

阻止域と通過域の両方が同時に等リプル特性になる RC ポリフェーズフィルタの素子値設計法と素子値広がり の検討

田邊 寛朗[†] 谷本 洋[†]

[†] 北見工業大学電気電子工学科
〒090-8507 北見市公園町 165 番地

あらまし 多段 RC ポリフェーズフィルタの阻止域と通過域が同時に等リプルになる素子値の設計手法について報告する。等リプル特性を有する RC ポリフェーズフィルタの素子値設計手法については数値計算を経て準最適な解を得る方法が知られているが、厳密な設計手法は知られていない。本報告では、係数マッチング法を用いることにより、等リプル特性を持つ RC ポリフェーズフィルタの数値解による素子値設計手法を提案する。この手法は零点時定数配置順序に制約がなく、全ての零点時定数の組み合わせに対して素子値の計算が可能となる。素子値広がり と面積和の観点から評価関数を定義し、零点配置順序について検討した結果、段数によって最適な配置順序が異なることを見出した。キーワード RC ポリフェーズフィルタ、等リプル設計、素子値設計、素子値広がり、アナログ複素係数フィルタ

Design and Element Value Spread Considerations for RC Polyphase Filters with Simultaneously Equal Ripple both in Stopband and Passband

Hiroaki TANABE[†] and Hiroshi TANIMOTO[†]

[†] Dept. of Electrical and Electronic Eng., Kitami Institute of Technology
165, Koen-cho, Kitami, 090-8507 Japan

Abstract An element value design method for RC polyphase filters having equal ripple characteristics both in passband and stopband has been proposed. A sub-optimal design method for the equal ripple characteristics has been proposed previously [2]; however, any method that gives the exact element values for the equal ripple RC polyphase filters seems to have not been reported. This report presents a numerical design method for the equal ripple RC polyphase filters, which permits any sequence of the transmission zeros. Using this method, we investigated into relations between transmission-zero sequence and element-value spread. We found that there are zero sequences with much smaller element value spread than conventional descending or ascending order of zero sequences.

Key words RC polyphase filter, equal ripple design, element value design, element value spread, analog complex coefficient filter

1. はじめに

抵抗とコンデンサで構成される RC ポリフェーズフィルタは無線通信システム中のイメージ除去に用いられる回路ブロックである。最近の広帯域化に 대응するためには、1 段の RC ポリフェーズフィルタでは阻止域と通過域の帯域幅が狭いので、多段接続しなければならない。阻止域と通過域の両方が同時に等リプル特性になる RC ポリフェーズフィルタの設計手法は、数値計算により準最適な解を得る設計方法 [2] が知られているが、完全に等リプルになる素子値設計手法は知られていない。文献 [2] の方法でも実用上、十分小さいリプルが得られるが、零点時定数の配置順序が降順又は昇順に制限される。

阻止域と通過域の両方が同時に等リプルになる RC ポリフェーズフィルタの伝達関数は文献 [1] で与えられており、かつ、回路の F 行列から伝達関数が得られることから、素子値を得ることができるはずである。本報告では係数マッチング法を用いることにより、RC ポリフェーズフィルタの数値解による素子値設計手法を提案する。この手法を用いれば文献 [2] の設計手法とは異なり、零点時定数配置順序の制約がない。この自由度を利用すると、実装上、素子値広がりや面積和で有利な素子値を得られる可能性があり、素子値広がり と面積和の 2 つの観点から評価関数を定義し、全ての零点時定数配置順序について計算を行い、最適な組み合わせの検討を行った。

2. RC ポリフェーズフィルタの伝達関数 [1]

通過域と阻止域が同時に等リプルとなる RC ポリフェーズフィルタは n , x , ε の 3 つのパラメータで特徴づけられる. n は RC ポリフェーズフィルタの段数, x は $x \equiv \sqrt{\omega_L/\omega_H} (< 1)$ (ここで, ω_L , ω_H は通過域, 阻止域の上下端の各周波数) で定義される帯域幅の逆数の平方根, ε はリプルである. これら 3 つのパラメータは互いに独立ではなく, 次の関係式が成り立つ.

$$4n \times K(x^2)/K(\sqrt{1-x^4}) = K(\sqrt{1-\varepsilon^4})/K(\varepsilon^2) \quad (1)$$

よって, 3 つのうち 2 つを決めると自動的に残りの 1 つが決まる. ここで, $K(k)$ は母数 k の第一種完全楕円積分である. 通過域のリプル a_p と阻止域のリプル a_s は, パラメータ ε を用いて次式で計算することができる.

$$a_p = 10 \log(1 + \varepsilon^2), \quad a_s = 10 \log(1 + 1/\varepsilon^2) \quad (2)$$

阻止域と通過域の両方が同時に等リプル特性を有する RC ポリフェーズフィルタの電圧伝達関数は次式で与えられる [1].

$$H(s) = \prod_{r=1}^n \frac{sx + j \operatorname{dn} \left[\left(\frac{2r-1}{2n} \right) K(\sqrt{1-x^4}), \sqrt{1-x^4} \right]}{sx + cs \left[\left(\frac{2r-1}{2n} \right) K(\sqrt{1-x^4}), \sqrt{1-x^4} \right]} \quad (3)$$

ここで, $\operatorname{dn}(\cdot)$ と $\operatorname{cs}(\cdot)$ はヤコビの楕円関数である.

