回答a_{k_3}が返された頻度，$H(i,q_{k_2})$，$H(i,q_{k_2}) = \sum_{k_3=1}^{|A|} H(i,q_{k_2},a_{k_3})$は$i$本目の不完全データ中で質問$q_{k_2}$が質問された頻度である．式(47)の分子は$L_u$本の不完全データにおいて質問期間に顧客クラス$c_{k_1}$の顧客が質問$q_{k_2}$に対して回答$a_{k_3}$を返した頻度の期待値である．分母は$L_u$本の不完全データにおいて質問期間に顧客クラス$c_{k_1}$の顧客が質問$q_{k_2}$を質問された頻度の期待値である．

次に$Q_3(\theta^0,\theta)$の最大化を説明する．

$$Q_3(\theta^0,\theta)$$
$$= \sum_W p(W|Y,Z,\theta^0)\sum_{i=1}^{L_u}\log p(z_{i,\tilde{T}_i+1}|y_{i,\tilde{T}_i+1},w_i,\theta)$$
$$= \sum_{k_1=1}^{|C|}\sum_{k_2=1}^{|M|}\sum_{k_3=1}^{|N|}\Big(\sum_{i=1}^{L_u}$$
$$\delta(y_{i,\tilde{T}_i+1},z_{i,\tilde{T}_i+1},m_{k_2},n_{k_3})\sum_{W,w_i=c_{k_1}}\prod_{k_4=1}^{L_u}$$
$$p(w_{k_4}|Y_{k_4},Z_{k_4},\theta^0)\Big)\log p(n_{k_3}|m_{k_2},c_{k_1},\theta)$$
$$= \sum_{k_1=1}^{|C|}\sum_{k_2=1}^{|M|}\sum_{k_3=1}^{|N|}\Big(\sum_{i=1}^{L_u}$$
$$\delta(y_{i,\tilde{T}_i+1},z_{i,\tilde{T}_i+1},m_{k_2},n_{k_3})\,p(c_{k_1}|Y_i,Z_i,\theta^0)\Big)$$
$$\log p(n_{k_3}|m_{k_2},c_{k_1},\theta)$$
$$= \sum_{k_1=1}^{|C|}\sum_{k_2=1}^{|M|}\Big(\sum_{k_3=1}^{|N|} d_{k_1k_2k_3}\log p(n_{k_3}|m_{k_2},c_{k_1},\theta)\Big), \tag{48}$$

ただし，

$$\delta(y_{i,\tilde{T}_i+1},z_{i,\tilde{T}_i+1},m_{k_2},n_{k_3})$$
$$= \begin{cases} 1, & y_{i,\tilde{T}_i+1} = m_{k_2}\text{かつ}z_{i,\tilde{T}_i+1} = n_{k_3}; \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}, \tag{49}$$

$$d_{k_1k_2k_3} = \sum_{i=1}^{L_u}\delta(y_{i,\tilde{T}_i+1},z_{i,\tilde{T}_i+1},m_{k_2},n_{k_3})p(c_{k_1}|Y_i,Z_i,\theta^0). \tag{50}$$

$\sum_{k_3=1}^{|N|} p(n_{k_3}|m_{k_2},c_{k_1},\theta) = 1$の制約のもとで，$f = \sum_{k_3=1}^{|N|} d_{k_1k_2k_3}\log p(n_{k_3}|m_{k_2},c_{k_1},\theta)$を各$(k_1,k_2)$の組に対して最大化する$p(n_{k_3}|m_{k_2},c_{k_1},\theta)$をラグランジュの未定乗数法によって求める．ラグランジュの未定乗数法より，

$$L = f - \lambda\Big(\sum_{k_3=1}^{|N|} p(n_{k_3}|m_{k_2},c_{k_1},\theta) - 1\Big), \tag{51}$$

として，$p(n_{k_3}|m_{k_2},c_{k_1},\theta)$で偏微分して0とおくと以下のようになる．

$$\frac{\partial L}{\partial p(n_{k_3}|m_{k_2},c_{k_1},\theta)} = \frac{\partial f}{\partial p(n_{k_3}|m_{k_2},c_{k_1},\theta)} - \lambda$$
$$= \frac{d_{k_1k_2k_3}}{p(n_{k_3}|m_{k_2},c_{k_1},\theta)} - \lambda = 0. \tag{52}$$
$$\lambda p(n_{k_3}|m_{k_2},c_{k_1},\theta) = d_{k_1k_2k_3}. \tag{53}$$

