線形制御系における実現可能な特性伝達関数行列
——多入出力制御対象の場合——

榮坂　俊雄[†a)]（正員）

Realizable Characteristic Transfer Function Matrices for Linear Control Systems
—— Multiple-Input Multiple-Output Plant Case ——

Toshio EISAKA[†a)], *Member*

[†] 北見工業大学情報システム工学科，北見市
Department of Computer Science, Kitami Institute of Technology, 165 Koen-cho, Kitami-shi, 090–8507 Japan
a) E-mail: eisala@cs.kitami-it.ac.jp

あらまし　与えられた線形多入出力系制御対象に任意の線形制御器をフィードバック結合した一般的２自由度線形制御系の伝達関数行列が満たすべき必要十分条件を，状態方程式の状態係数行列に対する特性多項式を共通分母とする特性伝達関数行列表現を用いて明らかにした．

キーワード　２自由度制御系，多入出力線形制御系，伝達関数行列，特性多項式

1．まえがき

制御系設計とは与えられた制御対象に対して制御系全系が望ましい信号伝達特性をもつように制御器を決定する問題である．このとき制御系全系は制御対象が制約条件となり，任意の伝達特性が達成可能なわけではない．制御系設計において，より優れた制御器を導出するためには，与えられた制御対象に対して指定可能な制御系の全体像が示されることが重要である．

これまで，１入出力多観測量の線形制御対象に線形制御器を結合した２自由度１入出力制御系において，閉ループ伝達関数が満たすべき必要十分条件が，特性伝達関数表現 [1], [2]，すなわち状態方程式の状態係数行列に対する特性多項式を共通分母とする伝達関数により示されている [3]～[5]．多入出力制御系については文献 [3], [4] の元となる先駆的研究 [6] があり，操作量と制御量の次元が等しい場合に，閉ループ伝達関数行列が満たすべき必要十分条件が，六つの条件で構成される定理として明らかにされている．ここで各条件は判定が容易でアルゴリズム化に適しているが，定理が意味する全体像は複雑で証明は示されていない．

本論文では，文献 [5] の結果を拡張し，操作量と制御量の次元が異なる場合も含む一般的多入出力制御系において，閉ループ特性伝達関数行列が満たすべき簡潔な必要十分条件を新たに導くとともに，証明を与えた．

以下では本論文における表記法をまとめる．添え字を二つもつ記号：W_{ab}, C_{ab}, P_{ab} はそれぞれ閉ループ系，制御器，制御対象に関する，入力信号ベクトル a から出力信号ベクトル b までの特性伝達関数行列を意味する．I は $m \times m$ の単位行列であり，m は操作量の次元である．以下簡単のため，システムの特性多項式並びに特性方程式という表現を用いるが，これらはシステムを状態方程式で表現したときの状態係数行列 A に対する特性多項式 $\det(sI - A)$ 並びに特性方程式 $\det(sI - A) = 0$ を意味する．d，d_c，d_p は順に，閉ループ系，制御器及び制御対象の特性多項式である．$\delta(\ )$ は括弧内多項式の次数，$\det(\ )$ は括弧内多項式行列の行列式，$\mathrm{adj}(\ )$ は同じく余因子行列である．

2．制御系の基本的伝達関数行列：Dual Model

一般的な２自由度フィードバック制御系は図１のように構成される．主な信号の意味は r：目標値，u：操作量，y：制御量，y^*：観測量，q：任意の外乱である．また v 及び v^* は後の考察で必要な仮想的入力信号である．これらは任意の次元をもつが，z, v, u と y^*, v^*, w^* の次元はそれぞれで等しい．

このとき，線形制御系では以下の関係が成立する．

$$[W_{ru}, W_{v^*u}] = (I - C_{w^*z}P_{uy^*})^{-1}[C_{rz}, C_{w^*z}] \tag{1a}$$

$$[C_{rz}, C_{w^*z}] = (I + W_{v^*u}P_{uy^*})^{-1}[W_{ru}, W_{v^*u}] \tag{1b}$$

式 (1a), (1b) は，制御器の全ての入出力伝達関数行列の集合 $[C_{rz}, C_{w^*z}]$ と全系の伝達関数行列 $[W_{ru}, W_{v^*u}]$ に１対１の関係があることを示している．すなわち，$[W_{ru}, W_{v^*u}]$ には制御器に由来する制御系の自由度が過不足なく反映されている．制御器 $[C_{rz}, C_{w^*z}]$ と１対１の関係がある全系の伝達関数行列の組を *Dual Model* [6]（以下 DM と略記する）と呼ぶ．DM の構成要素は一意ではない．例えば，文献 [5], [6] では操作量と制御量を同次元と仮定しており，制御目的を直接反