式 (3) を, 次のように展開し, 実係数 b_i ($i = 1, 2, \dots, n$) を用いて整理する.

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{(1 - js\tau_1^{[Z]})(1 - js\tau_2^{[Z]}) \cdots (1 - js\tau_n^{[Z]})}{(1 + s\tau_1^{[P]})(1 + s\tau_2^{[P]}) \cdots (1 + s\tau_n^{[P]})} \\ &= \frac{(1 - js\tau_1^{[Z]})(1 - js\tau_2^{[Z]}) \cdots (1 - js\tau_n^{[Z]})}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0} \end{aligned} \quad (4)$$

このとき, 零点と極の時定数は次式で与えられる.

$$\tau_r^{[Z]} = \left\{ \frac{1}{x} \operatorname{dn} \left[\left(\frac{2r-1}{2n} \right) K, \sqrt{1-x^4} \right] \right\}^{-1} \quad (5)$$

$$\tau_r^{[P]} = \left\{ \frac{1}{x} \operatorname{cs} \left[\left(\frac{2r-1}{2n} \right) K, \sqrt{1-x^4} \right] \right\}^{-1} \quad (6)$$

これら零点の時定数 $\tau_r^{[Z]}$ と極の時定数 $\tau_r^{[P]}$ の大小関係を

$$\tau_1^{[Z]} > \tau_2^{[Z]} > \cdots > \tau_{(n-1)}^{[Z]} > \tau_n^{[Z]} \quad (7)$$

$$\tau_1^{[P]} > \tau_2^{[P]} > \cdots > \tau_{(n-1)}^{[P]} > \tau_n^{[P]} \quad (8)$$

とし, 降順となるよう番号を付け替える.

3. F 行列を用いた伝達関数

1 段の RC ポリフェーズフィルタの回路は図 1 で示される. もし, 4 つの入力信号の電源電圧が等しく, 互いに 90° 位相の異なる 4 相電源であれば, 図 1 は対称な 4 相回路である. したがって, 回路の入力電圧と入力電流を

$$V_{in2} = jV_{in1}, \quad V_{in3} = -V_{in1}, \quad V_{in4} = -jV_{in1}, \quad (9)$$

$$I_{in2} = jI_{in1}, \quad I_{in3} = -I_{in1}, \quad I_{in4} = -jI_{in1}, \quad (10)$$

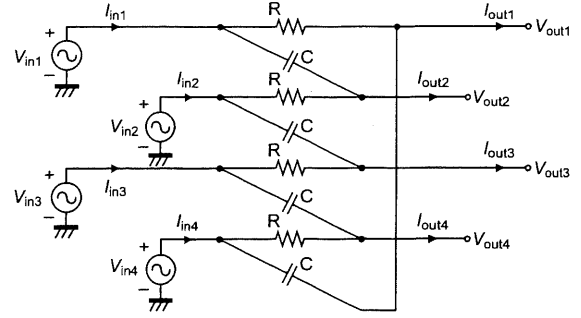


図 1 1 段の RC ポリフェーズフィルタ

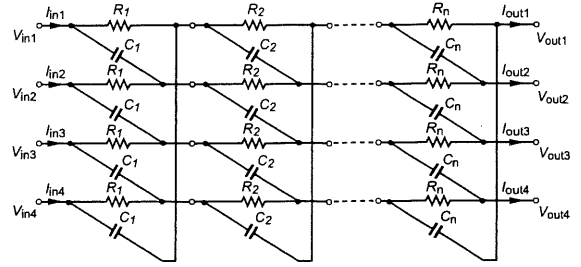


図 2 n 段, 縦続接続した RC ポリフェーズフィルタ

とすると, 出力電圧と出力電流は

$$V_{out2} = jV_{out1}, \quad V_{out3} = -V_{out1}, \quad V_{out4} = -jV_{out1}, \quad (11)$$

$$I_{out2} = jI_{out1}, \quad I_{out3} = -I_{out1}, \quad I_{out4} = -jI_{out1}, \quad (12)$$

で与えられる. よって, 対称性からこの回路は通常の 4 端子回路に対する F 行列で考えることができ, 1 段の RC ポリフェーズフィルタの F 行列は

$$F = \frac{1}{1 - jsCR} \begin{pmatrix} 1 + sCR & R \\ 2sC & 1 + sCR \end{pmatrix} \quad (13)$$

となる [1], [2].

RC ポリフェーズフィルタを n 段, 縦続接続したとき, 全体の F 行列は

$$\begin{pmatrix} V_{in} \\ I_{in} \end{pmatrix} = F_1 F_2 \cdots F_n \begin{pmatrix} V_{out} \\ I_{out} \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$= \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1 - jsC_i R_i)} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{out} \\ I_{out} \end{pmatrix} \quad (15)$$

と得られる. ここで, F_i は第 i 段の F 行列, R_i と C_i は第 i 段の抵抗とコンデンサである. よって, RC ポリフェーズフィルタの電圧伝達関数 $H(s)$ は

$$H(s) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{(1 - jsC_1 R_1) \cdots (1 - jsC_n R_n)}{A} \quad (16)$$

で得られる.

