縦続行列を用いた無損失回路と相反性の検討

谷本　洋*（北見工業大学），永井　信夫（北海道大学）

An Investigation into Lossless Circuits and Reciprocity via Chain Matrix

Hiroshi Tanimoto* (Kitami Institute of Technology), Nobuo Nagai (Hokkaido University)

Abstract

It is well known that a chain matrix of a reactance two-port has the property that A, D are real numbers and B, C are purely imaginary numbers. We present a new proof of this fact by using only chain matrix theory, which has been proved traditionally within a framework of admittance matrix or impedance matrix theory. Also, we derived a necessary and sufficient condition for a chain matrix to conserve reactive power.

キーワード：2-ポート，縦続行列，無損失性，相反性，リアクタンス回路，有効電力の保存，無効電力の保存
(two-port, chain matrix, losslessness, reciprocity, reactance two-port, conservation of active power, conservation of reactive power)

1. はじめに

相反回路であるリアクタンス 2-ポートの縦続行列 F の要素について，A, D は実数で B, C が純虚数であること自体は古くからよく知られている．

たとえば文献[1]では，相反なリアクタンス 2-ポートが Y 行列を持つことを仮定して y_{ij} が全て純虚数であることを証明し，ついで $y_{21} \neq 0$ であると仮定して Y 行列と F 行列の相互変換を利用して $A = -y_{22}/y_{21}, D = -y_{11}/y_{21}$ は実数で $B = -1/y_{21}, C = \det \boldsymbol{Y}/y_{21}$ が純虚数であることを導いている．同様に，リアクタンス 2-ポートの Z 行列の要素が全て純虚数であることからも，同じ結果が得られる．また，相反性についても Y 行列，Z 行列に対する条件から F 行列が相反であるための条件を導いている．しかし，著者らの知る限りでは Y 行列や Z 行列を経由せず，F 行列の要素から相反性や直接上記の結果を導いた例は尋ね当らない．

一方，理想変成器のように Y 行列も Z 行列も持たないが，F 行列を持つ回路素子が存在する．そのような回路素子の無損失性は Y 行列，Z 行列から判定できないため，無損失の定義に照らして直接調べる必要がある．たとえば理想変成器は Y 行列も Z 行列も持たないが F 行列を持つので，無損失性がその素子の F 行列から直接判定できれば便利であろう．このような試みは Efimov ら[2] によってなされており，本文ではまずこれを説明する．

次に，Efimov らによって得られた F 行列に対する無損失性の必要十分条件[2] に対して，さらに相反回路であるとの条件を付けると，頭書の結果が得られることを証明する．これが本文の寄与である．

通常の「リアクタンス回路」は LC のみから成っているので，無損失かつ必然的に相反回路であるが，本文では，逆に無損失回路が同時に相反回路である場合に A, D が実数でかつ，B, C が純虚数になることを示す．この結果から，A, D が実数でかつ，B, C が純虚数である相反な F 行列は無損失であることも示すことができる．

理想ジャイレータが無損失回路かつ非相反回路であることはよく知られているが，理想ジャイレータの F 行列では上記の関係は成り立たないことも公知である．すなわち，無損失性と相反性は別の概念である．このことについても例を挙げて考察を加えた．

さらに，F 行列の要素を用いて無効電力が保存するための必要十分条件を導いた．

2. 縦続行列における無損失の条件と相反性

ここで扱う無損失性とは，ポート-1 から電源によって回路に入力された有効電力と，ポート-2 から負荷に対して供給された有効電力が等しいことと定義する．無効電力の関係については **3.** で別に考察する．

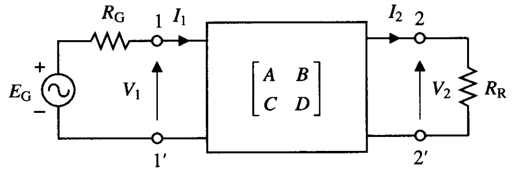

図 1　両側終端された 2-ポート

〈2·1〉 縦続行列が無損失回路を表すための条件[2]

図 1 の回路において，縦続行列

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{1}$$

で表される伝送回路が無損失であるためには縦続行列にどのような制限が課せられるかを調べる†．

まず，ポート 2-2′ から右側の回路が消費する有効電力は

$$\mathrm{Re}\,(V_2{}^* I_2) = \frac{V_2{}^* I_2 + V_2 I_2{}^*}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} V_2{}^* & I_2{}^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