式(53)の両辺をk_3について（反応集合の全要素について）足し合わせて制約を考慮すると以下のようになる．

$$\lambda = \sum_{k_3=1}^{|N|} d_{k_1k_2k_3}. \tag{54}$$

よって，$Q_3(\theta^0,\theta)$を最大化する$p(n_{k_3}|m_{k_2},c_{k_1},\theta)$の推定値$\hat{p}(n_{k_3}|m_{k_2},c_{k_1},\theta)$は次式のとおりである．

$$\hat{p}(n_{k_3}|m_{k_2},c_{k_1},\theta) = \frac{d_{k_1k_2k_3}}{\lambda} = \frac{d_{k_1k_2k_3}}{\sum_{k_3=1}^{|N|} d_{k_1k_2k_3}}$$
$$= \frac{\sum_{i=1}^{L_u}\delta(y_{i,\tilde{T}_i+1},z_{i,\tilde{T}_i+1},m_{k_2},n_{k_3})p(c_{k_1}|Y_i,Z_i,\theta^0)}{\sum_{k_3=1}^{|N|}\sum_{i=1}^{L_u}\delta(y_{i,\tilde{T}_i+1},z_{i,\tilde{T}_i+1},m_{k_2},n_{k_3})p(c_{k_1}|Y_i,Z_i,\theta^0)}$$
$$= \frac{\sum_{i=1}^{L_u} H(i,m_{k_2},n_{k_3})p(c_{k_1}|Y_i,Z_i,\theta^0)}{\sum_{i=1}^{L_u} H(i,m_{k_2})p(c_{k_1}|Y_i,Z_i,\theta^0)}. \tag{55}$$

$H(i,m_{k_2},n_{k_3})$はi本目の不完全データ中で1回目の推薦で商品m_{k_2}が推薦されて反応がn_{k_3}だった頻度，$H(i,m_{k_2})$，$H(i,m_{k_2}) = \sum_{k_3=1}^{|N|} H(i,m_{k_2},n_{k_3})$は$i$本目の不完全データ中で1回目の推薦で商品$m_{k_2}$が推薦された頻度である．式(55)の分子は$L_u$本の不完全データの1回目の推薦において顧客クラス$c_{k_1}$の顧客が商品$m_{k_2}$を推薦されて反応$n_{k_3}$を返した頻度の期待値である．分母は$L_u$本の不完全データの1回目の推薦において顧客クラス$c_{k_1}$の顧客が商品$m_{k_2}$を推薦された頻度の期待値である．

次に$Q_4(\theta^0,\theta)$の最大化を説明する．

$$Q_4(\theta^0,\theta) = \sum_W p(W|Y,Z,\theta^0)\sum_{i=1}^{L_u}\sum_{j=\tilde{T}_i+2}^{\tilde{T}_i+T_i}$$
$$\log p(z_{i,j}|y_{i,j-1},z_{i,j-1},y_{i,j},w_i,\theta)$$

$$= \sum_{k_1=1}^{|C|}\sum_{k_2=1}^{|M|}\sum_{k_3=1}^{|N|}\sum_{k_4=1}^{|M|}\sum_{k_5=1}^{|N|}\Big(\sum_{i=1}^{L_u}\sum_{j=\tilde{T}_i+2}^{\tilde{T}_i+T_i}$$

$$\delta(y_{i,j-1}, z_{i,j-1}, y_{i,j}, z_{i,j}, m_{k_2}, n_{k_3}, m_{k_4}, n_{k_5})$$

$$\sum_{W,w_i=c_{k_1}}\prod_{k_6=1}^{L_u} p(w_{k_6}|Y_{k_6}, Z_{k_6}, \theta^0)\Big)$$

$$\log p(n_{k_5}|m_{k_2}, n_{k_3}, m_{k_4}, c_{k_1}, \theta)$$

$$= \sum_{k_1=1}^{|C|}\sum_{k_2=1}^{|M|}\sum_{k_3=1}^{|N|}\sum_{k_4=1}^{|M|}\sum_{k_5=1}^{|N|}\Big(\sum_{i=1}^{L_u}\sum_{j=\tilde{T}_i+2}^{\tilde{T}_i+T_i}$$