F 行列の要素 A は s の n 次の多項式であり, 実係数 a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) を用いて表せる. したがって,

$$H(s) = \frac{(1 - jsC_1 R_1)(1 - jsC_2 R_2) \cdots (1 - jsC_n R_n)}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \quad (17)$$

と書き換える.

4. 係数マッチング法を使った素子値決定

零点時定数 $\tau_r^{[Z]}$ と極時定数 $\tau_r^{[P]}$ の値で表した、阻止域と通過域が同時に等リプルになる電圧伝達関数は式 (4) で与えられる。一方、抵抗とコンデンサの素子値で表した、 n 段の RC ポリフェーズフィルタの電圧伝達関数は式 (17) で与えられる。よって、これら 2 つの伝達関数が一致する条件より等リプル特性を持つ素子値を得ることができる。

各段の R_i と C_i の積値 $R_i C_i$ は $H(s)$ の零点の時定数により拘束されているから、与えられた極の位置を満足するように R_i と C_i の値に分解しなければならない。その条件式は非線形であるから、解析的に素子値を得ることはできず、数値解によらざるを得ない。本報告では、フィルタ合成の分野で使用されている係数マッチング法 [3] を用いた。

係数マッチング法は式 (4) と式 (17) の多項式の分母同士と分子同士の同じ次数の係数を一致させることにより解を得る。それは次の n 次の非線形連立方程式となる。

$$\begin{cases} a_i(R_1, C_2, \dots, R_n, C_n) = b_i(\tau_1^{[P]}, \tau_2^{[P]}, \dots, \tau_n^{[P]}) \\ R_i C_i = \tau_r^{[Z]} \end{cases} \quad (18)$$

ここで、 $a_0 = a_n = b_0 = b_n = 1$ が常に成り立つ (文献 [2], 付録 1. 参照)。

零点の時定数から容量値を消去すると、未知数である抵抗は n 個であるのに対して多項式の数は $(n-1)$ 個であるから、任意に $R_1 = 1 [\Omega]$ として式 (18) を解く。他の抵抗値に対する解はインピーダンススケールリングをすることにより得られる。式 (18) は *Mathematica*TM を使って解いた。

設計例として、 $n = 4$ 段、比帯域 $\omega_H/\omega_L = 100$ の場合の素子値を表 1 と図 3, 図 4 に示す。

文献 [2] の手法では、零点の時定数は昇順又は降順のみにしか配置できないが、提案した係数マッチング法による素子値設計は式 (18) の第 2 式のように $i \neq r$ でもよいから、時定数の順序が昇順、降順だけでなく全ての組み合わせについて解が得られる。つまり、 n 段であれば、 $n!$ 通りの零点の時定数配置順序について設計が可能である。文献 [2] の結果から、降順、昇順では比帯域 ω_H/ω_L と段数 n が大きいと素子値広がり非常に大きくなる。しかし、零点の順序を入れ換えることにより、実装上、有利な素子値が得られる可能性があるため、次節で素子値広がりについて評価関数を定義し、素子値広がり最小になる零点配置順序について検討する。

5. 素子値広がりに関する検討

問題となるのは、素子値の広がりをもどのような観点から評価するかという事である。次の 2 点の観点から評価関数を決めた。

■ 素子値広がりに関する検討：抵抗の最大値と最小値の比 $\{R_{max}/R_{min}\}$ と、コンデンサの最大値と最小値の比 $\{C_{max}/C_{min}\}$ は、インピーダンススケールリングと周波数スケールリングに対して不変である。したがって、素子値広がり観点からは、同種素子値の比が小さい零点時定数配置順序を選ぶべきである。よって、評価関数 M_1 を

$$M_1 = \frac{R_{max}}{R_{min}} + \frac{C_{max}}{C_{min}} \quad (19)$$

とし、抵抗とコンデンサの比の和で評価する。評価関数 M_1 が大きすぎると、極端に小さい R や C が生じ製造ばらつきが大きくなる。

■ 面積和に関する検討：IC 上における占有面積は全ての抵抗の和、全てのコンデンサの和で決まるが、これらは個々のスペック (周波数 f , シート抵抗 ρ_s , 単位面積当りの容量 C_s など) に依存する。したがって、面積和が最小となるのは同種素子の和が最も小さい零点時定数の組み合わせを選ぶということである。よって、評価関数 M_2 を

$$M_2 = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_n}{n} + \frac{C_1 + C_2 + \dots + C_n}{n} \quad (20)$$

とする。このとき、インピーダンススケールリングができることを考慮して、同種素子の最も小さい素子値を任意に 1 とする。

評価関数 M_1 に重点を置いて評価するが、評価関数 M_1 の大小の差がほとんどない場合には評価関数 M_2 を検討することにより、素子値広がりと同面積和の 2 つの観点から、より最適な零点時定数配置順序を決めることにする。

比帯域を 10, 30, 100 について 3 段から 5 段まで全ての零点時定数配置順序について素子値設計を行った。結果を表 2 に示す。各比帯域の左側には時定数降順 (1, 2, ..., n) を、中央には素子値広がり降順を除いて最も小さい組み合わせを、右側には 2 番目に小さい組み合わせだけを図示し、煩雑になるため他の組み合わせは省略した。

