

# 多端子対 F 行列による RC ポリフェーズフィルタの解析

福良 純也\* 谷本 洋

北見工業大学

## Analisis of RC polyphase filter by using multi-port F-matrix

Junya Fukura and Hiroshi Tanimoto (Kitami institute of Technology)

### Abstract

We propose a utilization of muti-port F-matrix for analysis of complex networks. A procedure to obtain the 4-port F-matrix from Y-matrix is given. RC polyphase filter has been analyzed as an example by the proposed method. A consistent result is obtained with other methods.

キーワード RC ポリフェーズフィルタ, F 行列, 複素係数フィルタ, 複素電圧伝達関数

(RC polyphase filter, F-matrix, Complex coefficient filter, Complex voltage transfer function)

### 1. ま え が き

移動無線通信の情報量の増大に伴う周波数帯域の広域化により、将来さらに広帯域な 90 度移相器が必要とされる。複素係数フィルタは周波数が 0 の軸に対して非対称な周波数特性を有することや直交信号を扱うことから、単側波帯の生成や直交変復調器に利用するための研究がされている。なかでも抵抗 R とコンデンサ C のみで構成される RC ポリフェーズフィルタ（以下 RCPF と略記）は広帯域・高精度の 90 度移相器としての特徴を有するため、移動無線端末のフロントエンドにおける局部発振器やイメージ除去フィルタ用の 90 度移相器として注目される回路である。

今までの RCPF の解析は、素子値のばらつきのない、回路の対称性を前提とした場合の解析であるため [1] [2]、一般的な素子値がばらついた場合にはそのままでは使えない。また、文献 [2] の解析は対称性を巧みに利用した方法であるが電圧のみによる表現であるので、回路の中の電流がわからない。文献 [1] の解析はどんな非対称な入力信号も対称座標法によって対称な信号の和として表せることから、入力信号は対称な信号のみを仮定している。したがって、実際に非対称な信号が入力された場合には対称な信号の和に分解して考えなければならず手間がかかる。

フィルタ回路においては所望の特性を得るために多段接続する手法が多用されるが、前段の回路にとっては接続される段数が変わることは負荷が変わることに等しく、伝達関数が変わることに等しい。したがって段数もしくは負荷

が変わるたびに伝達関数を計算し直さなければならない。そこで F 行列で回路や負荷を表現すれば F 行列の単なる乗算で伝達関数を容易に求めることができると思われる。しかし、一般的な F 行列は 2 端子対の回路に対する表現なので複素回路網のような 4 端子対回路に適用するためには F 行列を拡張する必要がある。

そのため本論文では、対称性を初めから考慮しない、電圧・電流を同時に表現できる多端子対 F 行列を新たに定義して複素電圧伝達関数を求めるための見通しのよい手法を提案する。この行列を素子のばらつきがなく対称な入力信号が入力される RCPF に適用して [1] [2] と同様の結果が得られることを示す。

### 2. 多端子対 F 行列による表現

図 1 のような一般的な 4 端子対回路の電圧・電流を Y 行列で表すと次のように表現できる。

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I'_1 \\ I'_2 \\ I'_3 \\ I'_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & \dots & \dots & Y_{18} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & \dots & \dots & Y_{28} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & \dots & \dots & Y_{38} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ Y_{81} & Y_{82} & Y_{83} & \dots & \dots & Y_{88} \end{bmatrix}}_Y \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V'_1 \\ V'_2 \\ V'_3 \\ V'_4 \end{bmatrix}$$

多端子対 F 行列を定義するために図 2 のように電圧・電流を再定義する。縦続接続を考慮して、 $I_3 = -I_1$ 、 $I_4 = -I_2$ 、 $I'_3 = -I'_1$ 、 $I'_4 = -I'_2$  となるように入出力を接続するものとする。

$$\begin{bmatrix} I_{I_{in}} \\ I_{Q_{in}} \\ I_{I_{out}} \\ I_{Q_{out}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} Y'_{11} & Y'_{12} & Y'_{13} & Y'_{14} \\ Y'_{21} & Y'_{22} & Y'_{23} & Y'_{24} \\ Y'_{31} & Y'_{32} & Y'_{33} & Y'_{34} \\ Y'_{41} & Y'_{42} & Y'_{43} & Y'_{44} \end{bmatrix}}_{Y'} \begin{bmatrix} V_{I_{in}} \\ V_{Q_{in}} \\ V_{I_{out}} \\ V_{Q_{out}} \end{bmatrix}$$

