## 研究速報

# 線形制御系における実現可能な特性伝達関数
## ——1 入出力多観測量制御対象の場合——

榮坂　俊雄[†a)]（正員）

Realizable Characteristic Transfer Functions for Linear Control Systems ——Single-Input Single-Output Multiple-Measurable Variables Plant Case——

Toshio EISAKA[†a)], *Member*

† 北見工業大学情報システム工学科，北見市
Department of Computer Science, Kitami Institute of Technology, 165 Koen-cho, Kitami-shi, 090–8507 Japan
a) E-mail: eisaka@cs.kitami-it.ac.jp

**あらまし**　1 入出力多観測量の線形制御対象に線形制御器を結合した 2 自由度制御系において，閉ループ伝達関数が満たすべき必要十分条件を求め，更に実現可能な制御系の一般表現を導いた．またこの表現に基づく制御系設計の特徴を示した．

**キーワード**　2 自由度制御系，線形制御系設計，伝達関数，1 入力系

### 1. ま え が き

制御系設計に際して，より優れた制御器を導くためには，与えられた制御対象に対して実現可能な制御系の全てが考慮できることが望ましい．これまで，与えられた線形制御対象の既約分解表現と，自由度を表す任意の安定プロパーな伝達関数行列 Q によって，安定化制御器の一般表現が与えられている [1]．更にパラメータ Q を用いたアファイン汎関数により，安定な線形制御系の一般表現が可能であり，制御仕様を満たす Q を決定することで制御系設計を行う Q パラメータアプローチが体系化されている [2]．

一方，線形制御系の実現可能な伝達関数行列に関する必要十分条件を求めた研究がある [3], [4]．文献 [3] は先駆的研究であり，多入力多出力系の一般論であるが定理の表現が複雑で証明は示されていない．文献 [4] では制御対象を 1 入出力多観測量系に限定した場合の定理とその証明を示すとともに，設計例題を提示している．しかし文献 [3] の記述を受け継ぎ，定理及びその証明はやはり複雑である．

本論文では 1 入力 1 出力多観測量制御対象に対する線形制御系に関して新たな観点から簡潔な定理を示し，平易な証明を行うとともに，定理の条件から実現可能な制御系の一般表現を導出した．更に本表現に基づく制御系設計の特徴を Q パラメータアプローチと比較して示した．

序節の残りは表記法をまとめる．本論文では制御対象，制御器，これらを合成した閉ループ系はいずれも線形システムであり，特性多項式を共通分母とする特性伝達関数 [5] で記述される（以下では簡単のため単に伝達関数と記す）．扱う記号の意味は以下のとおりである．$W$，$P$，$C$ はそれぞれ，閉ループ系，制御対象，制御器に関する，添字で表す信号間の伝達関数 (ベクトル) である．$d$，$d_p$，$d_c$ はそれぞれ閉ループ系，制御対象及び制御器の特性多項式，$N_{ab}$ は $W_{ab}$ の零点多項式（特性伝達関数の分子多項式），$n_{ab}$ は $P_{ab}$ または $C_{ab}$（$P$ と $C$ の区別は入出力信号により可能）の零点多項式である．中点 $[\cdot]$ は内積（またはスカラー倍）を，$\delta(\ )$ は括弧内多項式の次数を意味する．

### 2. 閉ループ伝達関数の必要十分条件

本節ではまず本論文で考察する一般的制御系構成と，本構成における，制御器と全系に関する基本的関係式を示す．次に実現可能な制御系の全体像に関する定理とその証明を示す．

#### 2.1 制御系構成と基本的関係式

図 1 は本論文で考察する制御系構成である．主な信号の意味は $r$：目標値，$u$：操作量，$y^*$：制御量 $y$ を含む観測量，$q$：任意の外乱であり，$k$ 及び $g$ はそれぞれ，制御対象及び制御器に関係する任意の信号である．また $v$ 及び $v^*$ は後の考察で必要な仮想的な入力信号である．本論文では 1 入出力多観測量の制御対象を扱い，$r$，$z$，$v$，$u$，$y$，$q$，$k$ 及び $g$ はスカラー信号で，その他 $y^*$，$v^*$，$w^*$ は次元が等しいベクトル信号である．

