研究速報

特性伝達関数行列の必要十分条件

榮坂　俊雄† (正員)

Necessary and Sufficient Conditions for Characteristic Transfer Matrices

Toshio EISAKA†, *Member*

† 北見工業大学情報システム工学科，北見市
Department of Computer Science, Kitami Institute of Technology, 165 Koen-cho, Kitami-shi, 090–8507 Japan

あらまし　共通分母型有理関数行列が，特性多項式を共通分母とする伝達関数行列であるための必要十分条件について，既出の証明に較べ簡潔で見通しが良い別証を与えた．また特別な場合に条件が簡略化されることを示すとともに，零点や逆行列に関する新たな知見を導いた．

キーワード　伝達関数，特性多項式，実現，システム零点

1. まえがき

線形時不変多変数系の入出力関係を表す伝達関数行列は，行列分解，有理関数行列，マルコフパラメータなど，それぞれ特徴をもつ表現が利用されている．本論文では有理関数行列のなかで特性多項式を共通分母とする多項式行列（以下，特性伝達関数行列と呼ぶ）を考察の対象とする．

特性伝達関数行列は，スカラー系と同じ式表現で状態空間の係数行列と対応づけられる．このとき，特性多項式が約分されずに陽に現れるため，システム極が直接反映される．このため，安定性，プロパー性，次数，不可制御･不可観測による隠れモードの存在などのシステムの基本的な性質が直接表現されるという特徴がある．また分母がスカラーであるため，システムの結合等に伴う演算も容易である．更に非正則，不可逆なシステムも扱うことができ，最も一般的な表現である．ただし，それらの特徴を保持するために，分子行列は任意ではなく，制約があることに注意が必要である．

どのようなクラスの共通分母型有理関数行列が特性伝達関数行列となり得るか，すなわち，共通分母多項式の次数と同じ次数の状態空間表現と対応づけられるか，という基本問題に対して，既に定理として必要十分条件が明らかにされている [1]．しかし文献 [1] で示された定理の証明は複雑で冗長である．本論文では見通しが良い簡潔な別証を与え，システム論の視点から定理に対する洞察を深めた．更に，システム極が全て相異なる場合に定理の条件が簡略化されることを示すとともに，零点の導出や逆行列の性質に関する新たな知見を明らかにした．

2. 特性伝達関数行列

線形時不変多変数系の伝達関数行列は，特性多項式を共通分母とし，多項式行列を分子とする実有理関数行列で表現することができる．本論文ではこれを特性伝達関数行列（Characteristic Transfer Matrix：以下 CTM と記す）と呼ぶ．ある共通分母型多項式行列が CTM であるための条件については次の定理が明らかにされている [1]．ただし本論文では非正則，不可逆なシステムも扱えるように一般化している．

[定理]　n 次モニック多項式 $d(s)$ を共通分母とし，多項式行列 $N(s)$ を分子行列とする実有理関数行列 $G(s)$ が，$d(s)$ を特性多項式とする状態方程式により実現可能であるための必要十分条件は，次の二つの条件を同時に満たすことである．

(1) $N(s)$ の全ての要素は n 次以下の多項式である．

(2) $N(s)$ の 0 以外の全ての k 次小行列式は $d(\mathrm{s})^{k-1}$ を因子としてもつ．ただし，$k = 1, 2, \ldots, \rho$．$\rho = \mathrm{rank}\, N(s)$．

システム極が全て相異なる場合には定理の条件 (2) は，より簡明な表現となる．これを系として示す．

[系]　特性方程式 $d(s) = 0$ の解 λ_i: $i = 1, 2, \ldots, n$ が全て相異なる場合，定理の条件 (2) は条件 (2a) に置き換えられる．

(2a) $N(\lambda_i)$ の階数は，全ての λ_i に関し，1 以下である．

以下ではまず系の証明を示し，その後，定理の証明を行う．

(系の証明)