ここで、

$$\begin{aligned} I_{I_{in}} &= I_1 - I_3, & V_{I_{in}} &= V_1 - V_3 \\ I_{Q_{in}} &= I_2 - I_4, & V_{Q_{in}} &= V_2 - V_3 \\ I_{I_{out}} &= I'_1 - I'_3, & V_{I_{out}} &= V'_1 - V'_3 \\ I_{Q_{out}} &= I'_2 - I'_4, & V_{Q_{out}} &= V'_2 - V'_4 \\ Y'_{nn} &= (Y_{nn} - Y_{(n+2)(n)}) - (Y_{n(n+2)} - Y_{(n+2)(n+2)}) \end{aligned}$$

である。

$Y'$  行列を 1 次変換して次のような多端子対 F 行列に表す (図 3)。

$$\begin{bmatrix} I_{in} \\ Q_{in} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} F_A & F_B \\ F_C & F_D \end{bmatrix}}_F \begin{bmatrix} I_{out} \\ Q_{out} \end{bmatrix} \quad (1)$$

ここで、

$$\begin{aligned} I_{in} &= \begin{bmatrix} V_{I_{in}} \\ I_{I_{in}} \end{bmatrix}, & I_{out} &= \begin{bmatrix} V_{I_{out}} \\ -I_{I_{out}} \end{bmatrix} \\ Q_{in} &= \begin{bmatrix} V_{Q_{in}} \\ I_{Q_{in}} \end{bmatrix}, & Q_{out} &= \begin{bmatrix} V_{Q_{out}} \\ -I_{Q_{out}} \end{bmatrix} \\ F_A &= \begin{bmatrix} A_A & B_A \\ C_A & D_A \end{bmatrix}, & F_B &= \begin{bmatrix} A_B & B_B \\ C_B & D_B \end{bmatrix} \\ F_C &= \begin{bmatrix} A_C & B_C \\ C_C & D_C \end{bmatrix}, & F_D &= \begin{bmatrix} A_D & B_D \\ C_D & D_D \end{bmatrix} \end{aligned}$$

であり  $I_{in}, Q_{in}, I_{out}, Q_{out}$  の  $I, Q$  はそれぞれ同相成分 (In-phase), 直交成分 (Quadrature-phase) を意味する。多端子対 F 行列の各要素 ( $F_A, F_B, F_C, F_D$ ) は再び F 行列であり  $Y'$  行列の要素で表現できる (付録 1 参照)。また、多端子対 F 行列は F 行列の拡張なので、F 行列の性質を有し、回路が多段接続されても、いかなる負荷が接続されてもこの多端子対 F 行列で表現できる。

