

閾値が一様分布する確率的フラッシュAD変換器の 量子化雑音の確率密度関数

杉本俊貴, 谷本 洋, 吉澤真吾
(北見工業大学)

Probability Density Function of Quantization Noise in Statistical Flash A-to-D Converters
Toshiki Sugimoto, Hiroshi Tanimoto, Shingo Yoshizawa (Kitami Institute of Technology)

Abstract

This paper presents theoretical calculation results of probability density function (PDF) of quantization noise for stochastic flash A-to-D converter (SFADC) composed of many comparators with uniformly distributed threshold voltages. First, a 1-bit ADC with uniformly distributed threshold voltage was modeled as an ensemble, then its quantization noise PDF has been analytically calculated. The result is a triangular PDF, when random input signal with uniform PDF is applied to 1-bit ADC. Finally, an SFADC composed of N 1-bit ADC with uniformly distributed threshold voltages has been analyzed. Interestingly, it was found that the resulting PDF of quantization noise shows Gaussian-like distribution, unlike uniform PDF of ordinary flash ADCs. Those results has been supported by numerical simulations.

キーワード: 確率的フラッシュADC, 量子化雑音の確率密度関数, 一様分布, 正規分布
(stochastic flash A-to-D converters, probability density function of quantization noise, uniform distribution, Gaussian distribution)

1. まえがき

現代の電子機器はLSI技術によるデジタル信号処理を利用することによって, その性能を向上させてきたことが広く認識されている⁽¹⁾. その際, 物理的な外界とデジタル信号処理のインターフェイスに欠くことのできない回路ブロックとしてAD変換器(以後ADCと略記する)がある⁽¹⁾.

さて, 信号処理を行うに当たって信号対雑音比が重要であり, デジタルドメインでは信号のビット数がこれにあたる. ADCの量子化雑音については古くから種々の解析が行われており⁽²⁾, 一様量子化を行う理想ADCのビット数と得られる信号対雑音比(SNDR)の関係も, 早い段階で知られていた. すなわち, 入力信号の振幅がADCのフルスケールの間で一様分布する場合, 量子化雑音はADCの最少分解能(LSB)を q とすると, 良い近似で量子化雑音は信号と無相関と考えることができ, 区間 $(-q/2, q/2)$ の中に一様分布することが知られており⁽²⁾, その結果, 量子化雑音の電力が $q^2/12$ であることもよく知られている.

上記のLSBの幅にわたって一様分布する量子化雑音モデルで決定される理想ADCのビット数 M と得られる最大SNDR値の関係は, 正弦波信号を用いて測定した場合,

$$\text{SNDR}_{\text{peak}} = \frac{3}{2} \cdot 2^{2M} \approx 6.02M + 1.76 \text{ [dB]} \quad (1)$$

で表されるが⁽³⁾, 現実には $M < 4$ の場合, 量子化雑音が一様分布するという近似が成立せず, 誤差が大きくなることも知られている⁽³⁾.

実際に3ビット以下の低分解能ADCを利用する機会は殆

どないが, 筆者らは多数の1ビットADCを多数並列的に用いて構成される確率的フラッシュAD変換器(以後SFADCと略記する)の理論解析にあたって1ビットADCのSNDRを計算する必要に迫られた.

SFADCの量子化雑音に関しては最近Weaverらによる解析が報告されており, フルスケール入力時に対する量子化雑音の期待値と分散のみが理論的に求められている⁽⁴⁾. しかし, 筆者らの知る限り量子化雑音の確率密度分布についてはこれまで実験的にも理論的にも報告されていない.

そこで, 本報告では1ビットADCの集合平均としてSFADCのモデルを構築し, その量子化雑音分布を解析した.

はじめに, SFADCを構成する単位ADCである1ビットADCについてモデル化し, 解析した. 次に, 複数の1ビットADCで構成されるSFADCをモデル化し, そのモデルを利用して, SFADCにおける量子化雑音の確率密度関数(probability density function; 以後PDFと略記する)を解析した.

その結果, 等間隔に閾値が分布する通常のADCとは異なり, 量子化雑音のPDFは一様分布ではなく正規分布に近い形状になるという結果を得た.

本報告では, これらの詳細について述べる.