$$\delta(y_{i,j-1}, z_{i,j-1}, y_{i,j}, z_{i,j}, m_{k_2}, n_{k_3}, m_{k_4}, n_{k_5})$$

$$p(c_{k_1}|Y_i, Z_i, \theta^0)\Big)$$

$$\log p(n_{k_5}|m_{k_2}, n_{k_3}, m_{k_4}, c_{k_1}, \theta)$$

$$= \sum_{k_1=1}^{|C|}\sum_{k_2=1}^{|M|}\sum_{k_3=1}^{|N|}\sum_{k_4=1}^{|M|}$$

$$\Big(\sum_{k_5=1}^{|N|} d_{k_1k_2k_3k_4k_5}\log p(n_{k_5}|m_{k_2}, n_{k_3}, m_{k_4}, c_{k_1}, \theta)\Big), \tag{56}$$

ただし,

$$\delta(y_{i,j-1}, z_{i,j-1}, y_{i,j}, z_{i,j}, m_{k_2}, n_{k_3}, m_{k_4}, n_{k_5})$$

$$= \begin{cases} 1, & y_{i,j-1} = m_{k_2}\text{かつ}z_{i,j-1} = n_{k_3}\text{かつ} \\ & y_{i,j} = m_{k_4}\text{かつ}z_{i,j} = n_{k_5}; \\ 0, & \text{それ以外}, \end{cases} \tag{57}$$

$$d_{k_1k_2k_3k_4k_5} = \sum_{i=1}^{L_u}\sum_{j=\tilde{T}_i+2}^{\tilde{T}_i+T_i}$$

$$\delta(y_{i,j-1}, z_{i,j-1}, y_{i,j}, z_{i,j}, m_{k_2}, n_{k_3}, m_{k_4}, n_{k_5})$$

$$p(c_{k_1}|Y_i, Z_i, \theta^0). \tag{58}$$

$\sum_{k_5=1}^{|N|} p(n_{k_5}|m_{k_2}, n_{k_3}, m_{k_4}, c_{k_1}, \theta) = 1$の制約のもとで,

$$f = \sum_{k_5=1}^{|N|} d_{k_1k_2k_3k_4k_5}\log p(n_{k_5}|m_{k_2}, n_{k_3}, m_{k_4}, c_{k_1}, \theta)$$

を各(k_1, k_2, k_3, k_4)の組に対して最大化する$p(n_{k_5}|m_{k_2}, n_{k_3}, m_{k_4}, c_{k_1}, \theta)$をラグランジュの未定乗数法によって求める．ラグランジュの未定乗数法より,

$$L = f - \lambda\Big(\sum_{k_5=1}^{|N|} p(n_{k_5}|m_{k_2}, n_{k_3}, m_{k_4}, c_{k_1}, \theta) - 1\Big), \tag{59}$$

として, $p(n_{k_5}|m_{k_2}, n_{k_3}, m_{k_4}, c_{k_1}, \theta)$で偏微分して0とおくと以下のようになる.

$$\frac{\partial L}{\partial p(n_{k_5}|m_{k_2}, n_{k_3}, m_{k_4}, c_{k_1}, \theta)}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial p(n_{k_5}|m_{k_2}, n_{k_3}, m_{k_4}, c_{k_1}, \theta)} - \lambda$$

$$= \frac{d_{k_1k_2k_3k_4k_5}}{p(n_{k_5}|m_{k_2}, n_{k_3}, m_{k_4}, c_{k_1}, \theta)} - \lambda = 0. \tag{60}$$

$$\lambda p(n_{k_5}|m_{k_2}, n_{k_3}, m_{k_4}, c_{k_1}, \theta) = d_{k_1k_2k_3k_4k_5}. \tag{61}$$

式(61)の両辺をk_5について（反応集合の全要素について）足し合わせて制約を考慮すると以下のようになる.