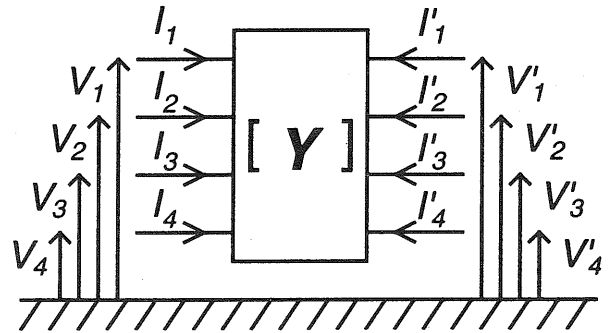


図 1 4 端子対回路の Ymatrix

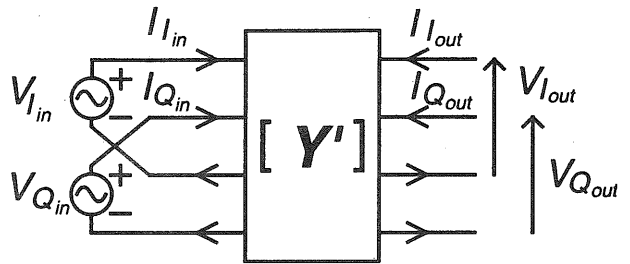


図 2 4 端子対回路の Ymatrix

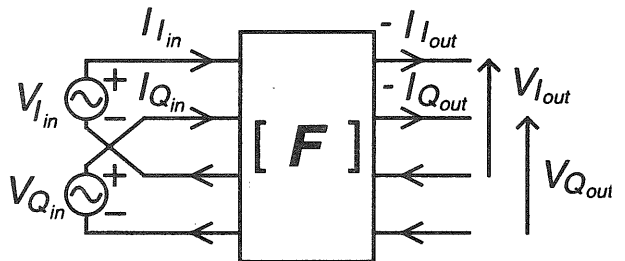


図 3 4 端子対回路の Fmatrix

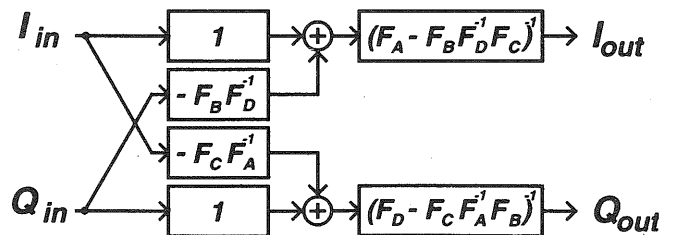


図 4 複素伝達関数

### 3. 多端子対 F 行列による複素伝達関数

(1) 式を出力信号  $I_{out}, Q_{out}$  について解くと次のようになる。

$$I_{out} = (F_A - F_B F_D^{-1} F_C)^{-1} (I_{in} - F_B F_D^{-1} Q_{in}) \quad (2)$$

$$Q_{out} = (F_D - F_C F_A^{-1} F_B)^{-1} (-F_C F_A^{-1} I_{in} + Q_{in}) \quad (3)$$

式(2),(3)は入力信号がどのように出力の同相成分・直交成分に伝わるかを示しており、理解しやすい形式である(図4)。また、複素電圧伝達関数は2端子対と同様に出力電流  $-I_{out}, -I_{Qout}$  を0とすることで求められる。

### 4. 適用例

ここでは多端子対 F 行列を使って伝達関数を求める例を示す。図5のような素子値にばらつきがない対称な1段のRCPFについて解き、先に述べた[1][2]と同じ結果を得ることを示す。

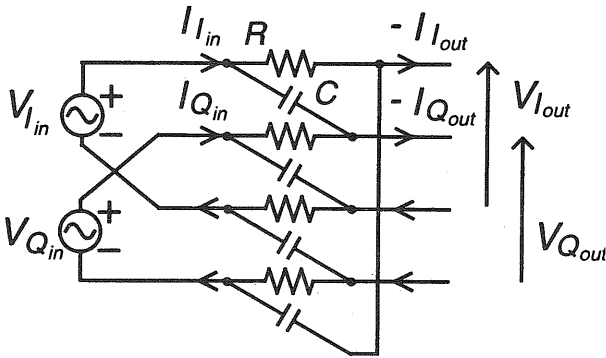


図5 RCPFの回路構成

図5のように各節点の電圧・電流を決めると、 $Y$  は付録2に示すようになるので  $Y'$  行列は次のようになる。

$$Y = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} + sC & 0 & -\frac{1}{R} & -sC \\ 0 & \frac{1}{R} + sC & sC & -\frac{1}{R} \\ -\frac{1}{R} & sC & \frac{1}{R} + sC & 0 \\ -sC & -\frac{1}{R} & 0 & \frac{1}{R} + sC \end{bmatrix} \quad (4)$$