† Efimov[2] は結果だけを述べており，導出については記述がないので，結果の解釈と導出は文献[3] によった．

と表される．次に，ポート 1-1′ において右側の回路が消費する有効電力は

$$\mathrm{Re}(V_1{}^*I_1)=\frac{V_1{}^*I_1+V_1I_1{}^*}{2}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}V_1{}^* & I_1{}^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_1\\V_1\end{pmatrix} \tag{3}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}V_2{}^* & I_2{}^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^* & C^*\\B^* & D^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V_2\\I_2\end{pmatrix} \tag{4}$$

と計算される．

したがって，伝送回路が無損失ならば，ポート 1-1′ から入った有効電力とポート 2-2′ に入った有効電力が等しくなければばならない．すなわち，$\mathrm{Re}(V_1{}^*I_1)=\mathrm{Re}(V_2{}^*I_2)$ が成り立たなければならないから，ポートの電圧電流を消去して伝送回路だけのパラメータで表すと，式 (5) が成り立つ：

$$\begin{pmatrix}A^* & C^*\\B^* & D^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\C & D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} \tag{5}$$

上式左辺最初の行列が $\boldsymbol{F}$ の共軛転置行列（エルミート共軛行列）であることから，これに肩符 † を付して $\boldsymbol{F}^\dagger$ と表し，さらに

$$\boldsymbol{J}\equiv\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} \tag{6}$$

と置くと，式 (5) は次の簡単な形で表せる．

$$\boldsymbol{F}^\dagger\boldsymbol{J}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{J} \tag{7}$$

逆に，式 (7) が成り立つならば伝送回路は無損失である．なぜなら，$\mathrm{Re}(V_1{}^*I_1)=\mathrm{Re}(V_2{}^*I_2)$ の成り立つことが上の計算を逆に辿ることにより明らかであるから．以上から，伝送回路が無損失であるための必要十分条件は式 (7) が成り立つことであるが明らかになった†．

なお，上記の計算から，F 行列が受動回路を表すためには $\mathrm{Re}(V_1^*I_1)\geq\mathrm{Re}(V_2^*I_2)$ でなければならないから，行列

$$\boldsymbol{F}^\dagger\boldsymbol{J}\boldsymbol{F}-\boldsymbol{J} \tag{8}$$

が非負定値行列であれば良い [2][3]．

上記の条件はもちろん，定常状態においてのはなしである．また，以上の議論は伝送回路部分が集中定数か分布定数かに関係ないので，どちらについても成り立つ．さらに，伝送回路に対して相反性を仮定していないので，非相反回路についても成り立つ．

以上のように，無損失性と相反性は一応関係がないように見える．本当にそうだろうか？

〈2·2〉 ポートの電圧・電流から有効電力を求める　後の議論との関係で，ポートの有効電力表記の経済のため簡略化をしておく．まず，F 行列で表される回路のポートの電圧・電流からなるベクトルを $\boldsymbol{x}=(V,I)^{\mathrm{T}}$ と表す．すると，$\boldsymbol{x}$ の持つ有効電力 $P_{\mathrm{a}}(\boldsymbol{x})$ は，式 (2) を参照して，

$$P_{\mathrm{a}}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\dagger\boldsymbol{J}\boldsymbol{x} \tag{9}$$

と表せる．

〈2·3〉 無損失回路の性質　式 (5) の両辺の行列式を計算してみると，

$$(A^*D^*-B^*C^*)(-1)(AD-BC)=-1$$

$$\therefore\ |AD-BC|^2=1\ \Leftrightarrow\ |\det\boldsymbol{F}|^2=1\ \Leftrightarrow\ \det\boldsymbol{F}=e^{j\phi} \tag{10}$$

を得る．すなわち，無損失 2-ポートの F 行列の行列式の大きさの 2 乗は 1 である．言い換えれば，無損失 2-ポートの F 行列はユニタリ行列である．従って，無損失の伝送回路を通過する前後でベクトル $\boldsymbol{x}$ の長さ $(=\sqrt{\boldsymbol{x}^\dagger\boldsymbol{x}})$ は変化せず，位相だけが変化する．なお，この逆は必ずしも成り立たないことに注意せよ．