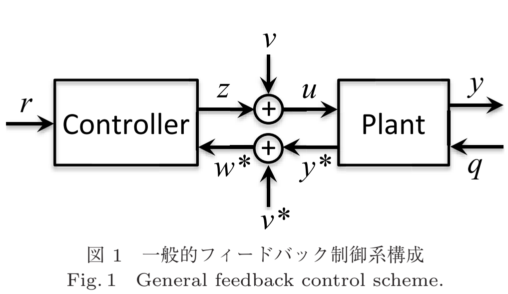

図１　一般的フィードバック制御系構成
Fig. 1　General feedback control scheme.

映する制御量に着目した $[W_{ry}, W_{v^*y}]$ を DM としている．本論文では操作量と制御量の次元が異なる場合も考慮し，操作量に着目した $[W_{ru}, W_{v^*u}]$ を DM とする．

全系に関する任意の信号間の伝達関数行列は DM によって表現可能であり，DM を決めると一意に定まる．例えば全系の目標値から制御量までの伝達関数行列 W_{ry} は，制御対象の操作量から制御量までの伝達関数行列 P_{uy} と DM の一部である W_{ru} を用いて $P_{uy}W_{ru}$ により求められる．同様に全系の外乱から制御量までの伝達関数行列 W_{qy} は，制御対象の外乱から制御量までの伝達関数行列 P_{qy} 及び外乱から観測量までの伝達関数行列 P_{qy^*} と DM の他の一部である W_{v^*u} によって $P_{qy} + P_{uy}W_{v^*u}P_{qy^*}$ により定まる．このように，DM は全系の伝達関数行列集合の，いわば基底の役割を果たし，制御器の設計問題は DM の決定問題に帰着される．一方，式 (1a) に示すように DM は制御対象の伝達関数行列の関数であり，これが制約となるため自由には設定できない．次章では必要な準備の後，本論文の主題である実現可能な DM の条件を明らかにする．

3. 実現可能な特性伝達関数行列

伝達関数行列の表現方法としては有理関数行列，行列分解表現，マルコフパラメータなどが知られているが，本論文では特性伝達関数行列を用いる．特性伝達関数行列は特性多項式を陽に含むため，システムの安定性，プロパー性，次数，不可制御・不可観測による隠れモードの存在などのシステムの基本的な性質が直接表現されるという特徴があり，線形システムの解析及び設計に有用である．

本章ではまず **3.1** で特性伝達関数行列自体の必要十分条件を再掲し，**3.2** で DM を特性伝達関数行列表現した場合の必要十分条件に関する定理とその証明を示す．更に **3.3** で数値例により定理の意義及び内容を具体的に説明する．

3.1 特性伝達関数行列の必要十分条件

本節では共通分母型実有理関数行列が特性伝達関数行列であるための必要十分条件 [2] を定理 1 として再掲する．なお，以下では連続時間値系について表現し，ラプラス変数 s は省略する．

[定理 1] n 次モニック多項式 d を共通分母とし，多項式行列 L を分子行列とする実有理関数行列 L/d が，d を特性多項式とする状態方程式により実現可能であるための必要十分条件は，次の二つの条件を同時に満たすことである．

1) L の全ての要素は n 次以下の多項式である．
2) L の全ての k 次小行列式は d^{k-1} を因子としてもつ．ただし，$k = 1, 2, \ldots, \rho$．$\rho = \operatorname{rank} L$．

3.2 Dual Model の必要十分条件

定理 1 は “特性多項式が同一となる状態方程式が存在する” という意味で実現可能な伝達関数行列の必要十分条件である．以下では “全系の次数から制御対象の次数を減じた次数の制御器が存在する” という意味で実現可能な DM の必要十分条件を示す．

[定理 2] 図 1 に示す制御系において，添え字に示す入出力信号と適合する次元をもつ共通分母型有理関数行列：$[L_{ru}, L_{v^*u}]/d$ が，*Dual Model*：$[W_{ru}, W_{v^*u}]$ であるための必要十分条件は以下のとおりである．