2. SFADCの基本構成

本稿で取り扱うSFADCは, 図1に示すような構成であり, 多数個の1ビット比較器から成る. ここでは全部で N 個の比較器があるものとする. 各比較器の閾値はゼロであるとし, 実際の閾値のオフセットは入力側に取り出して電

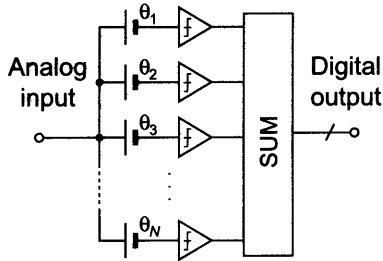


図1 SFADCの構成. θ_k はそれぞれの比較器の閾値の入力換算値を表し、比較器自体の閾値は0(フルスケールの半分)であるとする。

圧 θ_k ($k = 1, 2, \dots, N$) として表す。最終的な SFADC 出力は、すべての比較器の出力を足し合わせたもの（あるいは平均値）として得られる⁽⁵⁾⁽⁶⁾。

したがって、全体の回路ブロックは単位の AD 変換ユニットである多数の 1 ビット ADC とそれらを平均する加算器からなっている。次節では、まず単位の AD 変換素子である 1 ビット ADC についてモデル化し解析した結果を述べる。

3. 1 ビット ADC の解析

〈3・1〉 解析の仮定 本節では SFADC のフルスケールにわたって振幅が一樣分布する信号について解析する。

本論文の解析にあたっては次のような仮定を設ける。

- (1) 本論文で取り扱う個々の比較器は、ある定まった閾値 θ よりも大きい信号 x が入力されたとき、出力値 $y = 1$ を出力し、それ以外るとき $y = -1$ を出力する素子であると定義する。すなわち、出力 y のフルスケールの幅は 2 であり、数式では

$$y = \text{sign}(x - \theta) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \geq \theta, \\ -1 & \text{for } x < \theta. \end{cases} \quad (2)$$

と表現できる。ここに、 $\text{sign}(\cdot)$ は符号関数である。

- (2) 比較器の閾値 θ は $\theta \in (-1, 1)$ の範囲で一樣分布する確率変数であり、個々の比較器ごとに決まった値をとるものとする。
- (3) 個々の比較器へのアナログ入力信号 x は上記 (2) で閾値が存在する範囲、すなわち $x \in (-1, 1)$ の範囲に分布し、入力のフルスケールの幅は 2 である。
- (4) 入力アナログ信号 x と閾値 θ は互いに独立な確率変数である。

上の仮定 (1) により、入力信号がどのような波形であっても、それぞれの比較器で量子化された出力信号は矩形波の波形となり、量子化した際の誤差が非常に大きいことがわかる。

また、各比較器を 1 ビット量子化器と考えると、量子化雑音は出力された矩形波と入力信号との差であるから、量子化雑音は入力信号の波形に強く依存する。比較器の出力振幅と入力信号の振幅が仮定 (1) と (3) により同じ

であり、かつ、比較器の出力が 2 値であるから殆どの場合に量子化雑音は一樣分布しないと考えるのが自然であろう。すなわち、 x と ε には大きな相関があり、独立ではないと考える必要がある。

これに対して、比較器の閾値電圧と、これから入力すべき信号電圧は無関係であるから、仮定 (4) は自然な仮定であり、この仮定により x と θ の結合確率密度関数がそれぞれの PDF の積として表される。

ところで、仮定 (2) では閾値の一樣分布を仮定しているが、比較器の閾値は一般に正規分布するといわれている⁽⁹⁾。しかし、非線形歪を低減するために閾値の分布は一樣分布であることが望ましく⁽⁷⁾、正規分布する確率変数から近似的に一樣分布する確率変数を合成する手法が存在する⁽⁵⁾⁽⁸⁾⁽⁹⁾。したがって、この仮定は現実的なものであり、本検討では閾値の分布を一樣分布として扱う。

〈3・2〉 1 ビット ADC の量子化雑音 PDF とその分散

量子化雑音は入力信号によって異なるので、本節では 1 ビット ADC にフルスケールにわたって振幅が一樣分布する信号を入力したときの、量子化雑音の PDF を求める。

ある比較器の出力 y と入力アナログ信号値 x の差、すなわち量子化雑音 ε は次式で表される。

$$\varepsilon \equiv y - x = \text{sign}(x - \theta) - x \quad (3)$$

つぎに、具体的に x と θ の PDF を与えて、量子化雑音 ε の PDF がどうなるかを調べる。解析の仮定 (3) により、入力信号 x の PDF は一樣分布であるから、その分布がフルスケール以下の範囲にわたる場合、すなわち $x \in (-\alpha, \alpha)$ かつ $0 < \alpha \leq 1$ の場合、PDF は

$$\text{pdf}_x(x) = \frac{u(x + \alpha) - u(x - \alpha)}{2\alpha} \quad (4)$$

と表され、閾値 θ の PDF も解析の仮定 (2) によって

$$\text{pdf}_\theta(\theta) = \frac{u(\theta + 1) - u(\theta - 1)}{2} \quad (5)$$