$$\lambda = \sum_{k_5=1}^{|N|} d_{k_1k_2k_3k_4k_5}. \tag{62}$$

よって, $Q_4(\theta^0, \theta)$を最大化する$p(n_{k_5}|m_{k_2}, n_{k_3}, m_{k_4}, c_{k_1}, \theta)$の推定値$\hat{p}(n_{k_5}|m_{k_2}, n_{k_3}, m_{k_4}, c_{k_1}, \theta)$は次式のとおりである.

$$\hat{p}(n_{k_5}|m_{k_2}, n_{k_3}, m_{k_4}, c_{k_1}, \theta)$$

$$= \frac{d_{k_1k_2k_3k_4k_5}}{\lambda} = \frac{d_{k_1k_2k_3k_4k_5}}{\sum_{k_5=1}^{|N|} d_{k_1k_2k_3k_4k_5}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{L_u}\sum_{j=\tilde{T}_i+2}^{\tilde{T}_i+T_i}\delta(y_{i,j-1}, z_{i,j-1}, y_{i,j}, z_{i,j}, m_{k_2}, n_{k_3}, m_{k_4}, n_{k_5})\, p(c_{k_1}|Y_i, Z_i, \theta^0)}{\sum_{k_5=1}^{|N|}\sum_{i=1}^{L_u}\sum_{j=\tilde{T}_i+2}^{\tilde{T}_i+T_i}\delta(y_{i,j-1}, z_{i,j-1}, y_{i,j}, z_{i,j}, m_{k_2}, n_{k_3}, m_{k_4}, n_{k_5})\, p(c_{k_1}|Y_i, Z_i, \theta^0)}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{L_u} H(i, m_{k_2}, n_{k_3}, m_{k_4}, n_{k_5})\, p(c_{k_1}|Y_i, Z_i, \theta^0)}{\sum_{i=1}^{L_u} H(i, m_{k_2}, n_{k_3}, m_{k_4})\, p(c_{k_1}|Y_i, Z_i, \theta^0)}. \tag{63}$$

$H(i, m_{k_2}, n_{k_3}, m_{k_4}, n_{k_5})$は$i$本目の不完全データ中で2回目以降の推薦で1期前の推薦と反応がm_{k_2}とn_{k_3}という状況で商品m_{k_4}を推薦されて反応n_{k_5}を返した頻度,

$H(i, m_{k_2}, n_{k_3}, m_{k_4}) = \sum_{k_5=1}^{|N|} H(i, m_{k_2}, n_{k_3}, m_{k_4}, n_{k_5})$は$i$本目の不完全データ中で2回目以降の推薦で1期前の推薦と反応がm_{k_2}とn_{k_3}という状況で商品m_{k_4}を推薦された頻度である．式(63)の分子はL_u本の不完全データの2回目以降の推薦において顧客クラスc_{k_1}の顧客が1期前の推薦と反応がm_{k_2}とn_{k_3}という状況で商品m_{k_4}を推薦されて反応n_{k_5}を返した頻度の期待値である．分母はL_u本の不完全データの2回目以降の推薦において顧客クラスc_{k_1}の顧客が1期前の推薦と反応がm_{k_2}とn_{k_3}という状況で商品m_{k_4}を推薦された頻度の期待値である.

4.3　完全データへの対応

不完全データにEMアルゴリズムを適用する際のパラメータの更新式，式(32)，式(47)，式(55)，式(63)を完全データにも対応するように拡張する.

式(32)の分子はL_u本の不完全データにおいて顧客クラスがc_jの頻度の期待値である．他方，完全データでは顧客クラスは既知なので，確定的な値になる．完全データも追加した$p(c_j|\theta)$の推定は以下のようになる.

$$\hat{p}(c_j|\theta) = \frac{H'(c_j)+\sum_{i=1}^{L_u} p(c_j|Y_i, Z_i, \theta^0)}{L_c+L_u}. \quad (64)$$