〈2·4〉 F 行列が相反回路を表すための条件　F 行列が相反性を満すための条件は，よく知られているように

$$\det\boldsymbol{F}=AD-BC=1 \tag{11}$$

で与えられる．通常，この条件は受動線形 2-ポートについて Tellegen の定理を適用して得られる

$$\left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{V_2=0}=\left.\frac{\hat{I}_1}{\hat{V}_2}\right|_{\hat{V}_1=0} \tag{12}$$

を Y 行列（Z 行列）に適用して $y_{12}=y_{21}$（$z_{12}=z_{21}$）の関係を導き，これを F 行列の要素で表すことで求められる（図 2）．

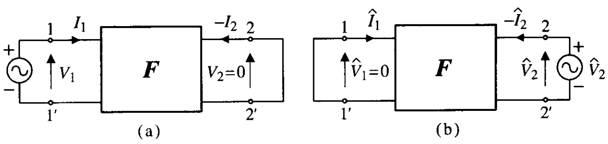

図 2　相反回路であるための条件の説明図

これに対して，本文では上記の相反性の条件を与えて，F 行列の要素にいかなる条件が課せられるかを直接導く．このようにすることにより，抽象的に相反性の条件が F 行列で表せる．

まず，式 (12) の左辺のケースについて考える．$V_2=0$ が条件であるから，

$$V_1=B(-I_2) \tag{13}$$

$$I_1=D(-I_2) \tag{14}$$

を得る．

次に式 (12) の左辺のケースであるが，$\hat{V}_1=0$ の条件だから

$$0=A\hat{V}_2+B(-\hat{I}_2) \tag{15}$$

† この性質を満たす行列を J-unitary 行列という [2]．

$$\hat{I}_1 = C\hat{V}_2 + D(-\hat{I}_2) \qquad (16)$$

を得る．

式 (13) に式 (16) を乗じて

$$V_1\hat{I}_1 = -BC\,I_2\hat{V}_2 + BD\,I_2\hat{I}_2 \qquad (17)$$

を得る．一方，式 (14) に式 (15) を乗じると

$$0 = -AD\,I_2\hat{V}_2 + BD\,\hat{I}_2 I_2 \quad \therefore\ BD\,I_2\hat{I}_2 = AD\,I_2\hat{V}_2 \qquad (18)$$

を得るから，式 (17) の右辺第 2 項に式 (18) の第 2 式を代入すると，

$$V_1\hat{I}_1 = (AD - BC)I_2\hat{V}_2 \qquad (19)$$

を得る．従って，式 (12) が成り立つならば

$$AD - BC = 1 \qquad (20)$$

となり，相反 2-ポートならば，その F 行列が $\det \boldsymbol{F} = 1$ となることが証明できた．以上のプロセスを逆に辿ることにより，$\det \boldsymbol{F} = 1$ ならば，それが相反 2-ポートであることも明らかである．

以上より

$$\text{2-ポートが相反回路である} \Leftrightarrow \det \boldsymbol{F} = 1 \qquad (21)$$

が証明された．■

〈2·5〉 Z 行列の場合　Z について，相反性を仮定せずに無損失回路を表す条件を導いてみよう．まず，Z 行列の表すものは

$$\underbrace{\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}}_{\equiv \boldsymbol{V}} = \underbrace{\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}}_{\equiv \boldsymbol{Z}} \underbrace{\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}}_{\equiv \boldsymbol{I}} \qquad (22)$$

であり，I_2 の向きが F 行列とは逆であることに注意すれば，両ポートから回路に入る有効電力は $P_a = \mathrm{Re}\,(V_1^* I_1 + V_2^* I_2)$ と表されるから，$P_a = 0$ となる条件が，求めるものである．具体的に計算すると，

$$\begin{aligned} P_a = \mathrm{Re}(\boldsymbol{V}^\dagger \boldsymbol{I}) &= \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{V}^\dagger \boldsymbol{I} + \left(\boldsymbol{V}^\dagger \boldsymbol{I}\right)^*\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[(\boldsymbol{Z}\boldsymbol{I}^\dagger)\boldsymbol{I} + (\boldsymbol{Z}\boldsymbol{I}^\dagger \boldsymbol{I})^*\right] = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{I}^\dagger \boldsymbol{Z}^\dagger \boldsymbol{I} + \boldsymbol{I}^T \boldsymbol{Z}^T \boldsymbol{I}^*\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{I}^\dagger \boldsymbol{Z}^\dagger \boldsymbol{I} + \boldsymbol{I}^\dagger \boldsymbol{Z} \boldsymbol{I}\right] = \frac{1}{2}\boldsymbol{I}^\dagger\left(\boldsymbol{Z}^\dagger + \boldsymbol{Z}\right)\boldsymbol{I} \qquad (23) \end{aligned}$$