次に各段数、比帯域について評価関数 M_1, M_2 を用いて、素子値広がりに関する検討する。

5.1 $n = 3$ 段の場合

3 段の RC ポリフェーズフィルタの零点時定数配置順序は $3! = 6$ 通りある。数値計算の結果、昇順および降順の配置順序が最も素子値広がり小さかった。他の配置順序では桁違いに素子値広がり大きい。

面積和についても素子値広がりと同様に昇順、降順の配置順序が最も小さかった。

5.2 $n = 4$ 段の場合

4 段の RC ポリフェーズフィルタの零点時定数配置順序は $4! = 24$ 通りある。3 つの比帯域全てにおいて、零点配置順序 2413 の組み合わせで最も素子値広がり小さかった。比帯域が大きくなるにしたがって、降順 (1234) と 2413 の素子値広がり差が大きくなっていることが表 2 からわかり、比帯域が 100 では評価関数 M_1 の大きさが 3 倍以上も異なる。

面積和についても素子値広がり考察と同様のことが言え、比帯域が 100 では配置順序によって、3 倍近くも評価関数 M_2 に差がある。

5.3 $n = 5$ 段の場合

5 段の RC ポリフェーズフィルタの零点時定数の順序は $5! = 120$ 通りある。評価関数 M_1 は、比帯域が 10 では零点配置順序 21543 の組み合わせが、比帯域 30 では零点配置順序 12345 の組み合わせが、比帯域 100 では零点配置順序 25413 の組み合わせが、最も小さかった。3, 4 段とは異なり、比帯域によって素子値広

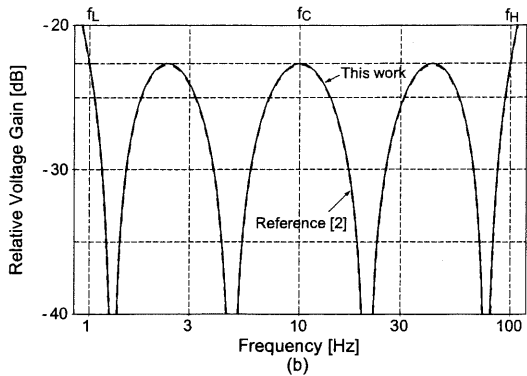
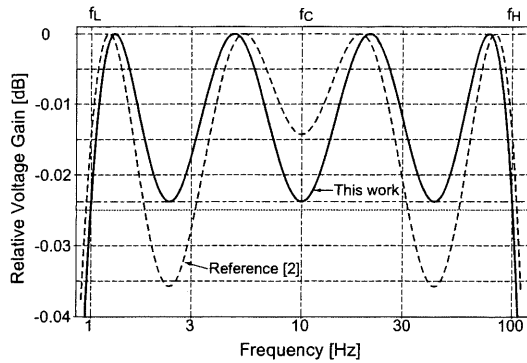


図3 $n = 4$ 段, $\omega_H/\omega_L = 100$, $\varepsilon = 0.07417$ の設計例
 (a) 通過域での相対的な電圧利得 ($\varepsilon = 0.07417$, $a_p = 0.0238$ [dB])
 (b) 阻止域での相対的な電圧利得 ($a_s = 22.62$ [dB])

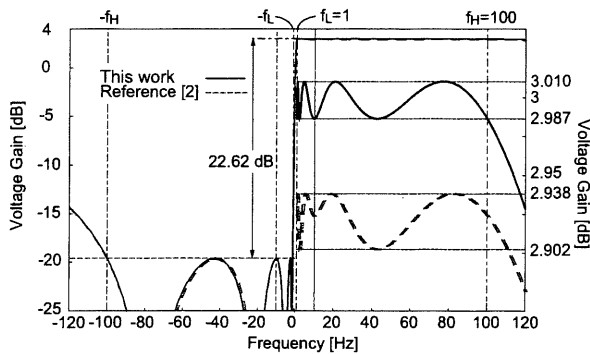


図4 $n = 4$ 段, $\omega_H/\omega_L = 100$ の全体の周波数特性 ($\sqrt{f_L f_H} = 10$ [Hz] に周波数スケージングした。) I 信号と Q 信号の各信号を 1[V] としたため, 通過域の電圧利得が 3.01 [dB] となる。

がりの最小になる零点配置順序が異なる。

比帯域が 30 のとき, 評価関数 M_1 に大差がない零点時定数配置順序がいくつかあった。評価関数 M_2 について大小を比較した結果, 面積和もほとんど差がない。零点配置順序 12345 の $\{R_{max}/R_{min}\}$ は 8.19 倍と小さいが, $\{C_{max}/C_{min}\}$ は 197 倍と大きい。しかし, 零点配置順序 25413 は $\{R_{max}/R_{min}\} \approx 100$, $\{C_{max}/C_{min}\} \approx 121$ と零点順序 12345 よりもコンデンサの素子値広がり小さく面積和もほとんど差がないことから, 25413 を選択した方が実装上有利である。