図 1 において一般に制御対象の伝達関数モデルは完全に与えられる．他方，制御器の伝達関数は因果律を満たすためプロパーであること以外は完全に自由である．したがって制御系の自由度は制御器にのみ由来し，ロバスト性を含む線形制御系全系のあらゆる性質は $[C_{rz}, C_{w^*z}]$ により決定づけられる．式 (1a)，(1b) に示すように，制御器のこれらの伝達関数の組は全系

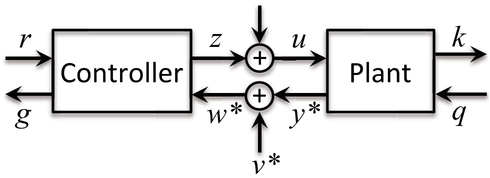


図 1　一般的フィードバック制御系構成
Fig. 1　General feedback control scheme.

  

の伝達関数の組 $[W_{ry}, W_{v^*y}]$ と 1 対 1 の関係にある．

$$[W_{ry}, W_{v^*y}] = \{P_{uy}/(1 - C_{w^*z} \cdot P_{uy^*})\} \cdot [C_{rz}, C_{w^*z}] \tag{1a}$$

$$[C_{rz}, C_{w^*z}] = \{1/(P_{uy} + W_{v^*y} \cdot P_{uy^*})\} \cdot [W_{ry}, W_{v^*y}] \tag{1b}$$

制御系設計において本質的に重要な情報が過不足無く含まれる全系の伝達関数の組：$[W_{ry}, W_{v^*y}]$ を *Dual Model* [3] (以下 DM) と呼ぶ．全系に関する任意の信号間の伝達関数は DM によって表現可能であり DM を決めると一意に定まる．すなわち，DM は全系の伝達関数集合の基底の役割を果たし，線形制御器の設計問題は DM の決定問題に帰着される．

### 2. 2 実現可能な Dual Model

式 (1a) に示すように，DM は制御対象の関数であり，これが制約となるため自由には設定できない．次に実現可能な DM の必要十分条件を定理として示す．

[定理] 入出力信号に見合う適切な次元をもつ共通分母型有理関数ベクトル $[W_{ry}, W_{v^*y}]$ が，1 入出力多観測量の制御対象に対して，図 1 に示す線形制御系の *Dual Model* であるための必要十分条件は，次の条件を同時に満たすことである．

1) $[W_{ry}, W_{v^*y}]$ の相対次数は $P_{uy}$ の相対次数以上である．また $[W_{ry}, W_{v^*y}]$ の分子多項式ベクトルの要素は全て $P_{uy}$ の零点多項式を因子として含む．
2) $W_{vu}$ の分子多項式は制御器の特性多項式と制御対象の特性多項式の積となる．ただし，$W_{vu} = 1 + (1/P_{uy}) \cdot W_{v^*y} \cdot P_{uy^*}$ である．

(証明) 定理の条件 1) 及び 2) を用いて適切な入出力次元と次数をもつ制御器を具体的に導出することで十分性が構成的に証明される．またこのとき得られた制御器が最も一般的な伝達関数であることを示すことで同時に必要性も証明される．

まず式 (1b) は定理の条件 2) のただし書きより次のように書き換えられる．

$$[C_{rz}, C_{w^*z}] = \{1/(P_{uy} \cdot W_{vu})\} \cdot [W_{ry}, W_{v^*y}] \tag{2}$$

定理の条件 1)，2) より，式 (2) 右辺は全系の特性多項式，制御対象の零点多項式及び特性多項式がいずれも分母分子間でキャンセルされ，制御器の特性多項式を共通分母多項式とするプロパーな有理関数ベクトルとなる．またその入力次元は $(r, w^*)$ に，出力次元は $z$ に適合する．以上で十分性が示された．更に式 (2) で導出された条件 1)，2) を満たす共通分母型有理関数ベクトル $[C_{rz}, C_{w^*z}]$ は，プロパー性以外に制約が無く，次数と係数が全て自由に設定できる最も一般的な伝達関数ベクトルである．以上で必要性も示された．(証明終)