となる．2 行目から 3 行目への変形で，$\boldsymbol{I}^T \boldsymbol{Z}^T \boldsymbol{I}^*$ はスカラーであるから，これを転置しても不変であることを使った．式 (23) が任意のポート電流 $\boldsymbol{I}$ に対してゼロとなるためには，

$$\boldsymbol{Z}^\dagger + \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{0} \qquad (24)$$

でなければならない．成分で書き表すと，

$$z_{11}^* + z_{11} = 0,\ \ z_{22}^* + z_{22} = 0,\ \ z_{12}^* + z_{21} = 0 \qquad (25)$$

を得る．

すなわち，z_{11} と z_{22} は純虚数でなければならないが，z_{12} と z_{21} は実数，たとえば，1 と −1 でも満足する．ところが，これに相反性の条件 $z_{12} = z_{21}$ を付け加えると，今度は z_{12} も純虚数でなければならない．すなわち，リアクタンス回路ならば，Z 行列の要素はすべて純虚数であるが，無損失回路であっても，非相反ならばこのことは成り立たない．

当然のことながら，「リアクタンス回路⇒無損失回路」であるが，逆は必ずしも成り立たないことに注意すべきである．

Y 行列についても同様であるから，繰り返さない．

〈2·6〉 無損失性と相反性　相反回路でかつ無損失回路となるものに，リアクタンス素子だけから構成されるリアクタンス 2-ポートがある．古典的にはリアクタンス 2-ポートの F パラメータは，A, D が実数で B, C が純虚数であることがよく知られている．さらに，リアクタンス 2-ポートではないものの，相反回路では理想変成器も無損失であることがよく知られている．また，反相反回路としては理想ジャイレータが無損失であることも知られている．

本節では無損失性を表す J-unitary の条件に，さらに相反性の条件を付けると A, B, C, D にどのような制約が課せられるか検討する．まず，リアクタンス 2-ポート以外の無損失 2-ポートを眺めてみる（図 3）．

理想ジャイレータ　ジャイレーションコンダクタンスが実数 G である理想ジャイレータは，その縦続行列が次式で表されるから，その行列式は −1 になる：

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 0 & 1/G \\ G & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore\ \det \boldsymbol{F} = -1 \qquad (26)$$

理想変成器　変成比が $1 : n$（n は実数）の理想変成器は，その縦続行列が次式で表されるから，その行列式は +1 になる：

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 1/n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \quad \therefore\ \det \boldsymbol{F} = +1 \qquad (27)$$

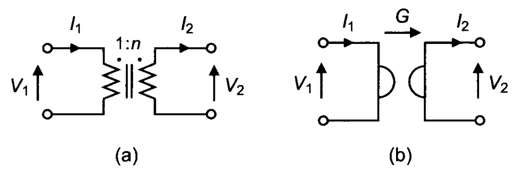

図 3　理想変成器 (a) と理想ジャイレータ (b)

ここに挙げた例は必ずしもリアクタンス回路ではないが[†]，$|AD - BC|^2 = 1$ を満足し，確かに無損失回路である．

さて，本題に戻って次の命題を証明する．

[†] 理想ジャイレータは B, C が実数であり，これは明らかにリアクタンス回路ではない．

命題　無損失回路の縦続行列 $\boldsymbol{F}$ が相反性を満足するならば，A, D は実数で B, C は純虚数である．

証明　F 行列が無損失回路を表すための必要十分条件である式 (7) と，相反回路であるための条件 $\det \boldsymbol{F} = AD - BC = 1$ が成り立つことを仮定して，A, D は実数で B, C は純虚数であることを証明する．