比帯域 10 と 100 の面積和については, 評価関数 M_1 が最も小さい零点配置順序において評価関数 M_2 も最も小さかった。

表1 $n = 4$ 段, $\omega_H/\omega_L = 100$, $\varepsilon = 0.07417$ の素子値 ($\sqrt{\omega_L \omega_H} = 1$ [rad/s])

sequence	R1	R2	R3	R4
	C1	C2	C3	C4
1234	1.0000E+00	1.4514E+00	2.0185E+00	2.9295E+00
	7.7293E+00	1.4418E+00	2.3676E-01	4.4163E-02
1243	1.0000E+00	—*1	—	—
1324	1.0000E+00	—	—	—
1342	1.0000E+00	2.7387E-01	4.2611E-01	4.0524E+01
	7.7293E+00	1.7450E+00	3.0363E-01	5.1637E-02
1423	1.0000E+00	3.0009E-01	1.6378E+00	1.1021E+01
	7.7293E+00	4.3113E-01	1.2776E+00	4.3362E-02
1432	1.0000E+00	5.8752E-02	1.1585E+14	1.3898E+16
	7.7293E+00	2.2021E+00	4.1252E-15	1.5056E-16
2134	1.0000E+00	—	—	—
2143	1.0000E+00	—	—	—
2314	1.0000E+00	6.7291E+00	3.6726E+01	1.1021E+01
	2.0925E+00	7.1019E-02	2.1046E-01	1.1739E-02
2341	1.0000E+00	2.7399E+01	7.3914E+15	2.5943E+16
	2.0925E+00	1.7442E-02	1.7504E-17	2.9793E-16
2413	1.0000E+00	7.4917E-01	1.0388E+01	7.7820E+00
	2.0925E+00	1.7270E-01	7.4409E-01	6.1410E-02
2431	1.0000E+00	5.8801E+00	3.3793E+01	1.4969E+02
	2.0925E+00	2.2003E-02	1.4142E-02	5.1637E-02
3124	1.0000E+00	9.5102E+01	1.4797E+02	4.0524E+01
	4.7789E-01	8.1273E-02	1.4142E-02	3.1926E-03
3142	1.0000E+00	1.2117E+01	2.8122E+00	3.4075E+01
	4.7789E-01	6.3790E-01	4.6006E-02	6.1410E-02
3214	1.0000E+00	1.1997E+02	7.7522E+16	4.5546E+15
	4.7789E-01	1.7442E-02	9.9705E-17	2.8406E-17
3241	1.0000E+00	2.9464E+01	9.9426E+00	1.7825E+02
	4.7789E-01	7.1019E-02	1.3013E-02	4.3362E-02
3412	1.0000E+00	—	—	—
3421	1.0000E+00	—	—	—
4123	1.0000E+00	3.5100E+00	3.9232E+13	1.0749E+15
	1.2938E-01	2.2021E+00	5.3337E-14	4.4458E-16
4132	1.0000E+00	1.7928E+01	6.0497E+00	1.7825E+02
	1.2938E-01	4.3113E-01	7.8994E-02	1.1739E-02
4213	1.0000E+00	4.4294E+00	2.5456E+01	1.4969E+02
	1.2938E-01	4.7241E-01	3.0363E-01	3.1927E-03
4231	1.0000E+00	—	—	—
4312	1.0000E+00	—	—	—
4321	1.0000E+00	5.3610E+00	3.2646E+01	1.7502E+02
	1.2938E-01	8.9142E-02	6.4098E-02	4.4164E-02

*1: “—”は計算した結果, 非線形多項式から数値解が得られなかった。

6. まとめ

本報告では RC ポリフェーズフィルタを多段接続したとき, 阻止域と通過域の両方が同時に等リプル特性になる素子値設計手法を提案した。係数マッチング法を用いることにより, 零点時定数配置順序が昇順と降順だけでなく, 全ての配置順序に対して設計が可能になった。この利点を活かして, 3, 4, 5 段の比帯域 10, 30, 100 について素子値設計を行った。全ての零点

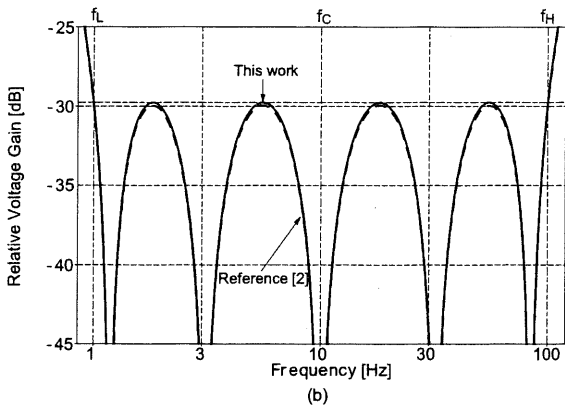
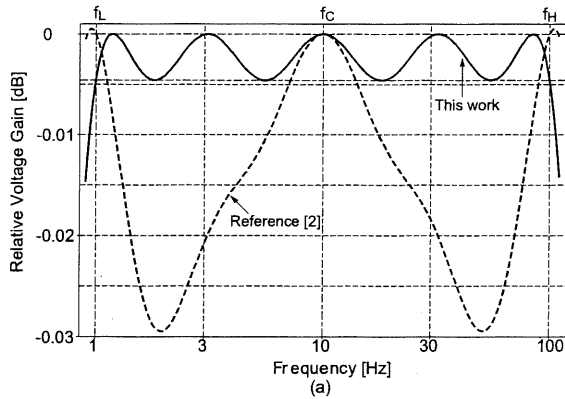


図5 $n = 5$ 段, $\omega_H/\omega_L = 100$, $\varepsilon = 0.0325472$ の設計例

- (a) 通過域での相対的な電圧利得 ($\varepsilon = 0.0325472$, $a_p = 0.004598$ [dB])
 (b) 阻止域での相対的な電圧利得 ($a_s = 29.75$ [dB])

