

## Multi-tail を用いた 2 乗回路

松平 和也\* 谷本 洋

北見工業大学

## Squaring Circuits Based on Multi-tail Cells

Kazuya Matsuhira and Hiroshi Tanimoto (Kitami institute of Technology)

## Abstract

Conditions that the multi-tail cell to have quadratic characteristics are calculated up to 6-tail cell. Deviations of their squaring characteristics caused by variations in emitter area ratio and dividing network have been investigated. It is found that 6-tail squaring cell may be a practical limit due to parameter variations.

キーワード multi-tail cell, 2 乗回路, バイポーラ差動対, 低電圧  
(multi-tail cell, squaring circuit, BJT differential pairs, low-voltage operation)

## 1. ま え が き

現在, 携帯機器は, 電池動作が前提となっている. 消費電力を抑えるため, この先 1V 程度の低電圧動作が要求される. 2 乗回路として, トランスリニア回路があるが, 動作電圧が高い. 低電圧で動作するものとして, multi-tanh 回路と multi-tail 回路がよく知られているが, 本論文では, multi-tail 回路について解析する.

2 乗回路は, 単に 2 乗特性を得るためだけでなく, 2 乗回路を 2 つ用いることにより,  $(X+Y)^2 - (X-Y)^2 = 4XY$  の関係から, 乗算器回路として利用することができる. さらに, その乗算器回路の入力  $X, Y$  のどちらかを固定すると, 可変トランスコンダクタとして用いることができるなど, 応用範囲の広い基本的な回路である.

マルチテールセル回路は, 低電圧動作が可能で線形入力範囲の広いトランスコンダクタとして知られており, 本来は線形化のための回路であるが 2 乗回路としても利用できる. 線形化の原理は次の通りである. 基本的な差動対の差動出力電流  $I_d$  は,

$$I_d = \alpha_F I_Q \tanh \frac{V_{in}}{2V_T} \quad (1)$$

と表される. ここで,  $\alpha_F$  はベース接地順方向電流利得,  $I_Q$  はテール電流源の電流値,  $V_{in}$  は差動入力電圧,  $V_T$  は熱電圧である. 式 (1) から,  $\tanh x$  の非線形を打ち消すように

$I_Q$  を差動入力電圧  $V_{in}$  で制御することで差動対の線形範囲を拡大することができる. 非線形部分の  $\tanh x$  は奇関数であるから,  $\tanh x = x \times (\text{ある偶関数})$  と表せる. 線形化するには,  $I_Q$  を差動電圧の「ある偶関数」で制御すればよく, このとき  $I_d$  は  $V_{in}$  に対して線形となる. ここで制御に用いる偶関数から 2 次の項だけを取り出すことで, 2 乗回路として利用できる.

従来マルチテールセルを 2 乗回路として, 動作させるための条件は, Voorman が 3 テールセル [1], 木村氏が, 4 テールセル [3] の場合について示しており, それ以外の条件は知られていなかった. 本論文では, 6 テールセルまでの条件を明確にする. また, 実際に製造する場合には, 抵抗分圧器, トランジスタのばらつきなどによる影響があるので, このばらつきの許容範囲を明らかにする.

本論文では, まず 2 乗回路として, マルチテールセル回路の構成と原理を示す. 次に 2 乗回路として動作させるためのエミッタ面積比, 分圧比などの条件を導出する. 最後に, エミッタ面積比と分圧比変動の影響について検討する.

## 2. マルチテールセル回路の構成と原理

図 1 の回路は, マルチテールセル回路である. 外側のトランジスタ  $Q_{1A}, Q_{1B}$  に流れるエミッタ電流の和を  $I_{Q1}$  とし, 残りの内側のトランジスタのエミッタ電流の和を  $I_Q$

とすると、 $I_{Q1}=I_Q-I'_Q$ として、外側のテール電流を制御することになる。本来この回路は、テール電流を制御することで、 $V_{in}$ に対して $I_{OUT}$ を線形化させるものである。

ここで、いままで捨てられていた $I'_Q$ を利用することにより2乗特性を実現する。この回路は $Q_2\sim Q_N$ の差動対のベースに差動入力電圧 $V_{in}$ が抵抗で分圧されて印加されている。コレクタは並列接続されて $V_{CC}$ につながっている。全差動対のエミッタ電流の和は電流源 $I_Q$ で一定なので、内側の差動対 $Q_2\sim Q_N$ に流れた電流 $I'_Q$ は一番外側の差動対 $Q_1$ のバイアス電流 $I_{Q1}$ を横取りすることになり、結果としてテール電流を制御する働きができる。内側の差動対はそれぞれエミッタ面積が異なり、ベース電圧も抵抗分圧で異なっているが、回路的に左右対称なので、内側の差動対に流れる電流 $I'_Q$ は $V_{in}$ の偶関数となる。