で表される。ここで、 $u(\cdot)$ は単位階段関数である。

さらに、解析の仮定 (4) から x と θ は互いに独立な確率変数であるから、 x と θ の結合確率密度関数 $\text{pdf}_{x,\theta}(x, \theta)$ は両者の積で与えられ、

$$\text{pdf}_{x,\theta}(x, \theta) = \text{pdf}_x(x) \times \text{pdf}_\theta(\theta). \quad (6)$$

式 (3) は入力信号 x と閾値 θ がどのように量子化雑音 ε に変換されるかを表しているのので、この変換関係関数 $\varepsilon = g(x; \theta)$ と表す (図 2(a) 参照)。このとき、 θ をパラメータと考えて量子化雑音 ε の PDF を入力信号 x の PDF を用いて表すと、PDF の変数変換の公式⁽¹⁰⁾ によって次式のようになることが知られている。

$$\text{pdf}_\varepsilon(\varepsilon; \theta) = \sum_{i=1}^m \text{pdf}_x(f_i(\varepsilon; \theta)) \left| \frac{df_i(\varepsilon; \theta)}{d\varepsilon} \right| \quad (7)$$

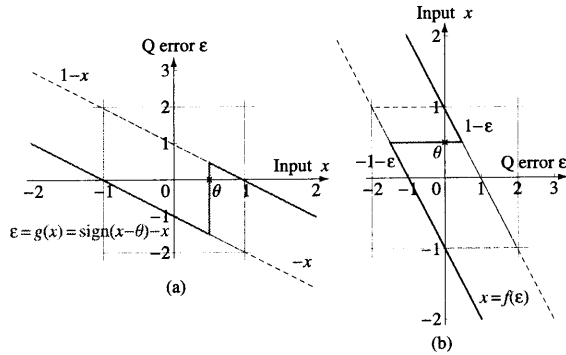


図2 入力 x と量子化雑音 ε の関係。
(a) $\varepsilon = g(x)$, (b) $x = f(\varepsilon)$

この場合、 $f(\cdot)$ は各 θ に対して量子化雑音 ε を出力するような入力 x を与える対応関係 $x = f(\varepsilon; \theta)$ であり、先の関数 $g(\cdot)$ の逆関数である。 $g(\cdot)$ は 1 価関数であるが、その逆関数は 2 価関数になる (図 2(b) 参照)。そこで、区分的に 1 価関数となるように分割すると、この場合は $m = 2$ 個に分割できて

$$x = f(\varepsilon; \theta) = \begin{cases} f_1(\varepsilon) = -\varepsilon + 1 & : x > \theta, \\ f_2(\varepsilon) = -\varepsilon - 1 & : x < \theta. \end{cases} \quad (8)$$

である。ここで、式 (7) 総和の記号は、 $g(\cdot)$ の逆関数を m 個の 1 価関数に分割し、その総和を取ることを表す。

最終的な量子化雑音 ε の PDF は、一様分布する入力信号 x の振れ幅に依存するので、 $\alpha = 1$ と $\alpha < 1$ のふたつの場合に分けて考察する。

入力が $x \in (-1, 1)$ の一様分布の場合 ($\alpha = 1$) これは入力がフルスケールの範囲いっぱい分布する場合である。逆関数 $f(\varepsilon)$ はそのグラフからわかるように $|\varepsilon| < 2$ の範囲において 2 価関数となる部分があり、 $\varepsilon = -\theta \pm 1$ の 2 点において不連続になる。しかし、これらの不連続点を除いて傾きが -1 の直線になるから、 $|df/d\varepsilon| = 1$ である。図 3 に示す、 $\alpha = 1$ の場合を考えると明らかなように $|x| < 1$ で一様分布する pdf_x (同図 (a)) は $-\theta - 1 < \varepsilon < -\theta + 1$ で一様分布する pdf_ε (同図 (c) の破線) に変換される。すなわち、

$$\text{pdf}_\varepsilon(\varepsilon; \theta) = \frac{u(\varepsilon + \theta + 1) - u(\varepsilon + \theta - 1)}{2} \quad (9)$$

を得る。この θ をパラメータとする ε の PDF は幅が 2 で高さが $1/2$ の一様分布が、区間 $(-2, 2)$ 内を θ の値に応じて左右に動く、というものである (同図 (c))。すなわち、ある 1 ビット ADC の量子化雑音 PDF は入力が一様分布であるという仮定のもとで常に一様分布し、区間 $(-2, 2)$ 内の θ の値に依存した位置に入力フルスケールと同じ幅で分布する。