式 (7) の条件と，相反性の条件から，A, B, C, D は次の条件を満足する：

$$A^*C + AC^* = 0 \tag{28}$$

$$A^*D + BC^* = 1 \tag{29}$$

$$B^*C + AD^* = 1 \tag{30}$$

$$B^*D + BD^* = 0 \tag{31}$$

$$AD - BC = 1 \tag{32}$$

式 (29) と (32)，および (30) と (32) をそれぞれ辺々引き，次式を得る．

$$D(A^* - A) + B(C^* + C) = 0, \tag{33}$$

$$A(D^* - D) + C(B^* + B) = 0 \tag{34}$$

ところが，任意の複素数 z に対して

$$z^* - z = -2j\,\mathrm{Im}\,z,\ \ z^* + z = 2\,\mathrm{Re}\,z \tag{35}$$

と表せるから，式 (33), (34) は

$$(\mathrm{Re}\,D + j\,\mathrm{Im}\,D)(-j\,\mathrm{Im}\,A) + (\mathrm{Re}\,B + j\,\mathrm{Im}\,B)\,\mathrm{Re}\,C = 0, \tag{36}$$

$$(\mathrm{Re}\,A + j\,\mathrm{Im}\,A)(-j\,\mathrm{Im}\,D) + (\mathrm{Re}\,C + j\,\mathrm{Im}\,C)\,\mathrm{Re}\,B = 0 \tag{37}$$

と書ける．式 (36), (37) の両辺の実部同士は等しいから，

$$\mathrm{Im}\,A\,\mathrm{Im}\,D + \mathrm{Re}\,B\,\mathrm{Re}\,C = 0 \tag{38}$$

の関係を得る．また，両辺の虚部同士も等しいから，

$$\mathrm{Im}\,A\,\mathrm{Re}\,D - \mathrm{Im}\,B\,\mathrm{Re}\,C = 0, \tag{39}$$

$$\mathrm{Re}\,A\,\mathrm{Im}\,D - \mathrm{Re}\,B\,\mathrm{Im}\,C = 0 \tag{40}$$

の関係も得られる．

つぎに，式 (38) と (39) を $\mathrm{Im}\,A$ と $\mathrm{Re}\,C$ に関する連立方程式と見て解くと，

$$\mathrm{Im}\,A = 0,\ \ \mathrm{Re}\,C = 0 \tag{41}$$

を得る．同様に式 (38) と (40) を $\mathrm{Im}\,D$ と $\mathrm{Re}\,B$ に関する連立方程式と見て解くと

$$\mathrm{Im}\,D = 0,\ \ \mathrm{Re}\,B = 0 \tag{42}$$

を得る．

■

この証明の意義を考えてみる．まず，Y, Z, S などの助けを借りず，F 行列の枠内だけで証明したことが挙げられる．Z や Y 行列を持たない回路であっても，F 行列を持つものがあるので[†]，より広い範囲の回路について証明した事になる．

さらに，無損失の条件と相反回路の条件を抽象的に定義したことにより，F 行列を構成している回路素子の種類によらず，判定することができる．たとえば，回路が具体的に LC のみから構成されたものでなくても，(そのようなものがあったとすれば[(3)(4)]) F 行列から機械的に無損失であるか，また相反回路であるかが判定可能である．たとえば，無損失線路から成る単位素子はその F 行列から直ちにリアクタンス回路であることが分る．

次の例は教育的であろう．

例題 1.　F 行列の要素 A, D が実数で B, C が純虚数ならば，この回路は無損失であるか？

解　必ずしも無損失ではない．なぜなら，$B = jb,\ C = jc$ と置き，b, c が実数であるとすれば，

$$\begin{pmatrix} A & -jc \\ -jb & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & jb \\ jc & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & AD + bc \\ AD + bc & 0 \end{pmatrix} \tag{43}$$

であるから，これが無損失回路を表すためにはさらに $AD + bc = 1$ の条件，すなわち，$AD - BC = 1$ の相反回路である条件が必要である．したがって，正しい命題は，ある回路の「A, D が実数で B, C が純虚数」かつ「相反回路である」ならば，その回路は無損失である，となる．

■

このように，陥りがちな「無損失回路＝（相反回路である）リアクタンス回路」という先入観が解消され，無損失性と相反性は別の概念であることが露わになることも，F 行列を用いた利点であろう．

なお，無損失回路であれば $|AD - BC|^2 = 1$ であるから，例えば，無損失かつ $AD - BC = -1$ の反相反だったらどうなるかを考えると，相反の場合と同様の手順により A, D が純虚数で B, C が実数という条件が出る．もちろん，理想ジャイレータはこの条件を満足するので，無損失回路である．