ただし，$H'(c_j)$はL_c本の完全データ中で顧客クラスがc_jである頻度を示す．

式(47)の分子はL_u本の不完全データにおいて質問期間に顧客クラスc_{k_1}の顧客が質問q_{k_2}に対して回答a_{k_3}を返した頻度の期待値である．分母はL_u本の不完全データにおいて質問期間に顧客クラスc_{k_1}の顧客が質問q_{k_2}を質問された頻度の期待値である．他方，完全データでは顧客クラスは既知なので，確定的な値になる．完全データも追加した$p(a_{k_3}|q_{k_2}, c_{k_1}, \theta)$の推定は以下のようになる．

$$\hat{p}(a_{k_3}|q_{k_2}, c_{k_1}, \theta) = \frac{H'(c_{k_1}, q_{k_2}, a_{k_3})+\sum_{i=1}^{L_u} H(i, q_{k_2}, a_{k_3}) p(c_{k_1}|Y_i, Z_i, \theta^0)}{H'(c_{k_1}, q_{k_2})+\sum_{i=1}^{L_u} H(i, q_{k_2}) p(c_{k_1}|Y_i, Z_i, \theta^0)}. \quad (65)$$

ただし，$H'(c_{k_1}, q_{k_2}, a_{k_3})$は完全データ中で顧客クラス$c_{k_1}$の顧客が質問$q_{k_2}$を質問されて回答$a_{k_3}$を返した頻度を示す．$H'(c_{k_1}, q_{k_2}) = \sum_{k_3=1}^{|A|} H'(c_{k_1}, q_{k_2}, a_{k_3})$は完全データ中で顧客クラス$c_{k_1}$の顧客が質問$q_{k_2}$を質問された頻度を示す．

式(55)の分子はL_u本の不完全データの1回目の推薦において顧客クラスc_{k_1}の顧客が商品m_{k_2}を推薦されて反応n_{k_3}を返した頻度の期待値である．分母はL_u本の不完全データの1回目の推薦において顧客クラスc_{k_1}の顧客が商品m_{k_2}を推薦された頻度の期待値である．他方，完全データでは顧客クラスは既知なので，確定的な値になる．完全データも追加した$p(n_{k_3}|m_{k_2}, c_{k_1}, \theta)$の推定は以下のようになる．

$$\hat{p}(n_{k_3}|m_{k_2}, c_{k_1}, \theta) = \frac{H'(c_{k_1}, m_{k_2}, n_{k_3})+\sum_{i=1}^{L_u} H(i, m_{k_2}, n_{k_3}) p(c_{k_1}|Y_i, Z_i, \theta^0)}{H'(c_{k_1}, m_{k_2})+\sum_{i=1}^{L_u} H(i, m_{k_2}) p(c_{k_1}|Y_i, Z_i, \theta^0)}. \quad (66)$$

ただし，$H'(c_{k_1}, m_{k_2}, n_{k_3})$は完全データ中で顧客クラス$c_{k_1}$の顧客が1回目の推薦で商品$m_{k_2}$を推薦されて反応$n_{k_3}$を返した頻度を示す．$H'(c_{k_1}, m_{k_2})$，$H'(c_{k_1}, m_{k_2}) = \sum_{k_3=1}^{|N|} H'(c_{k_1}, m_{k_2}, n_{k_3})$は完全データ中で顧客クラス$c_{k_1}$の顧客が1回目の推薦で商品$m_{k_2}$を推薦された頻度を示す．

式(63)の分子はL_u本の不完全データの2回目以降の推薦において顧客クラスc_{k_1}の顧客が1期前の推薦と反応がm_{k_2}とn_{k_3}という状況で商品m_{k_4}を推薦されて反応n_{k_5}を返した頻度の期待値である．分母はL_u本の不完全データの2回目以降の推薦において顧客クラスc_{k_1}の顧客が1期前の推薦と反応がm_{k_2}とn_{k_3}という状況で商品m_{k_4}を推薦された頻度の期待値である．他方，完全データでは顧客クラスは既知なので，確定的な値になる．完全データも追加した$p(n_{k_5}|m_{k_2}, n_{k_3}, m_{k_4}, c_{k_1}, \theta)$の推定は以下のようになる．

$$\hat{p}(n_{k_5}|m_{k_2}, n_{k_3}, m_{k_4}, c_{k_1}, \theta) = \frac{H'(c_{k_1}, m_{k_2}, n_{k_3}, m_{k_4}, n_{k_5})+\sum_{i=1}^{L_u} H(i, m_{k_2}, n_{k_3}, m_{k_4}, n_{k_5}) p(c_{k_1}|Y_i, Z_i, \theta^0)}{H'(c_{k_1}, m_{k_2}, n_{k_3}, m_{k_4})+\sum_{i=1}^{L_u} H(i, m_{k_2}, n_{k_3}, m_{k_4}) p(c_{k_1}|Y_i, Z_i, \theta^0)}. \quad (67)$$