実際の設計に際して興味があるのは、個別の比較器の量子化雑音ではなく 1 ビット ADC のアンサンプルの量子化雑音 PDF の分布と分散 (量子化雑音電力) である。それを知るには、取り得る θ に対する期待値と分散を計算すれば

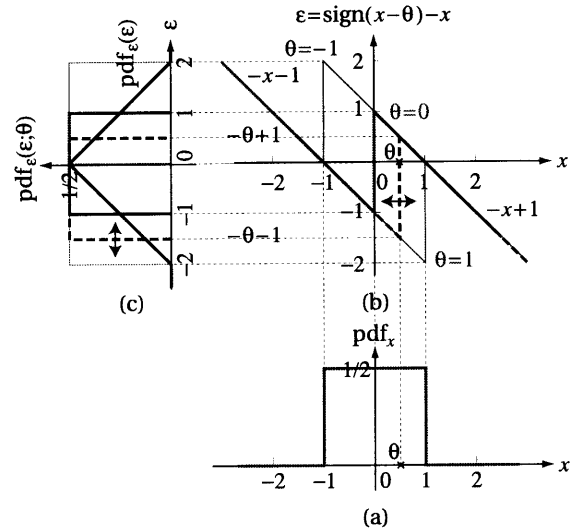


図3 入力 x の PDF から量子化雑音 ε の PDF を導く。(a) 入力 x の PDF, (b) x , θ と量子化雑音 ε の関係, (c) ε の θ をパラメータとする PDF, および ε だけの PDF.

良い。

したがって、式 (9) のパラメータ θ について期待値を計算すると

$$\begin{aligned} \text{pdf}_\varepsilon(\varepsilon) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \text{pdf}_\varepsilon(\varepsilon; \theta) \text{pdf}_\theta(\theta) d\theta \\ &= \begin{cases} \frac{2-|\varepsilon|}{4} & : |\varepsilon| < 2, \\ 0 & : |\varepsilon| \geq 2. \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

となり、これは高さが $1/2$ で底辺が長さ 2 の二等辺三角形であるから (図 3(c) 中の黒線プロット参照)、量子化雑音 ε の平均と分散はそれぞれ $\mu = 0$, $\sigma^2 = 2/3$ である[†]。

特に、 $\theta = 0$ の閾値バラツキのない理想的 1 ビット ADC の場合、その量子化雑音の PDF は $\varepsilon \in (-1, 1)$ の一様分布となり、その平均と分散はそれぞれ $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1/3$ となる。すなわち、閾値バラツキのない理想的 1 ビット ADC が 1 個だけでは、一様分布する入力に加えられても特にどの値の入力で量子化雑音が大きいかということはないが、閾値バラツキのある SFADC の場合は、ゼロ付近に分布する量子化雑音が多く、大きな量子化雑音ほど少ないことがわかる。

入力 x の振れ幅が ($0 < \alpha < 1$) の場合 これは入力がフルスケール範囲の一部に分布し、フルスケールいっぱい振れることのない場合である。図 4 は一例として $\alpha = 0.5$ のときの量子化雑音の PDF を求める様子を示すものであるが、同図 (c) から明らかなように $0 < \alpha < 1$ の場合は $\text{pdf}_\varepsilon(\varepsilon; \theta)$ が左右に分離する。作図のプロセスから明らかなように、

[†] $\text{pdf}_\varepsilon(\varepsilon; \theta)$ は結合確率密度関数ではなく、単に θ をパラメータとした ε に関する PDF であるから、この操作は仮に結合確率密度関数 $\text{pdf}_\varepsilon(\varepsilon, \theta)$ が分っていたとすると、その θ に対する周辺分布を計算することに相当する。

$\text{pdf}_\varepsilon(\varepsilon; \theta)$ は $\varepsilon = \pm 1$ を中心とする幅が 2α で高さが $1/2\alpha$ のふたつの短冊状の領域を、 θ の値に応じて幅の合計が 2α となるように動き回る。図 4 の黄色で影を付けた部分は、 $\theta \approx 0.3$ のときの様子であり、 $\text{pdf}_\varepsilon(\varepsilon; \theta)$ は同図 (b) の青線 $(-x+1)$ で写像された幅約 0.2 の上側の短冊部分と、同図 (b) の赤線 $(-x-1)$ で写像された幅が約 0.8 の下側の短冊部分に分かれる。