本定理は全系の伝達関数の実現可能性が，全系のある種の伝達関数のシステム零点に，制御対象のシステム零点あるいは制御対象と制御器のシステム極を含むことで表されるという簡潔で見通しの良い知見を示している．

## 3. 閉ループ伝達関数の一般表現

本節ではまず，**2.** で示した定理を満たす DM の一般表現を導く．次に全系に関する DM 以外の入出力関係の一般表現について考察する．更にこれらの結果について数値例により具体的に説明する．最後にこの一般表現を用いた制御系設計の特徴を Q パラメータアプローチと比較して示す．

### 3. 1 Dual Model の一般表現

まず，定理の条件 1) のみに着目した DM の候補を以下のように置く．

$$[W_{ry}, W_{v^*y}] = n_{uy} \cdot (X, Y)/d \tag{3}$$

条件 1) より $\delta(d) \geq \delta(d_p)$ であり，$(X, Y)$ は $[W_{ry}, W_{v^*y}]$ とサイズが適合し，$\max(\delta(X), \delta(Y)) \leq \delta(d_c) = \delta(d) - \delta(d_p)$ を満たす未定係数多項式ベクトルである．次に定理の条件 2) より，$W_{vu}$ は次のように記述される．

$$W_{vu} = d_p \cdot d_c/d \tag{4}$$

更に定理の条件 2) のただし書きに示された $W_{vu}$ と $W_{v^*y}$ の関係より $d$ に関して次の関係が導かれる．

$$d = d_p \cdot d_c - Y \cdot n_{uy^*} \tag{5}$$

式 (5) を式 (3) に代入すると，DM の一般表現として式 (6) を得る．

$$[W_{ry}, W_{v^*y}] = n_{uy} \cdot (X, Y)/(d_p \cdot d_c - Y \cdot n_{uy^*}) \tag{6}$$

ここで $d_p$ 及び $n_{uy}$，$n_{uy^*}$ は制御対象によって定められる実係数多項式であり，$X$，$Y$，$d_c$ は先に示したサイズと次数の関係の下で次数と係数が自由な多項式である．なお，式 (2)，(3)，(4) により制御器の伝達関数は以下のように記述される．

$$[C_{rz}, C_{w^*z}] = (n_{rz}, n_{w^*z})/d_c = (X, Y)/d_c \tag{7}$$

### 3.2 任意の閉ループ伝達関数の一般表現

**2.1** で述べたように図 1 において全系のあらゆる伝達関数は DM で表現される．本項では図 1 を，$(r, q)$，$(g, k)$ に関する 2 端子対回路として全ての入出力伝達関数の組合せについて一般表現を求める．

まず，実用上重要な $W_{qk}$（制御対象に加わる任意の外乱 $q$ から，$u$ や $y$ も含む制御対象の任意の信号 $k$ までの閉ループ伝達関数）は，DM と制御対象モデルより以下のとおり導出される．

$$W_{qk} = P_{qk} + P_{uk} \cdot (1/P_{uy}) \cdot W_{v^*y} \cdot P_{qy^*} \tag{8}$$

式 (8) 右辺は以下のように分母多項式が $d$ となるように簡略化される．まず式 (8) 右辺を序節で示した表記法を用いて通分し，分子に式 (5)（ただし，$Y = n_{w^*z}$）を代入して変形すると式 (9) を得る．

$$W_{qk} = \{d_p \cdot d_c \cdot n_{qk} + n_{w^*z} \cdot (n_{qy^*} \cdot n_{uk} - n_{uy^*} \cdot n_{qk})\} /(d_p \cdot d) \tag{9}$$