(必要性)　定理の条件 (2) が成立すれば $N(s)$ の 2 次以上の全ての小行列式は $d(s)$ を含むので，$N(\lambda_i)$ の 2 次以上の全ての小行列式は 0 となり，系の条件 (2a) が成立する．

(十分性)　$G(s)$ が定理の条件 (1) 及び系の条件 (2a) を満たすとき，同じ入出力数・システム次数をもつ実現 (A, B, C, D) の存在を具体的に示すことで構成的に証明する．まず，$d(s) = 0$ の解が全て相異なる場合，定理の条件 (1) が成り立てば，$G(s)$ は式 (1) のように部分分数展開可能である．

$$G(s) = \sum_{i=1}^{n} k_i \frac{N(\lambda_i)}{s - \lambda_i} + D \tag{1}$$

ただし，k_i は定数，D は $G(s)$ と同じサイズの定数行列である．更に系の条件 (2a) が成り立てば

式 (1) において，$k_i N(\lambda_i)$ は最大階数分解により $C_i B_i$ と表現できる．ここで C_i は $G(s)$ の出力と同じ要素数をもつ定数列ベクトル，B_i は $G(s)$ の入力と同じ要素数をもつ定数行ベクトルである．以上により $G(s)$ は，$A = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$，$B = ({B_1}^T, B_2^T, \cdots, {B_n}^T)^T$，$C = (C_1, C_2, \cdots, C_n)$，$D = D$ によって状態空間表現可能である．

（定理の証明）

（必要性） 条件 (1) は因果律を満たすために必要である．条件 (2) の必要性は **3.** で補題 2 に関連して言及するようにスミス標準形を用いて，更に簡便に示すことができるが，以下では後に述べる補題の導出や十分性の証明との記号の統一を考慮した証明を行う．

$G(s)$ は $d(s)$ を特性多項式として実現可能であると仮定する．このとき実現 (A, B, C, D) に対するローゼンブロックのシステム行列 [2] から可逆な部分システムを抽出した正方行列は次のように表される．

$$ {}_kP_{ij}(s) = \begin{bmatrix} A - sI & B^j \\ C^i & D^{ij} \end{bmatrix} \tag{2} $$

ここで，B^j，C^i，D^{ij} は行列 B，D の $j_1, j_2, \ldots, j_k$ 列，C，D の $i_1, i_2, \ldots, i_k$ 行のみからなる行列である．ただし，これらの行，列の選び方は ${}_kP_{ij}$ が正則となるものとする．このとき，各 k 入出力部分システムに対するシステム零点 [2] は次式の解で求められる．

$$ z_k(s) = \gcd_{i,j}[\det {}_kP_{ij}(s)] = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, \rho \tag{3} $$

ただし，$\gcd[\,\cdot\,]$ は，$[\,\cdot\,]$ 内の多項式の，上記に示した i，j の全ての選択に関する最大公約多項式である．

仮定より $\det(sI - A) = d(s)$ であり，${}_kP_{ij}$ に関する分割マトリクスの行列式の性質を用いると式 (3) の $z_k(s)$ は次のように計算される．

$$ \begin{aligned} z_k(s) &= \gcd_{i,j}\Big[\det(A - sI) \\ &\qquad \cdot \det\Big(D^{ij} + C^i(sI - A)^{-1}B^j\Big)\Big] \\ &= \gcd_{i,j}\left[\det(A - sI) \cdot \det\left(\frac{N^{ij}(s)}{d(s)}\right)\right] \qquad (4) \\ &= \frac{\gcd_{i,j}[\det N^{ij}(s)]}{d(s)^{k-1}} \end{aligned} $$

ただし，$N^{ij}(s)$ は i 及び j の選択に対応する $N(s)$ の部分行列である．これにより，$N(s)$ に関し，k 次小行列式の中に 0 以外で一つでも $d(s)^{k-1}$ を因子としてもたないものがあれば，$\gcd[\det N^{ij}(s)]$ が $d(s)^{k-1}$ を因子としてもたず，システム零点多項式 $z_k(s)$ が有理式になり，不合理である．以上で背理法により定理の条件 (2) の必要性が示された．