これを全ての $\theta \in (-1, 1)$ について平均すると、同図 (c) 中の黒線で示した $\text{pdf}_\varepsilon(\varepsilon)$ を得る。その形が短冊を斜めに切り落とした形となるのは、オフセット量 θ によらず $\varepsilon = 0$ 側の $\varepsilon = \pm(1-\alpha)$ では常に $\text{pdf}_\varepsilon(\varepsilon; \theta)$ が値を持つので ε の存在確率が高く、逆に $\varepsilon = \pm 2$ に近い側では θ の大きさに依存して値を持つ部分の幅（黄色で影を付けた部分）が変化するので ε の存在確率が次第に低くなるからであり、実際、 θ に関する期待値を計算すると $\varepsilon = \pm(1-\alpha)$ から $\varepsilon = \pm(1+\alpha)$ に向かって直線的に変化する $\text{pdf}_\varepsilon(\varepsilon)$ が得られる。すなわち、 $0 < \alpha \leq 1$ に対して

$$\text{pdf}_\varepsilon(\varepsilon) = \begin{cases} \left| \frac{2-\varepsilon}{4\alpha} \right| & : 1-\alpha < |\varepsilon| < 1+\alpha \\ 0 & : \text{それ以外} \end{cases} \quad (11)$$

を得る。したがって、この一様分布する入力に対する確率分布の平均を μ_u 、分散を σ_u^2 とすると

$$\mu_u = 0, \quad (12)$$

$$\sigma_u^2 = 1 - \frac{\alpha^2}{3} \quad (13)$$

であり、 α が小さくなると σ_u^2 は急速に 1 へ漸近する。

これで個々の比較器が属する無限母集団の量子化雑音の母平均および母分散が求まった。

4. SFADC の量子化雑音 PDF とその分散

次に、多数の 1 ビット ADC の出力和として表される SFADC の解析を行う。

図 1 に示すように SFADC 出力は、個々の比較器出力の和であるから、用いた全比較器の個数 N に比例して出力のフルスケールが変化する。これは不便なので、SFADC の出力デジタル値を平均（ $= N$ で正規化）したものを用いることにすれば、そのフルスケールが区間 $(-1, 1)$ に固定できる。そこで、出力値はこの平均した値を用いることにする。

また以後は、フルスケール入力 ($\alpha = 1$) のときのみ解析を行う。なぜなら、入力範囲外の比較器は AD 変換動作に参与しないため、入力レベルの大きさがそのままフルスケールになるためである。すなわち、入力範囲外の比較器は出力値が -1 または 1 から変化しないため、信号処理上は変動成分が無いと存在しないのと同値であると考えられる。より入力信号が小さく、入力範囲内に比較器が 1 個以下のときは 3 章の解析結果となる。

〈4・1〉 SFADC の分散 まず、 N 個の比較器から成る SFADC の量子化雑音の平均と分散を計算する。

SFADC では、それぞれの 1 ビット ADC から発生する量

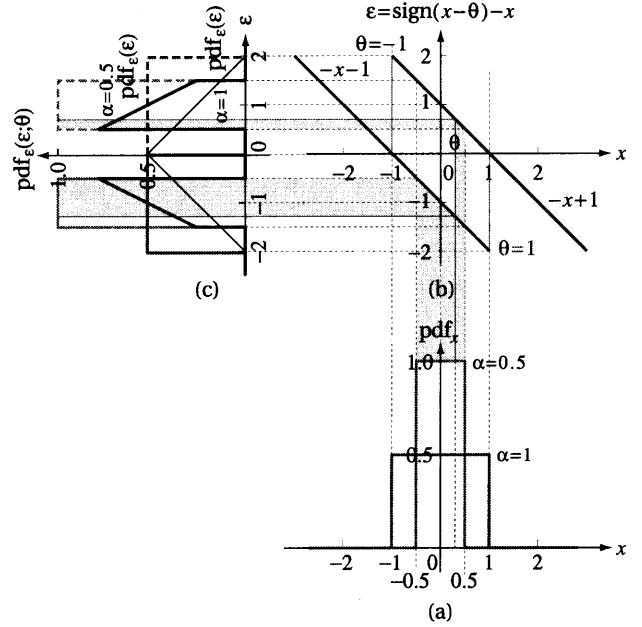


図 4 入力信号が $x \in (-1/2, 1/2)$ の一様分布である場合 PDF の変換。(a) 入力 x の PDF, (b) 入力アナログ信号 x を量子化雑音へ変換する関数, (c) 比較器の閾値電圧 θ をパラメータとする量子化雑音の PDF (赤, 緑) および ε だけの PDF (黒). x の変動範囲が狭くなると、 $\text{pdf}_\varepsilon(\varepsilon; \theta)$ は $\varepsilon = \pm 1$ を中心として幅が 2α の短冊状の二つに分離する。