3. 無効電力が保存するための条件

前節では F 行列が無損失回路を表すための条件を説明したが，これは言い換えると有効電力が保存するための条件であった．しかし，通常の回路理論では無効電力がどうなるかという事はふつう扱われない．そこで，本節では無効電力が保存するための条件について検討する．

〈3・1〉 無効電力の計算　記法の経済のため，ポートの電圧・電流から成るベクトルを $\boldsymbol{x} = (V, I)^{\mathrm{T}}$ と表すこととする．$\boldsymbol{x}$ の持つ無効電力 $P_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{x})$ を求めるには，無効電力の定義に基づいて〈2・1〉における有効電力の計算と同様の計算により，

† 例えば理想変成器など，1 次側と 2 次側の量が独立でない回路．逆に，1 次側と 2 次側が無関係な回路は F 行列で表せない．

$$P_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{Im}(V^{*}I) = \frac{V^{*}I - VI^{*}}{2j} = \frac{1}{2j}\boldsymbol{x}^{\dagger}\boldsymbol{K}\boldsymbol{x} \tag{44}$$

という計算を行えばよい．ここで，

$$\boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{45}$$

と置いた．ここで，明らかに $\boldsymbol{K}^{\dagger} = -\boldsymbol{K}$ であるから $\boldsymbol{K}$ は交代エルミート行列である．よって，$\boldsymbol{K}$ から作ったエルミート形式は純虚数値を取る．しかし，式 (44) はこのエルミート形式を $2j$ で除してあるので，その値は正負の実数値を取る†．

なお，$\boldsymbol{E}$ を単位行列として，$\boldsymbol{K}\boldsymbol{K} = -\boldsymbol{E}$ が成り立ち，$\boldsymbol{K}$ は虚数単位に相当するような行列とみなせる．

〈3·2〉 $\boldsymbol{F}$ 行列が無効電力を保存するための条件　無効電力は式 (44) で表されるので，$\boldsymbol{F}$ が無効電力を保存するためにはポート-1 とポート-2 における無効電力が等しければよいから，

$$P_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{x}_1) = P_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{x}_2) \tag{46}$$

が成り立たねばならない．すなわち，$\boldsymbol{F}$ が無効電力を保存する回路を表すための必要十分条件は，有効電力の保存と同様の計算により

$$\boldsymbol{F}^{\dagger}\boldsymbol{K}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{K} \tag{47}$$

が成り立つことである．

例題.2（理想変成器と理想ジャイレータ）　まず理想変成器（1:1）について無効電力が保存するか確かめる：

$$\boldsymbol{F}^{\dagger}\boldsymbol{K}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{K}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{K} \tag{48}$$

であるから，理想変成器は無効電力も保存する．

次に，理想ジャイレータ（ジャイレーションコンダクタンス=1）についてテストする：

$$\boldsymbol{F}^{\dagger}\boldsymbol{K}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{K}\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{K} \tag{49}$$

したがって，理想ジャイレータは無効電力を保存しない．

直結の回路（= 1 : 1 の理想変成器）は明らかに無効電力を保存するが，理想ジャイレータ（その $\boldsymbol{F}$ 行列は $\boldsymbol{J}$ である）は無損失ではあるが無効電力を保存しない．したがって，有効電力の保存性（=無損失性）と無効電力の保存性は別の概念であることが分かった．

無効電力が保存するための条件を，$\boldsymbol{F}$ 行列の要素に対する条件として調べてみよう．無効電力を保存する $\boldsymbol{F}$ 行列は式 (47) を満足しなければならないから，その右辺の要素は次式の条件を持たねばならない．

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{\dagger} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} CA^{*} - AC^{*} & DA^{*} - BC^{*} \\ CB^{*} - AD^{*} & DB^{*} - BD^{*} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2j\,\mathrm{Im}(CA^{*}) & DA^{*} - BC^{*} \\ CB^{*} - AD^{*} & 2j\,\mathrm{Im}(DB^{*}) \end{pmatrix} \tag{50}$$