式 (9) 右辺分子の小括弧内は，制御対象の入力 $(q, u)$ 出力 $(k, y^*)$ 間の特性伝達関数行列の分子行列において $2 \times 2$ の小行列式からなるベクトルであり，文献 [5] の定理より制御対象の特性多項式 $d_p$ を因子として含むか 0 である．したがって式 (9) は $d_p$ が分母分子間でキャンセルされるため，分母多項式は $d$ となる．最終的に $W_{qk}$ の一般表現は次式となる．

$$W_{qk} = \{d_c \cdot n_{qk} + n_{w^*z} \cdot (n_{qy^*} \cdot n_{uk} - n_{uy^*} \cdot n_{qk})/d_p\} /(d_p \cdot d_c - n_{w^*z} \cdot n_{uy^*}) \tag{10}$$

他の入出力信号の組み合わせに関する閉ループ伝達関数については共通分母を省略し，分子のみを記す．

$$N_{rg} = n_{rg} \cdot d_p + \{(n_{rz} \cdot n_{w^*g} - n_{rg} \cdot n_{w^*z})/d_c\} \cdot n_{uy^*} \tag{11}$$

$$N_{rk} = n_{rz} \cdot n_{uk} \tag{12}$$

$$N_{qg} = n_{w^*g} \cdot n_{qy^*} + (n_{w^*g} \cdot n_{uy^*} \cdot n_{w^*z} \cdot n_{qy^*} - n_{w^*g} \cdot n_{qy^*} \cdot n_{w^*z} \cdot n_{uy^*})/d_p \cdot d_c \tag{13}$$

式 (11) 及び (13) においても式 (9) と同様に文献 [5] の定理より $d_c$ 及び $d_p \cdot d_c$ は約分される．式 (10)～(13) に含まれる未定係数による多項式は，制御器に関わる $d_c$ と $n_{rz}$，$n_{w^*z}$ の 3 種類であり，他はこれらの未定係数の従属変数を係数とする多項式，または制御対象により定められる実係数多項式である．

### 3.3 数 値 例

本項では，具体的な制御対象に対して **3.1** 及び **3.2** で示した一般表現を導く．制御対象は RLC 電気回路とする．操作量は入力電圧であり，制御量はコンデンサ電流とし，これ以外にコンデンサに加わる電圧も観測可能とする．制御対象の特性伝達関数モデルを次式に示す．

$$P_{uy^*} = [s, 5]^{\mathrm{T}}/(s^2 + 2s + 5)$$

$[\,]^{\mathrm{T}}$ は転置を意味し，$P_{uy^*}$ の 1 行目が $P_{uy}$ である．

上記制御対象に対し，式 (3) より，全系 2 次以上（制御器 0 次以上）の DM が構築可能である．そこでまず，ゲインベクトルによる静的制御を考える．このとき実現可能な DM は，上式より得られる $d_p$ 及び $n_{uy}$，$n_{uy^*}$ を式 (6) に代入し，サイズと次数を考慮して $(X, Y) = (x, y_1, y_2)$，$d_c = 1$ と置いて以下のように導かれる．

$$[W_{ry}, W_{v^*y}] = \{s(x, y_1, y_2)\} /\{s^2 + (2 - y_1)s + 5(1 - y_2)\}$$

上記の表現より，観測量ゲインフィードバックによって全系の特性極を全て自由に配置できること，極を二つとも指定すると $W_{v^*y}$ の分子には自由度が残らないこと，$W_{ry}$ の分子定数は自由だが，零点として $s$ を含むこと，などが明らかである．

次に制御器を 1 次とした場合，$(X, Y) = (x_1 s + x_0, y_{11}s + y_{10}, y_{21}s + y_{20})$，$d_c = s + d_{c0}$ と置くと，全系の実現可能な DM は以下となる．

$$\begin{aligned}&[W_{ry}, W_{v^*y}]\\ &= \{s(x_1 s + x_0, y_{11}s + y_{10}, y_{21}s + y_{20})\}/\\ &\quad \{s^3 + (d_{c0} - y_{11} + 2)s^2 + (2d_{c0} - y_{10} - 5y_{21} + 5)s\\ &\quad + 5(d_{c0} - y_{20})\}\end{aligned}$$