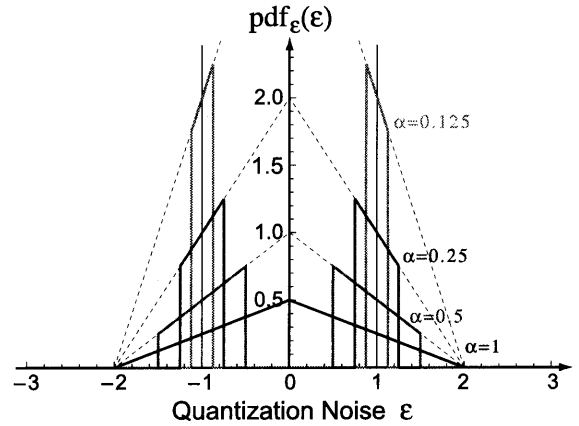


図 5 入力信号が $x \in (-\alpha, +\alpha)$ の一様分布である場合の量子化雑音の PDF. $\alpha = 1$ のときだけ底辺の幅が 4 の三角形分布となり、 $\alpha < 1$ では $\varepsilon = \pm 1$ を中心とするふたつの部分に分離し、 α が小さいほど $\varepsilon = \pm 1$ 付近に集中した分布となる。

化雑音が、個々の比較器のオフセット電圧に依存している。仮定により一様分布に従う母集団から無作為に閾値を選んでいくから、個々の比較器の量子化雑音も無相関であると考えられる。それぞれの比較器出力値に含まれる量子化雑音が互いに無相関であるときは、 N 個の量子化雑音の平均値を $\bar{\mu}$ 、分散を σ^2 とすると、よく知られているように

$$\bar{\mu} = \frac{\mu_u}{N}, \quad \bar{\sigma}^2 = \frac{\sigma_u^2}{N} \quad (14)$$

が成り立つ⁽¹⁰⁾。ただし、 $\mu_u (= 0)$ は 1 ビット ADC の量子化雑音の母平均、 σ_u^2 は同じく母分散である（式 (12), (13) 参照）。

〈4・2〉 SFADC の量子化誤差モデル 無相関で独立な PDF 同士の集合平均は中心極限定理から、平均した PDF が正規分布に漸近することが知られている。しかし、SFADC は、各比較器の入力端子が全て並列接続されており、全体の量子化雑音 ε_N と入力信号 x が独立ではなく、中心極限定理が成立しないので改めて PDF を計算する必要がある。

入力信号は各比較器で同じであることと、各 1 ビット ADC 出力を集合平均する構造であることを踏まえて、 N 個の比較器から成る SFADC の量子化誤差は次のようにモデル化できる。

$$\varepsilon_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \{\text{sign}(x - \theta_k) - x\} \quad (k = 1, 2, 3, \dots, N). \quad (15)$$

ここで添え字の k は閾値のオフセット電圧（比較器）の番号を表している。また、簡単のため、閾値は小さい順番に並べ替えて $\theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_N$ とする。

図 6 に、比較器 4 個で SFADC を構成した場合の一例を示す。緑の線は比較のために等間隔に閾値が分布する理想的な 4 値のフラッシュ ADC の場合を示している。等間隔に閾値が配置されるので量子化雑音はよく知られているように一様分布する。青線は母集団が一様分布である閾値群から 4 値抽出し、比較器のオフセット電圧として与えた SFADC の例を示している。SFADC の PDF は一様分布ではなく、理想フラッシュ ADC の PDF の幅も、より広がっていることがわかる。すなわち、分散が大きいということだから、等間隔の場合よりも量子化雑音電力が大きいことを意味する。

実際に一様分布に従う 4 つの閾値をランダムに選んだ SFADC の量子化雑音 PDF の期待値は、式 (15) を用いて解析的に求められる。1 ビットのときと同様に、入力信号 x と確率変数 θ_k が一様分布するとして量子化雑音 ε を計算すると、

$$\text{pdf}_4(x) = \begin{cases} \frac{1}{64} (71 - 64|x| - 48x^2 - 16|x|^3 - 2x^4) & : 0 \leq |x| \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{128} (115 - 128|x| - 24x^2 + 32|x|^3 + 12x^4) & : \frac{1}{2} < |x| \leq 1 \\ \frac{1}{128} (91 - 128|x| + 24x^2 + 32|x|^3 - 12x^4) & : 1 < |x| \leq \frac{3}{2} \\ \frac{1}{32} (-2 + x)^4 & : \frac{3}{2} < |x| \leq 2 \\ 0 & : \text{それ以外} \end{cases} \quad (16)$$