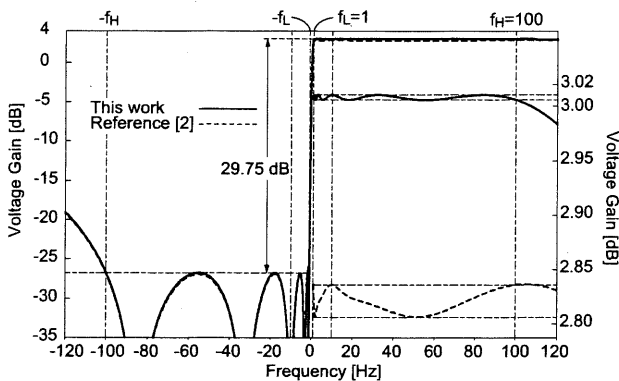


図6 $n = 5$ 段, $\omega_H/\omega_L = 100$, $\varepsilon = 0.0325472$ の全体の周波数特性

配置順序について得られた素子値を, 素子値広がり面積和の2つの観点から評価関数を定義して, 実装上, 有利な零点配置順序を検討した. 検討の結果, 素子値広がりが4, 5段では降順や昇順の零点配置順序よりも小さくなる配置順序があることがわかり, 面積和も小さくなることがわかった.

謝辞 本論文を執筆するにあたり, 有益な助言, ご検討を頂いた(株)半導体理工学研究センター片倉 雅幸氏, 加藤 直之氏, 中西 誠司氏, 宮本 雅幸氏, 小澤 時典氏, 益子 耕一郎氏に深謝いたします.

文献

- [1] Michael John Gingell, "The synthesis and application of polyphase filters sequence asymmetric properties," Ph. D. thesis in the Faculty of Engineering, University of London, 1975.
- [2] 和田 和千, 田所 嘉昭, "等リプル特性を有するポリフェーズフィルタの素子値設計," 電気学会電子回路研究会資料 Vol. ECT-02, No. 100
- [3] G. C. Temes and J. W. LaPatra, "Introduction to Circuit Synthesis and Design," *Chapt. 11*, McGraw-Hill, Inc., 1977.
- [4] 谷本 洋, 板倉 哲朗, "Massara 氏による有損失 FDNR を用いた素子値広がり抑圧手法の検討," 電気学会電子回路研究会資料 Vol. ECT-97-11
- [5] 戸田 盛和, "楕円関数入門," 日本評論社, 2001
- [6] 安藤 四郎, "楕円積分・楕円関数入門," 日新出版, 1970

付 録

1. 極の時定数の関係

全ての極の時定数 $\tau_i^{[P]}$ の積 b_n について, 付録 2. より

$$\begin{aligned} \tau_r^{[P]} \tau_{(n-r+1)}^{[P]} &= \frac{1}{x} \operatorname{cs} \left[\left(\frac{2r-1}{2n} \right) K, k \right] \times \frac{1}{x} \operatorname{cs} \left[\left(\frac{2(n-r+1)-1}{2n} \right) K, k \right] \\ &= \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\operatorname{cn}^2 u - \operatorname{sn}^2 v \operatorname{dn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 v} \end{aligned} \quad (\text{A-1})$$

となる. このとき,

$$u = \frac{1}{2} K, \quad v = \frac{(2r-1-n)}{2n} K \quad (\text{A-2})$$

である. 式 (A-10) から式 (A-12) より,

$$\operatorname{sn}^2 \left(\frac{K}{2}, k \right) = \frac{1}{1 + \sqrt{1-k^2}} = \frac{1 - \sqrt{1-k^2}}{k^2} \quad (\text{A-3})$$

$$\operatorname{cn}^2 \left(\frac{K}{2}, k \right) = \frac{\sqrt{1-k^2}}{1 + \sqrt{1-k^2}} = \frac{\sqrt{1-k^2}(1 - \sqrt{1-k^2})}{k^2} \quad (\text{A-4})$$

$$\operatorname{dn}^2 \left(\frac{K}{2}, k \right) = \sqrt{1-k^2} \quad (\text{A-5})$$

であり, これらを代入すると

$$\begin{aligned} \tau_r^{[P]} \tau_{(n-r+1)}^{[P]} &= \frac{1}{x^2} \frac{\left(\frac{1 - \sqrt{1-k^2}}{k^2} - \operatorname{sn}^2 v \right) \sqrt{1-k^2}}{\frac{1 - \sqrt{1-k^2}}{k^2} - \operatorname{sn}^2 v} \\ &= \frac{1}{x^2} \sqrt{1-k^2} = 1 \end{aligned} \quad (\text{A-6})$$

となり, 全ての極の時定数の積は1となる.