（十分性） 条件 (1) を満たし，要素が全てプロパーな有理関数である伝達関数行列は，そのマクミラン次数で最小実現可能であることがよく知られている．マクミラン次数は与えられた伝達関数行列の 0 を除く全ての小行列式を既約な有理関数で表現したとき，それらの最小公倍分母多項式の次数として求められる．そこで $G(s)$ が条件 (2) を満たすとき $G(s)$ のマクミラン次数が n 次以下であることを示せば，$G(s)$ が $d(s)$ を特性多項式として実現できることが示される．

$G(s)$ の k 次小行列式 $G_k(s)$ は，必要性の証明で用いた表記により次のように記述される．

$$ G_k(s) = \frac{\det N^{ij}(s)}{d(s)^k} \tag{5} $$

条件 (2) より，全ての i，j の選択に関して，$\det N^{ij}(s)$ は $d(s)^{k-1}$ を因子としてもつか 0 である．そこで $G(s)$ の 0 を除く全ての小行列式を有理関数表現するとき，そのモニックな分母多項式を全て $d(s)$ とすることができる（分母分子間で更に約分できる場合も約分しない）．一方，マクミラン次数は，上記の過程に既約という操作を加えるのであるから，明らかに $d(s)$ の次数と同じか小さい．以上で十分性が示された．

文献 [1] で与えられた証明は複雑で，見通しが良いものとは言えない．これは定理で求められる内容に対し，情報過多なジョルダン標準形を基礎としているためである．本章で示した証明は定理の内容に応じた情報をもつスミス標準形段階の解析であるため簡潔であり，システム行列を基礎としているため，次章に示すように零点や逆行列に関する知見を容易に誘導できるという特徴がある．

3. 零点及び逆行列に関する補題

ここでは定理に関連して得られる新しい知見を，幾つかの補題として示す．また各補題の証明を定理の証明と関連づけて行う．

［補題 1］ CTM のシステム零点の導出方法

モニック多項式 $d(s)$ を共通分母とし，多項式行列 $N(s)$ を分子行列とする実有理関数行列 $G(s)$ が CTM であれば，そのシステム零点は以下の等式の解として導出できる．

$$\frac{\Delta_\rho(s)}{d(s)^{\rho-1}}=0 \tag{6}$$

ここで $\Delta_\rho(s)$ は $N(s)$ の ρ 次の行列式因子である．また $\rho=\mathrm{rank}\,N(s)$ である．

(補題 1 の証明) $G(s)$ のシステム零点は，定理の必要性の証明で示した式 (4) において $k=\rho$ の場合であることから明らかである．

[補題 2] 多項式行列の逆行列

正則な多項式行列 $L(s)$ の逆行列は，$\det L(s)$ を特性多項式として定理の条件 (2) を満たす．更に $L(s)$ が行 (または列) プロパー，すなわち，行 (または列) の次数の和が行列式の次数と等しいとき，$L(s)$ の逆行列は，定理の条件 (1) も満たし，$\det L(s)$ を特性多項式とする CTM である．ただし，一般性を失わず，$\det L(s)$ をモニック多項式とする．

(補題 2 の証明) 多項式行列の左右からユニモジュラ行列を掛けても定理の条件 (2) に関する性質は不変であるから，正則な多項式行列 $L(s)$ として一般性を失わずスミス標準形を仮定する．すなわち $m\times m$ 多項式行列 $L(s)$ は式 (7) で示されるように単因子多項式 μ_i からなる対角標準形とする．

$$L(s)=diag(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_m),\quad \prod_{i=1}^{m}\mu_i=\det L(s) \tag{7}$$