となる。計算は Mathematica で行った。上記の解析解と、同じ平均と分散を持つ正規分布を同時にプロットした結果を図 7 に示す。

正規分布と比較すると中央部が尖っているものの、おおむね形状が一致している。中央が尖るのは、入力信号が最小値と最大値のときに量子化誤差が必ず 0 になるためであ

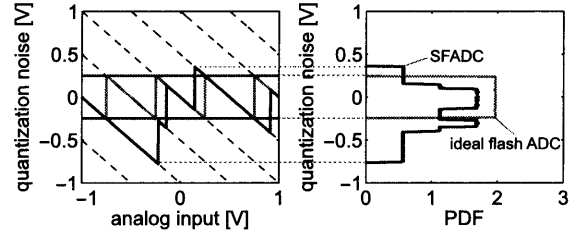


図 6 4 値理想フラッシュ ADC と SFADC との比較。明らかに、SFADC は分布の分散が大きい。

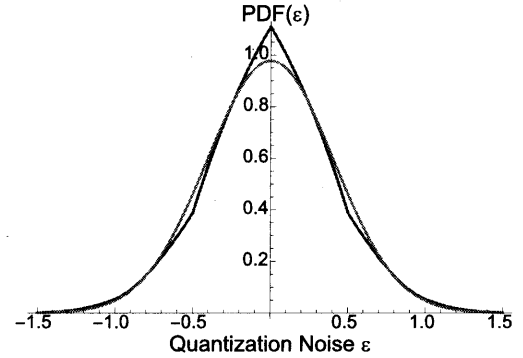


図 7 4 値 SFADC の量子化雑音 PDF と、同じ平均値、分散の正規分布のグラフ。形はおおむね正規分布状であることが確認できる

ると考えられる。

以上の解析結果より、SFADC の量子化雑音 PDF の期待値は一様分布ではなく正規分布状になることがわかる。

図 8 には、 $N = 1 \sim 9$ 個までのフルスケール入力のときの PDF の計算結果を示す。比較器数を増やしていくと、分布がより細くなっていく様子が見て取れる。導出した PDF から計算したそれぞれの SFADC の分散は表 1 に示すように、比較器が 1 個のときの分散 $2/3$ を基準に比較器の数 N でス

表 1 $N = 1 \sim 9$ までの分散の期待値の計算結果。

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9
σ_N^2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{27}$

ケーリングされており、 $N = 1 \sim 9$ の範囲では式 (14) と厳密に一致していることが確かめられる。また、この結果はフルスケールが 2 倍違うことを考慮すれば Weaver らの解析結果⁽⁴⁾ と一致する。

以上の結果を踏まえて、比較器数が N 個の SFADC の分散と PDF は、近似的に式 (14) と同じ平均と分散を持つ正規分布で表すものとすれば、

$$\text{pdf}_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (17)$$

と書ける。特に、比較器が多くなれば分布はより正規分布に近づくので多数の比較器を用いる SFADC において、実用

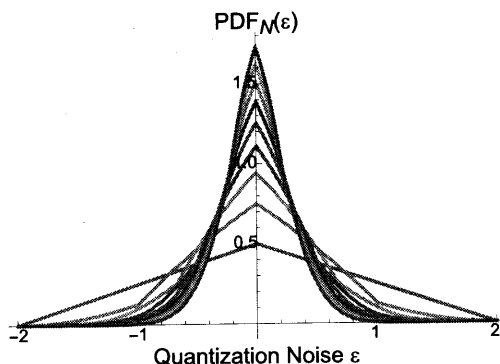


図8 $N=1\sim 9$ 個までの量子化雑音 PDF の計算結果. 数を多くすると, 裾野が滑らかになりより正規分布に近づく.

上は正規分布であると考えて上記のようにモデル化できる.

なお, さらに多数の比較器についても式 (15) を用いて解析的に PDF を導出することができるが, 著者らの計算機ではリソースの制限により $N=9$ までしか解析解を導出できなかったため, 多数の比較器を用いる場合には数値シミュレーションで推定した結果を示す.

5. より多数の比較器を持つ SFADC の量子化雑音 PDF とその分散

実際の SFADC に近い例として, 1024 個の比較器を持つ SFADC の量子化雑音 PDF を Matlab を用いた数値シミュレーションで検討する.

図9の青線は, 1024 個の比較器で構成した SFADC の PDF の推定値である. 集合平均を計算するために独立な 1000 組の SFADC の PDF を計算し, その集合平均をグラフ化している. 緑の破線は, 同じ平均と分散を持つ正規分布を参考のために示している.