ただし，$H'(c_{k_1}, m_{k_2}, n_{k_3}, m_{k_4}, n_{k_5})$は完全データ中で顧客クラス$c_{k_1}$の顧客が2回目以降の推薦で1期前の推薦と反応が$m_{k_2}$と$n_{k_3}$という状況で商品$m_{k_4}$を推薦されて反応$n_{k_5}$を返した頻度を示す．$H'(c_{k_1}, m_{k_2}, n_{k_3}, m_{k_4})$，$H'(c_{k_1}, m_{k_2}, n_{k_3}, m_{k_4}) = \sum_{k_5=1}^{|N|} H'(c_{k_1}, m_{k_2}, n_{k_3}, m_{k_4}, n_{k_5})$は完全データ中で顧客クラス$c_{k_1}$の顧客が2回目以降の推薦で1期前の推薦と反応が$m_{k_2}$と$n_{k_3}$という状況で商品$m_{k_4}$を推薦された頻度を示す．

提案方法におけるEMアルゴリズムの具体的な手順は，最初に各パラメータ$\hat{p}(c_j|\theta)$，$\hat{p}(a_{k_3}|q_{k_2}, c_{k_1}, \theta)$，$\hat{p}(n_{k_3}|m_{k_2}, c_{k_1}, \theta)$，$\hat{p}(n_{k_5}|m_{k_2}, n_{k_3}, m_{k_4}, c_{k_1}, \theta)$の初期値を設定する．次に，式(64)～式(67)を用いて各パラメータを推定し，$\hat{p}(c_j|\theta)$，$\hat{p}(a_{k_3}|q_{k_2}, c_{k_1}, \theta)$，$\hat{p}(n_{k_3}|m_{k_2}, c_{k_1}, \theta)$，$\hat{p}(n_{k_5}|m_{k_2}, n_{k_3}, m_{k_4}, c_{k_1}, \theta)$を更新する．推定結果が収束するまで推定と更新を繰り返す．なお，式(64)～式(67)中の顧客クラスの事後確率の計算には式(33)～式(39)を用いる．

実際の質問および商品の推薦については3章記載の真のパラメータ既知の従来研究[6]における質問および推薦方法に上記のEMアルゴリズムによる推定結果を代入して実施する．

5. シミュレーション例

提案方法の有効性を確認するため，小規模であるがシミュレーション例を報告する．

顧客クラス数$|C| = 4$，質問数$|Q| = 3$，回答数$|A| = 2$，商品数$|M| = 5$，質問回数$\tilde{T} = 2$，推薦回数$T = 4$として，真のパラメータ$p(c_j|\theta^*)$，$p(a_{k_3}|q_{k_2}, c_{k_1}, \theta^*)$，$p(n_{k_3}|m_{k_2}, c_{k_1}, \theta^*)$，$p(n_{k_5}|m_{k_2}, n_{k_3}, m_{k_4}, c_{k_1}, \theta^*)$と商品の利得$r(m_i)$のシミュレーション用のパターンを一様乱数によって100パターン設定した．なお，商品の利得$r(m_i)$は10以上100以下の10きざみで設定した．

EMアルゴリズムの初期値も一様乱数で設定し，EMアルゴリズムの繰り返し回数は事前実験より収束するのに十分と想定される1000とした．

学習データの完全データ数L_cと不完全データ数L_uについては，それぞれ10，100，1000，10000としてデータ数の16組の組合せを設定した．学習データの系列長はすべて上記の質問回数$\tilde{T}=2$，推薦回数$T=4$と同じにした．学習データは各シミュレーションパターンの真のパラメータに従って生成した．

比較対象として，真のパラメータ既知の場合の従来方法[6]に真のパラメータを代入した場合の期待総利得の最大値の算出も行った．なお，従来方法に代入するクラスの事前確率として顧客クラスの生起確率を用いた．