“$[L_{vu}, L_{ru}, L_{v^*u}]/d$ が，定理 1 の条件を満たし，システム零点として制御対象のシステム極を全て含むこと．ただし，$L_{vu} = dI + L_{v^*u}P_{uy^*}$ は多項式行列となり，$\det(L_{vu}(\infty)/d(\infty)) \neq 0$ である”．

（補足） システム極はシステムの特性方程式の解であり，システム零点はローゼンブロックのシステム行列により定義される [7]．定理 1 を満たす共通分母型有理関数行列のシステム零点は文献 [2] の補題 1 より算出できる．また，ただし書きの前半は L_{vu}/d が，d を特性多項式とする W_{vu}（図 1 の仮想信号入力 v から操作量 u までの全系の特性伝達関数行列）であることを要請するものである．更に，ただし書きの後半，$\det(L_{vu}(\infty)/d(\infty)) \neq 0$ は，図 1 に示す制御系において伝達関数行列が一意に定義されるための well-posedness 条件 [8] である．L_{vu} は L_{v^*u} の関数であるから，ただし書きも含め，定理の条件は全て DM の候補である $[L_{ru}, L_{v^*u}]/d$ への条件である．

なお，制御系の安定性は定理の条件としていない．このため本定理は，速応性等のために敢えて一時的に不安定な制御系を設計する場合も考慮可能である．一方，特性方程式 $d = 0$ の解を全て複素左半面に配置するという制約を条件に加えることにより制御系の内部安定性が保証できる．

以下に示す証明では定理 2 を構成する四つの条件をそれぞれ次のように名付けて用いる．定理 1 を実現条件，$[L_{vu}, L_{ru}, L_{v^*u}]/d$ のシステム零点に関する条件を零点条件，well-posedness 条件を行列式条件，$L_{v^*u}P_{uy^*}$ が多項式行列となることを多項式条件と呼ぶ．

（証明） 定理の条件を用いて適切な入出力次元と次数

をもつ制御器を導出することで，条件の十分性が構成的に証明される．更に得られた制御器が実現条件以外に制約を受けない最も一般的な特性伝達関数行列であることを示すことで条件の必要性が示される．以下この道筋に添って証明を行う．

まず行列式条件より，(L_{vu}/d) は逆行列が存在する．これを用いて制御器の伝達関数行列が式 (1b) より以下のように記述される．

$$[C_{rz}, C_{w^*z}] = (L_{vu}/d)^{-1}[L_{ru}, L_{v^*u}]/d \tag{2}$$

行列式条件と実現条件より，$(L_{vu}/d)^{-1}$ と $[L_{ru}, L_{v^*u}]/d$ はいずれもプロパーであるから，それらの積により導出された制御器はプロパーである．つぎに多項式条件より $[L_{vu}, L_{ru}, L_{v^*u}]$ は多項式行列となる．またこの行列は，一般性を失わず行フルランクであり，その階数は操作量の次元である m と仮定できる（そうでない場合は操作量が冗長である）．次に $[L_{vu}, L_{ru}, L_{v^*u}]/d$ を以下のように左分解表現する．

$$[L_{vu}, L_{ru}, L_{v^*u}]/d = {}_LL[{}_RL_{vu}, {}_RL_{ru}, {}_RL_{v^*u}]/d \tag{3}$$

ここで左共通因子 ${}_LL$ は，階数と零点条件及び実現条件から，$\det({}_LL) = d^{m-1}d_p$ を満たす正則な多項式行列である．一方 $[{}_RL_{vu}, {}_RL_{ru}, {}_RL_{v^*u}]$ は，次元が $[L_{vu}, L_{ru}, L_{v^*u}]$ と等しく，${}_RL_{vu}$ が正方正則であること，及び式 (3) がプロパーであること以外には制約がない自由な多項式行列である．式 (3) を用いて式 (2) は次のように変形できる．

$$\begin{aligned}[C_{rz}, C_{w^*z}] &= ({}_LL \cdot {}_RL_{vu}/d)^{-1}{}_LL[{}_RL_{ru}, {}_RL_{v^*u}]/d \\ &= {}_RL_{vu}{}^{-1}[{}_RL_{ru}, {}_RL_{v^*u}] \\ &= (\mathrm{adj}\,{}_RL_{vu}/\det{}_RL_{vu})[{}_RL_{ru}, {}_RL_{v^*u}]\end{aligned} \tag{4}$$