比較器数を多くすると分布の裾野がさらに滑らかになり, より正規分布に近い分布になっている. このとき, 数値シミュレーションによる分散は $\sigma_{1024}^2 = 651.0 \times 10^{-6} [\text{V}^2]$ となり, 式 (14) で $N=1024$ とした場合 ($\sigma^2 = 651.0 \times 10^{-6} [\text{V}^2]$) とよく合う.

したがって数値シミュレーションの結果からも, 分散と PDF が提案したモデルで近似できることが確かめられた.

6. おわりに

SFADC の量子化雑音 PDF の解析を行い, 従来のフラッシュ ADC などの量子化雑音が一様分布であったのに対して, SFADC では正規分布状になることを示した.

最初に 1 ビット ADC の解析を行い, 量子化雑音の PDF が三角分布になることを示した.

次に, SFADC の解析を行いその分散は, 1 ビット ADC の分散を基準に比較器数でスケールされることを示した. 量子化雑音の PDF は, 中央付近が尖るものの, 正規分布状になることを解析的に示した.

また, 1024 個の比較器を用いる場合について数値シミュレーションを行い, 量子化雑音の PDF が正規分布状になる

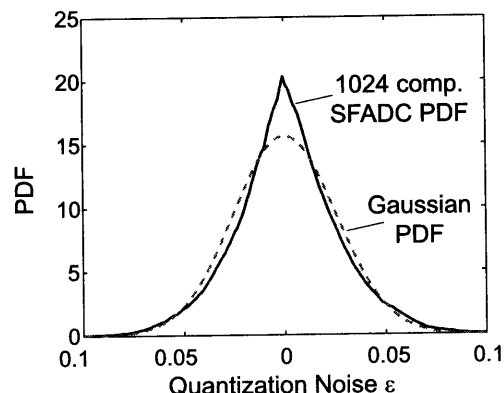


図9 数値シミュレーションを行い, 比較器数 1024 個の SFADC を 1000 組平均して推定した PDF. 比較器が多くても, 一様分布ではなく正規分布状になる.

ことと, 比較器数によるスケールが成立することを確かめた.

謝 辞

本研究は JSPS 科研費 (15K06048) の助成を受けたものである.

参考文献

- (1) B. Razavi 著 (黒田監訳), 「アナログ CMOS 集積回路の設計 (基礎編)」, 第 1 章, 丸善株式会社, 2003 年 3 月
- (2) B. Widrow and I. Kollár, *Quantization Noise Roundoff Error in Digital Computation, Signal Processing, Control, and Communications*, Cambridge University Press, New York, 2008.
- (3) B. Razavi, *Principles of data conversion system design*, sec. 5, IEEE Press, 1995.
- (4) S. Weaver, B. Hershberg, U.-K. Moon, "ENOB Calculation for ADCs with Input-Correlated Quantization Error Using a Sine-Wave Test," *22nd International Conference on Microelectronics*, pp. 5–8, Dec., 2010. DOI:10.1109/ICM.2010.5696205
- (5) S. Weaver, B. Hershberg, D. Knierim, U.-K. Moon, "A 6b Stochastic Flash Analog-to-Digital Converter Without Calibration or Reference Ladder," *IEEE A.S.S.C.C.*, 13–4, Nov. 2008.
- (6) H. Ham, T. Matsuoka, K. Taniguchi, "Application of Noise-Enhanced Detection of Subthreshold Signals for Communication Systems," *IEICE Trans. Fundamentals*, vol. E92-A, no. 4, pp. 1012–1081, April 2009.
- (7) 杉本俊貴, 谷本洋, 吉澤真吾, 「確率的フラッシュ AD 変換器に必要なコンパレータ数の見積もり手法」, 電気学会論文誌 C, Vol. 135, No.1, pp.18–25, 2015 年 1 月. DOI: 10.1541/ieejcis.135.18
- (8) 杉本 俊貴, 谷本 洋, 吉澤 真吾, 「確率的フラッシュ AD 変換器の線形化」, 電気学会電子回路研究会資料, ECT-14-029, 2014 年 1 月.
- (9) M. Ceekala, K. El-Sankary, E. El-Masry, "Stochastic ADC with random U-quadratic distributed reference voltage to uniformly distribute comparators trip point," *Analog Integr. Circ. Sig. Process.*, Vol. 74, No. 2, pp.461–465, Feb. 2013. DOI 10.1007/s10470-012-9996-3
- (10) 小倉久直, 確率過程入門, 森北出版, 1998 年 11 月.