これより，制御器を動的にすることによって，極を全て指定しても $W_{v^*y}$ の分子に自由度が残ることが分かる．また自由度を電流ループや電圧ループのどちらかに偏って残すことや両方の定数項に残すなど，残し方も選択できる．残された自由度は設計仕様に応じて数値的最適化や解析的条件を満たすために利用できる．例えば，操作量に加わる外乱 $v$ に対するコンデンサにかかる電圧 $y2$ への影響を抑制する制御系を設計したい場合，まず，式 (10) により当該伝達関数を求めると以下を得る．ただし分母多項式 $d$ は上記 DM と共通

である．

$$W_{vy2} = 5(s + d_{c0})/d$$

ステップ状入力外乱に対して電圧定常値が 0 となるためには，最終値定理より $d_{c0} = 0$ とすればよい．$d_{c0}$ は制御器分母多項式の定数項であり，これを 0 にすることで内部モデルが実現されると考えられる．このように，本表現は，設計の見通しが良く，自由度を，着目する入出力関係ごとに利用でき，また自由度の分配が可能である．次項で本表現による制御系設計の特徴を一般論としてまとめる．

### 3．4 本表現に基づく制御系設計の特徴

前項で示したように，式 (6) 及び式 (10)〜(13) に基づく制御系表現は，自由度が多項式の未定係数として分節的に表現される．このため，安定制御系において自由度が汎関数で表現される Q パラメータアプローチと比較して以下の特徴をもち，多様で柔軟な制御系設計を可能とする．

・不安定な制御系も設計可能である，
・制御器の (最大) 次数を指定した設計が可能である，
・着目する入出力関係ごとに自由度を部分的に分離して利用可能である，
・多様な数値最適化手法や解析手法を導入できる，
・複数の目的を同時に，あるいは優先順に段階的に考慮できる，
・制御対象の一部パラメータが調整可能である場合の設計問題である「制御対象と制御器の同時最適化問題」や「線形パラメータ変動 (LPV) システムの設計」も全く同じ枠組みで考慮できる．

## 4．む す び

1 入出力多観測量の制御対象に対して実現可能な *Dual Model* (DM) が満たすべき必要十分条件について，簡潔な定理と一般表現を示した．基底としての DM の選び方は一意ではない．文献 [4] では同様の問題設定において操作量に着目した $[W_{ru}, W_{v^*u}]$ を DM として選び，類似の結果を得ている．本論文では設計目的を直接反映する制御量に着目した $[W_{ry}, W_{v^*y}]$ に関して新しい簡潔な定理及び知見を示すとともに平易で見通しがよい証明を行った．更に定理の条件から実現可能な制御系の一般表現を直接導出した．また，この一般表現に基づく制御系設計が，Q パラメータアプローチと相補的な設計基盤となり得ることを示した．

本項で示した定理は多入出力系への拡張が可能である．このためには特性多項式を共通分母とする特性伝達関数を行列に拡張する必要があり，その際，分子行列の小行列式に対する条件 [5] が新たに必要となる．また零点についても行列としての定義や条件が必要である．このため，本論文で示したベクトルの要素に対する条件を単純に行列の要素に対する条件として置き換えることで定理を拡張することはできず，より一般的な新たな議論が必要となる．これは定理と関連する一般表現についても同様である．これらの詳細に関しては別報とする．

## 文　献

[1] D.C. Youla, H. Jabr, and J.J. Bongiorno, “Modern Wiener-Hopf design of optimal control controllers: Part I The multivariable case,” IEEE Trans. Autom. Control, vol.21, no.1, pp.319–338, 1976.

[2] M. Vidyasagar, Control system synthesis, The MIT Press, Cambridge, 1985.

[3] R. Tagawa, “Dual Model Matching,” Reprint from 1st IFAC Symposium on Control System Design Method, vol.1, pp.131–136, 1991.

[4] Y. Tagawa, R. Tagawa, and D. Stoten, “Characteristic transfer function matrix-based linear feedback control system analysis and synthesis,” International Journal of Control, vol.82, no.4, pp.585–602, 2009.

[5] 榮坂俊雄，“特性伝達関数行列の必要十分条件,” 信学論（A），vol.J97-A, no.1, pp.53–55, Jan. 2014.

（平成 27 年 8 月 3 日受付，10 月 1 日再受付）