ここで ${}_RL_{vu}{}^{-1}$ は正則な多項式行列の逆行列であり，文献 [2] の補題 2 より $\det{}_RL_{vu}$ を特性多項式として実現条件を満たす．またこの性質は多項式行列を掛けても変わらない．したがって先に示したプロパー性と合わせ，$[C_{rz}, C_{w^*z}]$ は，$\det{}_RL_{vu}$ を特性多項式とする特性伝達関数行列である．$\det{}_RL_{vu}$ の次数に関して次の関係が成立する．

$$\begin{aligned}\delta(\det({}_RL_{vu})) &= \delta(\det(L_{vu}/d^{m-1})) \\ &\quad -\delta(\det({}_LL/d^{m-1}))\end{aligned} \tag{5}$$

行列式条件と実現条件より式 (5) 右辺第 1 項は $\delta(d)$ となる．また ${}_LL$ の性質より右辺第 2 項は $\delta(d_p)$ となる．したがって左辺で定義される制御器の特性多項式の次数は，全系の特性多項式の次数から制御対象の特性多項式の次数を減じた次数となる．以上により定理 2 の条件を満たす $[L_{ru}, L_{v^*u}]/d$ から適切な次数と次元をもつプロパーな制御器が導かれ，定理の十分性が示された．なお，以上の考察により行列式条件は，より具体的に $\det(L_{vu}) = d^{m-1}d_pd_c$ と置き換えられる．

更に，$[{}_RL_{vu}, {}_RL_{ru}, {}_RL_{v^*u}]$ は，既に示したように次元と次数及び ${}_RL_{vu}$，の正則性以外に制約がない任意の多項式行列であるから，式 (4) で導出される制御器は次元と次数及び実現条件以外に制約がない最も一般的な特性伝達関数行列である．以上で定理の必要性も示された．（証明終）

定理 2 の意義は，与えられた制御対象に対して指定可能な制御系の全体像を必要十分条件として表現したことと，指定可能な制御系から制御器の一般解を導出する具体的手段を与えたことである．

3.3 数値例

本節では数値例を用いて本論文の主結果である定理 2 の条件について具体的に説明し，制御器を導出する．制御対象は以下の特性伝達関数行列で記述され，制御量と観測量が共通である 2 入出力システムである．

$$P_{uy^*} = P_{uy} = \frac{\begin{pmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{s-1}$$

ここで，共通分母は特性多項式であり，制御対象は 1 次の状態方程式で実現できる．この制御対象に対し，1 次の制御器を用いて実現可能な DM：$[W_{ru}, W_{v^*u}]$ の例を以下に示す．

$$W_{ru} = \frac{\begin{bmatrix} (s+2)(s+3) & 2(s-1) \\ 0 & (s-1)(s+11) \end{bmatrix}}{(s+2)(s+3)},$$

$$W_{v^*u} = \frac{\begin{bmatrix} (s-2) & -2(s-1) \\ (s-1)(s+8) & -(s-1)(s+11) \end{bmatrix}}{(s+2)(s+3)}$$

この例は，制御系全系の二つの極を -2 と -3 に配置し，更に 1 番目の目標値から 1 番目の制御量までの伝達関数を厳密に 1 としたものである．

上記の $[W_{ru}, W_{v^*u}]$ が定理 2 の条件を満たすことは

以下のように確認できる．まず定理 2 で示した関係式において W_{v^*u} の分子多項式行列は多項式条件を満たし，W_{vu} が以下のように求められる．

$$W_{vu} = \frac{\begin{bmatrix} s^2+6s+4 & -2 \\ s^2+7s-8 & s^2+4s-5 \end{bmatrix}}{(s+2)(s+3)}$$

この W_{vu} は行列式条件を満たす．更に $[W_{vu}, W_{ru}, W_{v^*u}]$ はプロパーであり，2 行 6 列で構成される分子多項式行列において全ての 2 行 2 列の小行列式が全系と制御対象の各特性多項式の積である $(s+2)(s+3)(s-1)$ を因子として含むことから実現条件及び零点条件を満たす．以上により $[W_{ru}, W_{v^*u}]$ は定理 2 の条件を全て満たし，与えられた P_{uy^*} に対する実現可能な DM である．したがってこの $[W_{ru}, W_{v^*u}]$ から 1 次の制御器が一意に導かれる．実際に $[W_{vu}, W_{ru}, W_{v^*u}]$ から式 (2) を用いて制御器を導出すると以下を得る．

$$[C_{rz}, C_{w^*z}] = \frac{\begin{bmatrix} s+5 & 2 & 1 & -2 \\ -s-8 & s+10 & s+8 & -s-10 \end{bmatrix}}{s+6}$$