2. 楕円関数の公式 [5], [6]

$$\operatorname{sn}(u+v) \operatorname{sn}(u-v) = \frac{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v} \quad (\text{A-7})$$

$$\operatorname{cn}(u+v) \operatorname{cn}(u-v) = \frac{\operatorname{cn}^2 u - \operatorname{sn}^2 v \operatorname{dn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v} \quad (\text{A-8})$$

$$\operatorname{dn}(u+v) \operatorname{dn}(u-v) = \frac{\operatorname{dn}^2 u - k^2 \operatorname{sn}^2 v \operatorname{cn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v} \quad (\text{A-9})$$

$$\operatorname{sn}^2 \left(\frac{u}{2}, k \right) = \frac{1 - \operatorname{cn}(u, k)}{1 + \operatorname{dn}(u, k)} \quad (\text{A-10})$$

$$\operatorname{cn}^2 \left(\frac{u}{2}, k \right) = \frac{\operatorname{dn}(u, k) + \operatorname{cn}(u, k)}{1 + \operatorname{dn}(u, k)} \quad (\text{A-11})$$

$$\operatorname{dn}^2 \left(\frac{u}{2}, k \right) = \frac{\operatorname{dn}(u, k) + \operatorname{cn}(u, k)}{1 + \operatorname{cn}(u, k)} \quad (\text{A-12})$$

表2 RC ポリフェーズフィルタの素子値 ($\sqrt{\omega_L \omega_H} = 1$ [rad/s])