これが $\boldsymbol{K}$ に等しいのだから，次が成り立たなければならない：

$$\mathrm{Im}(CA^{*}) = 0,\ \ \mathrm{Im}(DB^{*}) = 0 \tag{51}$$

$$DA^{*} - BC^{*} = 1,\ \ CB^{*} - AD^{*} = -1 \tag{52}$$

ところが，式 (52) の 2 式を辺々加えて整理すると

$$DA^{*} - BC^{*} + CB^{*} - AD^{*} = 0$$
$$\Rightarrow 2j\{\mathrm{Im}(DA^{*}) + \mathrm{Im}(CB^{*})\} = 0 \tag{53}$$

となり，$\boldsymbol{F}$ が無効電力を保存するならば，その要素は

$$\mathrm{Im}(A^{*}D + B^{*}C) = 0 \tag{54}$$

を満足することが示された．

〈3·3〉 ジャイレータにおける無効電力の非保存　拡張 Tellegen の定理の直接的帰結として，電源とその負荷の間に成り立つ複素電力の保存則がある．複素電力として保存するのであるから，明らかに有効電力が保存し，無効電力も保存する．

ジャイレータでは有効電力は保存するが，無効電力は保存しないことが上で示された．これは上記の複素電力の保存則に抵触するように思うかもしれないが，当らない．ジャイレータはその入力ポートと出力ポートの間で有効電力をそのまま伝送するが，無効電力は内部に蓄積するため，保存しないのである．

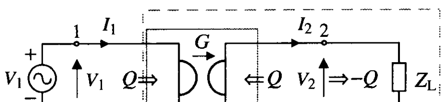

図 4　ジャイレータの無効電力

それが証拠に，ジャイレータの入力ポートに電圧源を接続し，出力ポートに任意のインピーダンスを接続した状態で，電源の供給した複素電力と，ジャイレータの入力ポートに供給された複素電力を比較してみると，次のようになる．

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/G \\ G & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ V_2/Z_{\mathrm{L}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_2/(GZ_{\mathrm{L}}) \\ GV_2 \end{pmatrix} \tag{55}$$

従って

† あるいは $\boldsymbol{K}$ の代わりに $\boldsymbol{K}' \equiv j\boldsymbol{K}$ を用いて，$P_r(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\dagger}\boldsymbol{K}'\boldsymbol{x}$ と定義したほうが $P_a(\boldsymbol{x})$ と対称性がよいか．因みに交代エルミート行列である $\boldsymbol{K}$ の固有値は $\pm j$ であり，エルミート行列である $\boldsymbol{K}'$ の固有値は ± 1 である．

$$P_1 = V_1^* I_1 = \frac{|V_2|^2}{Z_L^*},\ P_2 = V_2^* I_2 = \frac{|V_2|^2}{Z_L} \qquad (56)$$

である．よって，

$$\mathrm{Re}\,(P_1) = \left|\frac{V_2}{Z_L}\right|^2 \mathrm{Re}(Z_L) = |I_2|^2\,\mathrm{Re}(Z_L), \qquad (57)$$

$$\mathrm{Im}\,(P_1) = \left|\frac{V_2}{Z_L}\right|^2 \mathrm{Im}(Z_L) = |I_2|^2\,\mathrm{Im}(Z_L) \qquad (58)$$

これに対して，

$$\mathrm{Re}\,(P_2) = \left|\frac{V_2}{Z_L}\right|^2 \mathrm{Re}(Z_L^*) = |I_2|^2\,\mathrm{Re}(Z_L) = \mathrm{Re}\,(P_1), \qquad (59)$$

$$\mathrm{Im}\,(P_2) = \left|\frac{V_2}{Z_L}\right|^2 \mathrm{Im}(Z_L^*) = -\,|I_2|^2\,\mathrm{Im}(Z_L) = -\mathrm{Im}\,(P_1). \qquad (60)$$

よって，

$$\mathrm{Re}(P_1) = \mathrm{Re}(P_2),\ \ \mathrm{Im}(P_1) = -\mathrm{Im}(P_2) \qquad (61)$$

となり，ジャイレータの入出力で有効電力は等しいが，無効電力は符号が反転する．すなわち，ジャイレータの内部には $2\mathrm{Im}(P_1)$ 分だけ，無効電力が蓄積されている．それにも拘らず，電源がジャイレータに与えた無効電力はちょうど $\mathrm{Im}(P_1)$ であるから，電源と負荷の間にはきちんと複素電力の保存が成り立っている．