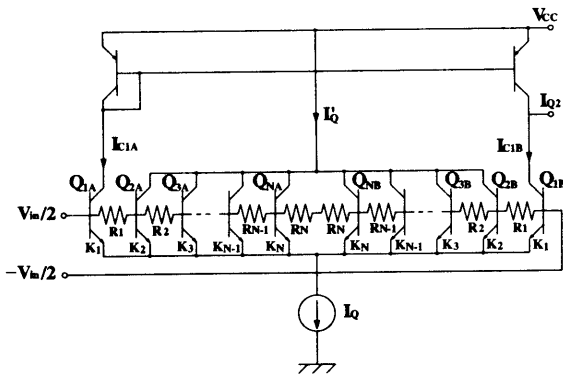


図1 マルチテールセル回路

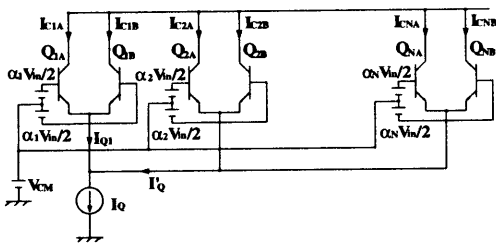


図2 簡略化したマルチテールセルの回路とパラメータの定義

図2の回路は図1の回路を、動作が変わらないように描き変えたものである[2]。それぞれの差動対に1~Nの番号を付ける。また、各差動対の左側のトランジスタに関する量をA、右側のトランジスタに関する量をBと、添え字を付けて区別する。N番目の差動対はエミッタ面積が $K_N$ であり、差動入力電圧 $\pm\alpha_N V_{in}/2$ が加えられている。

ここで、マルチテールセルの直流伝達特性を求める。図2の回路において、入力電圧 $\alpha_K V_{in}/2$ が加えられているが、これは図1の抵抗により分圧された電圧である。その分圧比 $\alpha_K$ は

$$\alpha_K = \frac{R_K + \dots + R_N}{R_1 + R_2 + \dots + R_N} \quad (2)$$

で与えられる。

$I_{Q1}$ を求めると次のようになる[2]。

$$I_{Q1} = \frac{K_1 \cosh\left(\frac{\alpha_1 V_{in}}{2V_T}\right)}{\sum_{m=1}^N K_m \cosh\left(\frac{\alpha_m V_{in}}{2V_T}\right)} I_Q \quad (3)$$

これより、図1の内側のトランジスタのエミッタ電流の和 $I'_Q$ を求める。

$$\begin{aligned} I'_Q &= I_Q - I_{Q1} \\ &= I_Q - \frac{K_1 \cosh\left(\frac{\alpha_1 V_{in}}{2V_T}\right)}{\sum_{m=1}^N K_m \cosh\left(\frac{\alpha_m V_{in}}{2V_T}\right)} I_Q \\ &= \frac{\sum_{m=2}^N K_m \cosh\left(\frac{\alpha_m V_{in}}{2V_T}\right)}{\sum_{m=1}^N K_m \cosh\left(\frac{\alpha_m V_{in}}{2V_T}\right)} I_Q \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、簡単のため、 $x \equiv \frac{V_{in}}{2V_T}$ と正規化すると、式(4)は

$$I'_Q = \frac{\sum_{m=2}^N K_m \cosh(\alpha_m x)}{K_1 \cosh(\alpha_1 x) + \sum_{m=2}^N K_m \cosh(\alpha_m x)} I_Q \quad (5)$$

となる。式(5)を以下の解析で使用する。

### 3. マルチテールセルが近似的に2乗回路になる条件

式(5)より、内側の差動対に流れるエミッタ電流の和 $I'_Q$ が2乗回路として誤差が最小になる条件を求める。理想の2乗特性を得るためには、式(5)の $I'_Q$ を級数に展開した場合、 $x$ の2次の係数以外全て0になり

$$I'_Q = Ax^2 I_Q \quad (6)$$

のようになればよい。しかし、N組の差動対を用いたマルチテールセルの場合、自由に選ぶことができるパラメータは、式(5)よりエミッタ面積 $K_1\sim K_N$ 、および分圧係数 $\alpha_1\sim\alpha_N$ の合計 $2N$ 個になる。ここで $K_1=1, \alpha_1=1$ としても、回路的に一般性を失わないので、自由に選ぶことのできるパラメータは、 $2(N-1)$ 個になる。ここで、式(5)より $I'_Q$ は $x$ の偶関数であるため、奇数次の係数が全て0になる。

$$I'_Q = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \dots + a_{2m} x^{2m} + \dots \quad (7)$$