式(4)を付録にしたがって多端子対 F 行列に書き直すと各要素は次のようになる。

$$F_A = F_D = \frac{1}{1 + s^2 C^2 R^2} \begin{bmatrix} 1 + sCR & R \\ 2sC & 1 + sCR \end{bmatrix}$$

$$F_B = \frac{1}{1 + s^2 C^2 R^2} \begin{bmatrix} sCR(1 + sCR) & sCR^2 \\ 2s^2 C^2 R^2 & sCR(1 + sCR) \end{bmatrix}$$

$$F_C = \frac{1}{1 + s^2 C^2 R^2} \begin{bmatrix} -sCR(1 + sCR) & -sCR^2 \\ -2s^2 C^2 R^2 & -sCR(1 + sCR) \end{bmatrix}$$

ここで、 $F_A = F_D = F_S$  と置くと  $F_B, F_C$  はそれぞれ  $F_B = sCR F_S, F_C = -sCR F_S$  となる。これらを式(2),(3)に代入すると次のようになる。

$$I_{out} = F_S^{-1} (I_{in} - sCR Q_{in}) \quad (5)$$

$$Q_{out} = F_S^{-1} (sCR I_{in} + Q_{in}) \quad (6)$$

RCPFは線形な回路であるから出力電圧は  $I_{in}, Q_{in}$  がそれぞれ独立して存在したときの出力の和として求めることができる。 $I_{out}$  について  $Q_{in} = 0, I_{out} = 0$  とすると(5)式は次のようになる。ただし  $-I_{out}, -I_{Qout} = 0$  である。

$$V_{Iout} = \frac{1 + sCR}{1 + s^2 C^2 R^2} V_{Iin} + \frac{-R}{1 + s^2 C^2 R^2} I_{Iin} \quad (7)$$

$$0 = \frac{-2sC}{1 + s^2 C^2 R^2} V_{Iin} + \frac{1 + sCR}{1 + s^2 C^2 R^2} I_{Iin} \quad (8)$$

(7)(8)より

$$\frac{V_{Iout}}{V_{Iin}} = \frac{1}{1 + sCR} \quad (9)$$

となる。同様にして各複素電圧伝達関数は次のようになる。

$$\frac{V_{Iout}}{V_{Qin}} = \frac{-sCR}{1 + sCR} \quad (10)$$

$$\frac{V_{Qout}}{V_{Iin}} = \frac{sCR}{1 + sCR} \quad (11)$$

$$\frac{V_{Qout}}{V_{Qin}} = \frac{1}{1 + sCR} \quad (12)$$

RCPFの入力を  $I_{in} + jQ_{in}$  と定義すると入力信号が対称であると仮定したとき、正の周波数応答に対する入力は  $V_{Qin} = -jV_{Iin}$  となるので、

$$\frac{V_{Iout}}{V_{Iin}} = \frac{V_{Qout}}{V_{Iin}} = \frac{1 + jsCR}{1 + sCR} \quad (13)$$

となる。負の周波数応答に対しては  $V_{Qin} = jV_{Iin}$  となるので、

$$\frac{V_{Iout}}{V_{Iin}} = \frac{V_{Qout}}{V_{Iin}} = \frac{1 - jsCR}{1 + sCR} \quad (14)$$

となり、文献[1][2]と同じ結果が得られる。

### 5. まとめ

本論文では多端子対回路の F 行列を定義し、RCPFの複素電圧伝達関数導出に適用した。その結果は従来のものと一致し、本手法が正しいことを確かめた。

本手法は F 行列の拡張に基づく方法であるため、複素電圧伝達関数だけでなく各種の複素伝達関数を求めることができる。さらに、回路の対称性を仮定しないため、RCPFのような回路に非対称がある場合の解析も可能である。また、本手法は Y 行列から誘導しているため、複素伝達関数は回路や負荷のそれぞれの Y 行列がわかれば Mathematica のようなツールで自動的に求められるようにできると考えられる。今後は本手法の特徴を活かして非対称性が複素伝達関数に及ぼす影響の検討を行う。