上記100パターンのシミュレーション結果を表1に報告する．表1中の数値は真のパラメータ既知の場合の期待総利得の最大値に対する，提案方法によるパラメータの推定値を従来方法に代入して算出した質問および推薦を真のパラメータのもとで実施した場合の期待総利得の割合の百分率（達成率）である．

表1.　シミュレーションでの達成率（%）

		不完全データ			
		10	100	1000	10000
完全データ	10	88.50	90.11	92.15	94.98
	100	91.10	91.33	92.72	94.98
	1000	95.28	95.19	95.42	95.73
	10000	98.72	98.74	98.82	98.85

表1では，完全データ数が少量の10の場合でも不完全データ数の増加にともない達成率が88.50%（不完全データ数が10）から94.98%（不完全データ数が10000）まで大きくなっている．また，総じて学習データ全体の増加にともない達成率が大きくなる傾向にある．完全データ数と不完全データ数がともに10000の場合には，真のパラメータ既知の場合と完全に一致はしないものの98.85%という高い達成率である．

よって，小規模なシミュレーションであるが，EMアルゴリズムを利用した提案方法による半教師付き学習の効果が確認できた．

6.　まとめと今後の課題

従来から顧客が属する顧客クラスが未知の場合の推薦システムについて，顧客に関する情報を収集するための質問および推薦方法が検討されている．しかし，従来研究[6]では各種確率分布を支配する真のパラメータは既知と仮定されている．

そこで，本研究ではより現実に近い真のパラメータ未知の場合を対象に，顧客クラスが既知である完全データと顧客クラスが未知である不完全データで構成される学習データ（質問と回答および推薦と購買の履歴データ）に対する半教師付き学習方法を検討した．提案方法はEMアルゴリズムを利用した方法であり，学習結果である未知パラメータの推定結果を真のパラメータが既知の場合の従来の質問および推薦方法に代入することによって質問および商品の推薦を実施する．

小規模なシミュレーションであるが，提案方法によるパラメータの推定結果を従来の質問および推薦方法に代入した場合と真のパラメータ既知の場合の質問および推薦方法の期待総利得を比較することにより，提案方法の有効性を確認した．

提案方法のより詳細な性質に関する検討や，より現実の推薦システムに近い問題設定に関する検討は今後の課題としたい．

半教師付き学習については，自然言語処理分野において文書分類問題などへの適用例が報告されている．文書分類問題で利用される確率モデルは推薦問題で利用される確率モデルとは異なるが，EMアルゴリズムを利用する点は共通である．よって，本研究は文書分類問題などにおける半教師付き学習の成果[10]を推薦システムに適用したとも解釈できる．半教師付き学習の考え方そのものは本研究も従来研究と同様であり，本研究の新規性はMDPを用いてモデル化した推薦システムの新規顧客問題に半教師付き学習を適用した点（具体的には式(64)～式(67)のパラメータの更新式の導出など）である．

次に本研究内容の健康・医療分野への適用可能性について述べる．本研究ではインターネット上の通販サイトなどにおける推薦システムを対象としたが，通販サイトで扱う商品が医療関連商品や医療保険，医療サービスであっても本研究の検討内容は適用可能である．また，本研究を数理工学の視点から整理すると，本研究では未知情報をともなう MDP に関する学習問題を対象としている．従来研究[11]では，未知情報をともなう MDP を医療検査・治療方針の決定支援に適用している．当該従来研究では，患者の真の健康状況を未知情報，患者に対する検査項目や治療方針（医療サービス）を MDP の行動として，ヘルスケアに関する患者のコスト最小化を検討しているが，各種確率分布を支配する真のパラメータは既知のもとで検討している．統計学の視点から整理すると，ヘルスケアにおける患者に対する検査項目の選択や推薦問題における質問の選択はともに適応的な仮説検定と解釈できる．よって，ヘルスケアに関する当該従来研究[11]と推薦問題における従来研究[6]は数理工学および

統計学的には同一の学習問題を扱っている．本研究が従来研究[6]の問題設定をより現実に近い真のパラメータが未知の場合に拡張して半教師付き学習を適用したのと同様に，ヘルスケアに関する当該従来研究[11]にも半教師付き学習が適用可能である．これらの健康・医療分野への適用に関しては，別の機会に改めて報告したい．

謝辞

本研究の一部は JSPS 科研費 JP16K00417 の助成による．

参考文献

[1] D. Jannach, M. Zanker, A. Felfernig, and G. Friedrich：情報推薦システム入門，共立出版，東京，2012.