まとめると，

- 電源からは有効電力 $P = \mathrm{Re}(P_1)$ と無効電力 $Q = \mathrm{Im}(P_1)$ がジャイレータ側に供給されている．すなわち，図4の電源 V_1 から青線（破線）内の回路に P と Q が供給されている．
- ジャイレータからは，負荷に対して有効電力 $\mathrm{Re}(P_2) = \mathrm{Re}(P_1) = P$ と，無効電力 $\mathrm{Im}(P_2) = -\mathrm{Im}(P_1) = -Q$ が供給されている．すなわち，図4の赤線（実線）内の回路から，Z_L に P と $-Q$ が供給されている．
- 電源の供給した有効電力は，ジャイレータを介してそのまま負荷に与えられる．
- 電源の供給した無効電力は，ジャイレータを介すと符号を反転したものが負荷に与えられる．
- 以上より，ジャイレータは受け取った無効電力 Q に対して，無効電力 $-Q$ を負荷に与えるので，ジャイレータ内部には差し引き $2Q$ の無効電力が蓄えられている．すなわち，電源の供給した無効電力の2倍の無効電力が蓄積される．
- これはなぜかと言うに，ジャイレータはインピーダンスをアドミタンスに変換するので，必然的に虚部の符号が反転し，無効電力が符号を反転することになるからである：

$$\frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} \qquad (62)$$

- $Q = 0$ となるためには，式(58)から，$\mathrm{Im}(Z_L) = 0$ and/or $I_2 = 0$ であることが必要である．つまり，負荷が純抵抗であるか（ゼロも含む），開放ならば，無効電力はゼロであり，このとき無効電力は保存する．

4. まとめ

以上，F 行列で表される2-ポートが，(i) 相反回路であるための必要十分条件，(ii) 無損失であるための（＝有効電力を保存するための）必要十分条件，(iii) 無効電力が保存するための必要十分条件について論じた．

その結果，2-ポートを表す F 行列の要素 A, B, C, D に関しては，無損失性と相反性に関連して，既知のことも含めて次のようなことがわかった．

- 2-ポートが無損失かつ相反であれば，A, D が実数で B, C が純虚数である．
- 2-ポートの A, D が実数で B, C が純虚数であり，かつ，相反であれば，その2-ポートは無損失である．
- 2-ポートが無損失であれば，その F 行列の行列式は $|\det \boldsymbol{F}|^2 = |AD - BC|^2 = 1$ を満足する．逆が成り立つとは限らない．
- したがって，$AD - BC = -1$ でも無損失であり得る．たとえば，理想ジャイレータがその例である．さらに，$AD - BC = e^{j\phi}$ であっても無損失回路であり得る[(3)(4)]．

また，2-ポートにおける無効電力の保存に関する必要十分条件を与え，既知のことも含めて次のようなことがわかった．

- 無損失2-ポートならば有効電力を保存するが，無効電力を保存するとは限らない．無損失2-ポートであって，かつ，無効電力を保存するものとして理想変成器がある．
- リアクタンス2-ポートは無効電力を内部に留保するから，無効電力を保存しない．すなわち，その内部で有効電力は消費できないが，無効電力は消費できる！
- 抵抗（と理想変成器）のみから成る2-ポートは有効電力を保存しないが，無効電力を保存する．すなわち，その内部で有効電力は消費できるが，無効電力は消費できない！

以上，何か新しい知見が得られたわけではないが，筆者が学生の頃から不思議に思っていたことの一部が解明できたことを嬉しく思う．

参考文献

(1) 高木茂孝,「線形回路理論」, 第5章, p. 117–121, 昭晃堂, 2004年.

(2) A. V. Efimov and V. P. Potapov, "J-expanding matrix functions and their role in the analytical theory of electrical circuits (in Russian)," Usp. Mat. Nauk, pp. 65–130, 1973
英訳がある：
A. V. Efimov and V. P. Potapov, "J-expanding matrix functions and their role in the analytical theory of electrical circuits," Russian Mathematical Surveys, Vol. 28, No. 1, pp. 69-140, 1973.

(3) 永井信夫,「新しい概念による　回路理論と量子力学への応用（自費出版）」, p. 20, 正文社, 2013年2月.

(4) 粟井郁雄, アルン・クマル・シャハ, 真田篤志, 古賀亘, 山方博文, ユージン・O・カメネツキ,「静磁波 BAP のマイクロ波特性　―新しい人工媒質の提案―　」, 電子情報通信学会技術報告, MW2000-3, 2000年5月.