上式右辺は 1 次の特性多項式を共通分母とする特性伝達関数行列で記述され，合理的である．

次に上記 W_{ru} の分子行列の 1 行 2 列目の要素のゲインを 2 から 1 に置き換え，これを W'_{ru} とする．このとき，$[W_{vu}, W'_{ru}, W_{v^*u}]$ は定理 2 の条件のうち多項式条件，行列式条件及び零点条件を満たすが，分子多項式行列において $(s+2)(s+3)$ を因子として含まない 2 行 2 列の小行列式が存在し，実現条件が満たされない．したがって $[W'_{ru}, W_{v^*u}]$ は実現可能な DM ではない．すなわち与えられた P_{uy^*} に対して $[W'_{ru}, W_{v^*u}]$ を DM とする制御器は存在しない．実際に $[W_{vu}, W'_{ru}, W_{v^*u}]$ から式 (2) を用いて導出した C'_{rz} は以下のように 3 次の特性多項式を共通分母とする特性伝達関数行列で記述され，矛盾が生じている．

$$C'_{rz} = \frac{\begin{bmatrix} (s+5)(s+2)(s+3) & s^2+6s+17 \\ -(s+8)(s+2)(s+3) & s^3+16s^2+63s+52 \end{bmatrix}}{(s+6)(s+2)(s+3)}$$

4. む す び

一般的 2 自由度線形制御系において閉ループ特性伝達関数行列が満たすべき必要十分条件が，特定の伝達関数行列の組に対するシステム零点に関する条件に帰着できることを明らかにした．本論文は文献 [5] で議論した「1 入出力多観測量制御対象の場合」を,「多入出力制御対象の場合」に一般化し，それに伴い，考察の対象である閉ループ特性伝達関数をベクトルから行列に拡張したものである．ただし，閉ループ特性伝達関数の構成要素が文献 [5] と本論文では異なり，定理の条件も新たに構築した．また定理 1 やシステム零点の概念を導入し，これらを利用した行列分解を行った上で，文献 [2] の知見を用いた理論展開を行うことで行列への拡張が可能となった．

上記の結果の理論的意義は，与えられた制御対象に対し，線形制御器で達成できる制御系の全体像を簡潔に示し，信号伝達特性の観点から線形制御の可能性と限界を明らかにした点である．また実用的な意義は，指定可能な閉ループ特性伝達関数集合から対応する制御器集合を，また決定した閉ループ特性伝達関数行列から一意の制御器を導出する算法を与えたことである．更に本定理を用いて実現可能な制御系の未定係数によるパラメトリゼーションを導くことが考えられるが，これについては，その実制御系設計への応用も含め別報とする．

文 献

[1] 尾田政臣，田川遼三郎，“伝達関数行列の実現に関する一定理,” 信学論（A），vol.J62-A, no.9, pp.563–569, Sept. 1979.

[2] 榮坂俊雄，“特性伝達関数行列の必要十分条件,” 信学論（A），vol.J97-A, no.1, pp.53–55, Jan. 2014.

[3] 土手康彦（監修），ロバスト高速サーボ制御技術（第 6 章モデルマッチングとゼロイング），トリケップス，1991.

[4] Y. Tagawa, R. Tagawa, and D. Stoten, “Characteristic Transfer Function Matrix-based Linear Feedback Control System Analysis and Synthesis,” International Journal of Control, vol.82, no.4, pp.585–602, 2009.

[5] 榮坂俊雄，“線形制御系における実現可能な特性伝達関数—1 入出力多観測量制御対象の場合,” 信学論（A），vol.J99-A, no.3, pp.159–162, March 2016.

[6] R. Tagawa, “Dual model matching,” Selected Papers from the IFAC Symposium on Control System Design Method, A volume in IFAC Symposia Series, pp.83–88, 1991.

[7] 須田信英，線形システム理論，朝倉書店，1993.

[8] 前田 肇，杉江俊治，アドバンスト制御のためのシステム制御理論，朝倉書店，1990.

（平成 27 年 12 月 21 日受付，28 年 2 月 16 日再受付）