段数 n	$n = 3$ *3								
比帯域	$\omega_H/\omega_L = 10$			$\omega_H/\omega_L = 30$			$\omega_H/\omega_L = 100$		
零点時定数 $\tau_r^{[Z]}$	2.649642, 1, 0.3774095			4.102008, 1, 0.2437830			6.487809, 1, 0.1541352		
極時定数 $\tau_r^{[P]}$	4.819564, 1, 0.2074877			6.184086, 1, 0.1617054			8.524637, 1, 0.1173070		
零点配置順序	123	231	213	123	213	231	123	231	213
R1	1.0000E+00	1.0000E+00	1.0000E+00	1.0000E+00	1.0000E+00	1.0000E+00	1.0000E+00	1.0000E+00	1.0000E+00
R2	1.6116E+00	2.1695E+07	6.2955E+07	1.4160E+00	8.4916E+07	2.3085E+07	1.2750E+00	1.6277E+07	2.3447E+08
R3	2.5972E+00	5.7483E+07	2.3760E+07	2.0049E+00	2.0701E+07	9.4693E+07	1.6257E+00	1.0560E+08	3.6140E+07
C1	2.6496E+00	1.0000E+00	1.0000E+00	4.1020E+00	1.0000E+00	1.0000E+00	6.4878E+00	1.0000E+00	1.0000E+00
C2	6.2051E-01	1.7396E-08	4.2088E-08	7.0624E-01	4.8307E-08	1.0560E-08	7.8430E-01	9.4697E-09	2.7670E-08
C3	1.4531E-01	4.6094E-08	1.5884E-08	1.2159E-01	1.1776E-08	4.3319E-08	9.4813E-02	6.1438E-08	4.2650E-09
R_{max}/R_{min}	2.5972E+00	5.7483E+07	6.2955E+07	2.0049E+00	8.4916E+07	9.4693E+07	1.6257E+00	1.0560E+08	2.3447E+08
C_{max}/C_{min}	1.8234E+01	5.7484E+07	6.2956E+07	3.3736E+01	8.4918E+07	9.4697E+07	6.8427E+01	1.0560E+08	2.3447E+08
評価関数 M_1 *1	2.0831E+01	1.1497E+08	1.2591E+08	3.5741E+01	1.6983E+08	1.8939E+08	7.0053E+01	2.1120E+08	4.6894E+08
評価関数 M_2 *2	9.5711E+00	4.5554E+07	4.9890E+07	1.4989E+01	6.3512E+07	7.0825E+07	2.7200E+01	7.5826E+07	1.6836E+08
段数 n	$n = 4$ *4								
比帯域	$\omega_H/\omega_L = 10$			$\omega_H/\omega_L = 30$			$\omega_H/\omega_L = 100$		
零点時定数 $\tau_r^{[Z]}$	2.85552, 1.50632, 0.663872, 0.350199			4.62480, 1.77483, 0.563434, 0.216226			7.72928, 2.09252, 0.477892, 0.129378		
極時定数 $\tau_r^{[P]}$	6.60526, 1.67498, 0.597022, 0.151395			8.62545, 1.86610, 0.535876, 0.115936			12.18077, 2.13745, 0.467847, 0.0820966		
零点配置順序	1234	2413	2314	1234	2413	2314	1234	2413	2314
R1	1.0000E+00	1.0000E+00	1.0000E+00	1.0000E+00	1.0000E+00	1.0000E+00	1.0000E+00	1.0000E+00	1.0000E+00
R2	1.6838E+00	1.4103E+00	4.2704E+00	1.5984E+00	1.0486E+00	5.1469E+00	1.4514E+00	7.4917E-01	6.7291E+00
R3	3.2328E+00	7.2402E+00	1.5647E+01	2.4655E+00	8.5385E+00	2.2614E+01	2.0185E+00	1.0388E+01	3.6726E+01
R4	5.4433E+00	1.0211E+01	1.0330E+01	3.9408E+00	8.9536E+00	1.0105E+01	2.9295E+00	7.7820E+00	1.1021E+01
C1	2.8555E+00	1.5063E+00	1.5063E+00	4.6248E+00	1.7748E+00	1.7748E+00	7.7293E+00	2.0925E+00	2.0925E+00
C2	8.9460E-01	2.4832E-01	1.5546E-01	1.1104E+00	2.0620E-01	1.0947E-01	1.4418E+00	1.7270E-01	7.1019E-02
C3	2.0536E-01	3.9440E-01	1.8249E-01	2.2853E-01	5.4164E-01	2.0452E-01	2.3676E-01	7.4409E-01	2.1046E-01
C4	6.4335E-02	6.5018E-02	3.3900E-02	5.4868E-02	6.2928E-02	2.1399E-02	4.4163E-02	6.1410E-02	1.1739E-02
R_{max}/R_{min}	5.4433E+00	1.0211E+01	1.5647E+01	3.9408E+00	8.9536E+00	2.2614E+01	2.9295E+00	1.3865E+01	3.6726E+01
C_{max}/C_{min}	4.4385E+01	2.3167E+01	4.4434E+01	8.4289E+01	2.8204E+01	8.2938E+01	1.7502E+02	3.4074E+01	1.7825E+02
評価関数 M_1 *1	4.9828E+01	3.3378E+01	6.0081E+01	8.8230E+01	3.7158E+01	1.0555E+02	1.7795E+02	4.7940E+01	2.1498E+02
評価関数 M_2 *2	1.8461E+01	1.3478E+01	2.1663E+01	2.9674E+01	1.5157E+01	3.4369E+01	5.5356E+01	1.9148E+01	6.4677E+01
段数 n	$n = 5$ *4								
比帯域	$\omega_H/\omega_L = 10$			$\omega_H/\omega_L = 30$			$\omega_H/\omega_L = 100$		
零点時定数 $\tau_r^{[Z]}$	2.96000, 1.89487, 1, 0.527742, 0.337839			4.90476, 2.46860, 1, 0.405089, 0.203883			8.43947 3.22658, 1, 0.309926, 0.118491		
極時定数 $\tau_r^{[P]}$	8.36302, 2.33364, 1, 0.428515, 0.119574			11.01194, 2.75782, 1, 0.362606, 0.0908105			15.73165, 3.407261, 1, 0.293491, 0.0635661		
零点配置順序	12345	21543	12543	12345	23145	25413	12345	25413	13452
R1	1.0000E+00	1.0000E+00	1.0000E+00	1.0000E+00	1.0000E+00	1.0000E+00	1.0000E+00	1.0000E+00	1.0000E+00
R2	1.5503E+00	2.0640E+00	1.2601E+00	1.7052E+00	4.1042E+00	2.5564E+00	1.5970E+00	2.1572E+00	3.7370E-01
R3	3.4500E+00	2.4671E+00	1.9323E+00	2.8622E+00	1.6604E+01	8.5241E+00	2.4103E+00	9.1750E+00	6.5879E-01
R4	7.6777E+00	8.1640E+00	6.3401E+00	4.8043E+00	8.9767E+00	1.0033E+02	3.6378E+00	1.3868E+02	1.0642E+00
R5	1.1903E+01	2.4858E+01	2.0482E+01	8.1920E+00	1.6066E+01	4.9279E+01	5.8097E+00	5.4151E+01	6.5635E+01
C1	2.9600E+00	1.8949E+00	2.9600E+00	4.9048E+00	2.4686E+00	2.4686E+00	8.4395E+00	3.2266E+00	8.4395E+00
C2	1.2223E+00	1.4341E+00	1.5038E+00	1.4477E+00	2.4366E-01	7.9755E-02	2.0204E+00	5.4928E-02	2.6760E+00
C3	2.8985E-01	1.3694E-01	1.7484E-01	3.4939E-01	2.9539E-01	4.7523E-02	4.1488E-01	3.3779E-02	4.7045E-01
C4	6.8737E-02	6.4643E-02	8.3238E-02	8.4319E-02	4.5127E-02	4.8887E-02	8.5196E-02	6.0856E-02	1.1134E-01
C5	2.8384E-02	4.0228E-02	4.8824E-02	2.4888E-02	1.2690E-02	2.0293E-02	2.0395E-02	1.8467E-02	4.9159E-02
R_{max}/R_{min}	1.1903E+01	2.4858E+01	2.0482E+01	8.1920E+00	1.6064E+01	1.0033E+02	5.8097E+00	1.3868E+02	1.7564E+02
C_{max}/C_{min}	1.0428E+02	4.7104E+01	6.0626E+01	1.9707E+02	1.9453E+02	1.2165E+02	4.1380E+02	1.7472E+02	1.7168E+02
評価関数 M_1 *1	1.1619E+02	7.1962E+01	8.1108E+01	2.0527E+02	2.1114E+02	2.2198E+02	4.1961E+02	3.1340E+02	3.4731E+02
評価関数 M_2 *2	3.7312E+01	2.5463E+01	2.5745E+01	5.8447E+01	5.7663E+01	5.8604E+01	1.1057E+02	7.7797E+01	8.4574E+01

*1: 評価関数 $M_1 = \frac{R_{max}}{R_{min}} + \frac{C_{max}}{C_{min}}$ と定義する。 *2: 評価関数 $M_2 = \frac{R_1+R_2+\dots+R_n}{n} + \frac{C_1+C_2+\dots+C_n}{n}$ と定義する。

*3: $n = 3$ のみ、降順(昇順)の場合が最も素子値広がり、面積和が小さい。

*4: 全ての零点配置順序について計算した結果、非線形多項式から数値解が得られない零点配置順序が存在する。