[2] G. Shani, D. Heckerman, and R. I. Brafman, : An MDP-Based Recommender System, Journal of Machine Learning Research, Vol.6, pp.1265-1295, 2005.

[3] 桑田修平，前田康成，松嶋敏泰，平澤茂一：推薦システムのための状態遷移確率の構造を未知としたマルコフ決定過程，情報処理学会論文誌 数理モデル化と応用, Vol.6, No.1, pp.20-30, 2013.

[4] 岩井秀輔，宮希望，前田康成，松嶋敏泰：推薦対象ユーザのクラスが未知の推薦問題におけるマルコフ決定過程を用いた推薦システムに関する一考察，信学技報IT, Vol.114, No.138, pp.49-54, 2014.

[5] 前田康成，鈴木正清，松嶋敏泰：顧客クラスが変化する推薦システムに関する一考察，電気学会論文誌C, Vol.137, No.6, pp.815-816, 2017.

[6] 前田康成，山内翔，鈴木正清，松嶋敏泰：推薦システムにおける新規顧客問題に関する一考察，バイオメディカル・ファジィ・システム学会誌, Vol.19, No.2, pp.13-19, 2017.

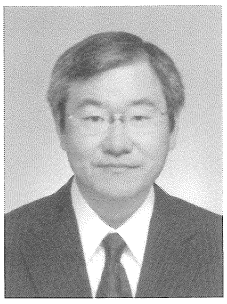
[7] 金子哲夫：マルコフ決定理論入門，槙書店，東京，1973.

[8] J.O. Berger : Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis, Springer-Verlag, New York, 1980.

[9] A.P. Dempster, N.M. Laird, and D.B. Rubin, : Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm, Journal of the Royal Statistical Society, Series B, Vol.39, No.1, pp.1-38, 1977.

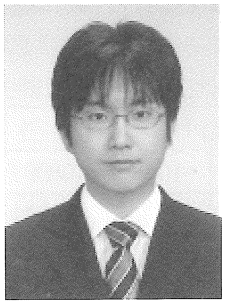
[10] K. Nigam, A.K. Mccallum, S. Thrun, and T. Mitchell, : Text Classification from Labeled and Unlabeled Documents using EM, Machine Learning, Vol.39, pp.103-134, 2000.

[11] 前田康成，山内翔，鈴木正清，高野賢裕，松嶋敏泰：マルコフ決定過程を用いたヘルスケア支援に関する一考察，バイオメディカル・ファジィ・システム学会誌, Vol.19, No.2, pp.21-27, 2017.



前田康成（まえだやすなり）

平成7年早大・理工卒．平成9年同大学院理工学研究科修士課程修了．日本電信電話（株），東日本電信電話（株），北見工大助手，助教，准教授を経て平成28年同大学教授，現在に至る．博士（工学）．統計的決定理論の学習問題への応用に関する研究に従事．電子情報通信学会等各会員．



山内翔（やまうちしょう）

1988年10月27日生．2011年3月北海道大学工学部情報エレクトロニクス学科卒業．2014年同大学院情報科学研究科複合情報学専攻複雑系工学講座博士後期課程修了．2014年より日本学術振興会特別研究員．2016年より北見工業大学助教．自律ロボットシステムの研究に従事．

鈴木正清（すずきまさきよ）

昭57北大・工・電子卒．昭62同大大学院博士課程了．同年同大応用電気研究所助手．平5北見工大・助教授，平8北大・電子研助教授．センサアレー信号処理，鮭追跡システムの開発，国際会議運営支援システムの開発，電子波包絡の回路モデルの研究に従事．平13より北見工大教授．工博．

松嶋敏泰（まつしまとしやす）

昭53早大・理工・工業経営卒．昭55同大大学院修士課程了．同年，日本電気（株）入社．昭61早大・理工学研究科・博士後期課程入学．現在，早大・応用数理学科教授．知識情報処理及び情報理論とその応用に関する研究に従事．工学博士．IEEE等各会員．