## 謝 辞

本研究の実施にあたり、有益な資料を提供していただいた群馬大学 小林春夫先生に深謝致します。

## 文 献

- [1] S. H. Galal et al, "On the Design and Sensitivity of RC Sequence Asymmetric Polyphase Networks in RF Integrated Transceivers", ISCAS'99, vol. 2, pp. 593-597, 1999.
- [2] Jian KANG, Haruo KOBAYASHI et al, "Explicit Analysis of RC Polyphase Filter for I,Q Signal Generation and Image Rejection", 第15回電子情報通信学会回路とシステム(軽井沢)ワークショップ講演論文集, Ba1-2-2, April 2002.

## 付 録 1

多端子対 F 行列を Y' 行列の要素で表すと次のようになる。

$$\begin{bmatrix} I_{in} \\ Q_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_A & F_B \\ F_C & F_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{out} \\ Q_{out} \end{bmatrix}$$

$$F_A = \frac{1}{Y'_{32}Y'_{41} - Y'_{31}Y'_{42}} \begin{bmatrix} Y'_{33}Y'_{42} - Y'_{32}Y'_{43} & Y'_{42} \\ -Y'_{12}Y'_{33}Y'_{41} + Y'_{11}Y'_{33}Y'_{42} + Y'_{12}Y'_{31}Y'_{43} - Y'_{11}Y'_{32}Y'_{43} & -Y'_{12}Y'_{41} + Y'_{11}Y'_{42} \end{bmatrix}$$

$$F_B = \frac{1}{Y'_{32}Y'_{41} - Y'_{31}Y'_{42}} \begin{bmatrix} Y'_{34}Y'_{42} - Y'_{32}Y'_{44} & -Y'_{32} \\ -Y'_{12}Y'_{34}Y'_{41} + Y'_{11}Y'_{34}Y'_{42} + Y'_{12}Y'_{31}Y'_{44} - Y'_{11}Y'_{32}Y'_{44} & Y'_{12}Y'_{31} - Y'_{11}Y'_{32} \end{bmatrix}$$

$$F_C = \frac{1}{Y'_{32}Y'_{41} - Y'_{31}Y'_{42}} \begin{bmatrix} -Y'_{33}Y'_{41} + Y'_{31}Y'_{43} & -Y'_{41} \\ -Y'_{22}Y'_{33}Y'_{41} + Y'_{21}Y'_{33}Y'_{42} + Y'_{22}Y'_{31}Y'_{43} - Y'_{21}Y'_{32}Y'_{43} & -Y'_{22}Y'_{41} + Y'_{21}Y'_{42} \end{bmatrix}$$

$$F_D = \frac{1}{Y'_{32}Y'_{41} - Y'_{31}Y'_{42}} \begin{bmatrix} -Y'_{34}Y'_{41} + Y'_{31}Y'_{44} & Y'_{31} \\ -Y'_{22}Y'_{34}Y'_{41} + Y'_{21}Y'_{34}Y'_{42} + Y'_{22}Y'_{31}Y'_{44} - Y'_{21}Y'_{32}Y'_{44} & Y'_{22}Y'_{31} - Y'_{21}Y'_{32} \end{bmatrix}$$

## 付 録 2

1 段の RCPF を Y 行列で表すと次のようになる。

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I'_1 \\ I'_2 \\ I'_3 \\ I'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} + sC & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R} & -sC & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} + sC & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R} & -sC & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R} + sC & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R} & -sC \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R} + sC & -sC & 0 & 0 & -\frac{1}{R} \\ -\frac{1}{R} & 0 & 0 & -sC & \frac{1}{R} + sC & 0 & 0 & 0 \\ -sC & -\frac{1}{R} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R} + sC & 0 & 0 \\ 0 & -sC & -\frac{1}{R} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R} + sC & 0 \\ 0 & 0 & -sC & -\frac{1}{R} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R} + sC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V'_1 \\ V'_2 \\ V'_3 \\ V'_4 \end{bmatrix}$$

原稿受付日

平成14年 6月 7日