このとき，$L(s)$ の逆行列は $\det L(s)$ を共通分母多項式として以下のように表現される．

$$L(s)^{-1}=\frac{diag\left(\dfrac{\det L(s)}{\mu_1},\dfrac{\det L(s)}{\mu_2},\cdots,\dfrac{\det L(s)}{\mu_m}\right)}{\det L(s)} \tag{8}$$

式 (8) 右辺が $\det L(s)$ を特性多項式として定理の条件 (2) を満たすことは明らかである．更に $L(s)$ が行 (または列) プロパーであれば $L(s)$ の逆行列はプロパーであることは文献 [3]，補題 4.5 の特別な場合として容易に導かれる．

[補題 3] CTM の逆行列

モニック多項式 $d(s)$ を共通分母とし，正則な多項式行列 $N(s)$ を分子行列とする実有理関数行列 $G(s)$ が CTM であり，逆行列 $G(s)^{-1}$ がプロパーであれば，$G(s)^{-1}$ も CTM となる．このとき $G(s)^{-1}$ のシステム極は $G(s)$ のシステム零点である．また $G(s)^{-1}$ のシステム零点は $G(s)$ のシステム極と等しい．

(補題 3 の証明) 仮定より $G(s)^{-1}$ は定理の条件 (1) を満たす．また補題 2 の前半部より $N(s)^{-1}$ は定理の条件 (2) を満たすので，これに多項式 $d(s)$ を掛けて得られる $G(s)^{-1}$ は定理の条件 (2) も満たす．したがって $G(s)^{-1}$ は CTM である．

さて $N(s)$ を $m\times m$ 多項式行列とすると $G(s)$ の逆行列は次のように計算される．

$$G(s)^{-1}=\frac{adjN(s)/d(s)^{m-2}}{\det N(s)/d(s)^{m-1}} \tag{9}$$

仮定より $G(s)$ は CTM であり，$\mathrm{rank}\,N(s)=m$ であるから，定理の条件 (2) より，式 (9) の分子分母は，$d(s)^{m-2}$ 及び $d(s)^{m-1}$ がキャンセルされ，それぞれ多項式行列及び多項式となる．-このとき，式 (9) の分母は $G(s)^{-1}$ の特性多項式であると同時に，補題 1 より，$G(s)$ のシステム零点である．また $G(s)^{-1}$ と $G(s)$ を交換することで逆に $G(s)^{-1}$ のシステム零点は $G(s)$ のシステム極と等しいことが示される．

各補題はそれぞれ次のような意義をもつ．システム零点は実現 (A,B,C,D) を用いてシステム行列から定義されるが，補題 1 によれば，状態空間表現を介さずに特性伝達関数行列から直接得られる．補題 2 は多項式行列の逆システムが CTM となるための十分条件を与えている．また補題 2 の証明は，$L(s)=(sI-A)$ と置くと，定理の条件 (2) の必要性自体の，更なる別証としても利用できる．補題 3 は逆システムのシステム零点は元のシステムのシステム極と一致することを示すと同時に，式 (9) は逆システムの計算途中における次数の肥大化を防ぐ算法として有用である．

4. む す び

特性伝達関数行列は，システムの基本的性質を直接，明解に表すとともに，操作性の良い表現である．一方でその有用性を保持するために，行列に制約条件が付加される．本論文では与えられた共通分母型有理関数行列が特性伝達関数行列であるための必要十分条件について，簡潔で見通しの良い別証を示し，システム論として洞察を深めた．更に特別な場合としての系及び，零点の導出や逆行列の性質に関する新たな知見を導いた．

文 献

[1] 尾田政臣，田川遼三郎，“伝達関数行列の実現に関する一定理，” 信学論（A），vol.J62-A, no.9, pp.563–569, Sept. 1979.

[2] 須田信英，線形システム理論，朝倉書店，1993.

[3] 須田信英，児玉慎三，システム制御のためのマトリクス理論，計測自動制御学会，1978.

（平成 25 年 4 月 15 日受付，7 月 29 日再受付）