ただし、入力電圧  $V_{in}$  がゼロでも内側の差動対に電流が流れるので、 $a_0$  を 0 にすることはできない。

したがって、 $N$  個の差動対を用いたマルチテールセルの場合、 $2(N-1)$  個のパラメータを用いて、 $x^4$  から最大  $x^{4N-2}$  次の項まで、係数を 0 にすることができる。すなわち、

$$I'_Q = a_0 + a_2 x^2 + O(x^{4N}) + \dots \quad (8)$$

のようにすることができる。

次から具体的に  $N$  組の差動対についてエミッタ面積比と分圧比を求める。ここで、計算を簡単にするため、 $x \equiv \frac{V_{in}}{2V_T}$ 、 $y \equiv \frac{I'_Q}{\alpha_F I_Q}$  と正規化し、 $K_1 = 1$ 、 $\alpha_1 = 1$  とすると式 (5) は、

$$y = \frac{\sum_{m=2}^N K_m \cosh(\alpha_m x)}{\cosh(x) + \sum_{m=2}^N K_m \cosh(\alpha_m x)} \quad (9)$$

となる。

### 3.1 3 テールセルの場合

式 (9) で  $N = 2$  と置き、 $\alpha_2 = 0$  とすると 3 テールセルの場合になる。

$$y = \frac{K_2}{K_2 + \cosh(x)} \quad (10)$$

自由になるパラメータは  $K_2$  ひとつなので、これを用いて、2 乗特性を近似する。すなわち、式 (10) をテイラー展開して 4 次の係数を 0 にする。

$$y = \frac{K_2}{1+K_2} - \frac{K_2}{2(1+K_2)^2} x^2 - \frac{K_2(K_2-5)}{24(1+K_2)^3} x^4 + O(x^6) + \dots \quad (11)$$

式 (11) より、4 次の係数を 0 にする条件は、 $K_2 = 5$  である。この値を、式 (11) に代入すると

$$y = \frac{5}{6} - \frac{5}{72} x^2 + O(x^6) + \dots \quad (12)$$

となる。これより 3 テールセルが 2 乗特性になる条件は  $K_2 = 5$  である。これは、Voorman [1] と一致した結果である。

### 3.2 4 テールセルの場合

式 (9) で  $N = 2$  と置き、 $\alpha_2 \neq 0$  とすると 4 テールセルの場合になる。

$$y = \frac{K_2 \cosh(\alpha_2 x)}{\cosh(x) + K_2 \cosh(\alpha_2 x)} \quad (13)$$

自由になるパラメータは  $K_2$ 、 $\alpha_2$  の 2 つなので、これを用いて、2 乗特性を近似する。すなわち、式 (13) をテイラー展開して 4 次と 6 次の係数を 0 にする。

$$y = \frac{K_2}{1+K_2} + \frac{K_2(\alpha_2^2-1)}{2(1+K_2)^2} x^2 - \frac{K_2(\alpha_2^2-1)(5-K_2+\alpha_2^2(5K_2-1))}{24(1+K_2)^3} x^4 + \frac{K_2(\alpha_2^2-1)}{720(1+K_2)^4} \times \{K_2^2 - 28K_2 + 61 - 2\alpha_2^2(7K_2^2 - 76K_2 + 7) + \alpha_2^4(61K_2^2 - 28K_2 + 1)\} x^6 + O(x^8) + \dots \quad (14)$$

であるから、4 次と 6 次の係数が 0 になる条件を求める。エミッタ面積比、分圧比を求めると、それぞれ  $K_2 = 8 \pm 3\sqrt{7}$  かつ、 $\alpha_2 = \pm \sqrt{\frac{11}{3} \pm \frac{4\sqrt{7}}{3}}$  となる。ただし、エミッタ面積比は正でなければならないので、負のパラメータを捨てる。分圧比が、負のときは単に差動対の入力端子を交換することで対応できるので、物理的に正の値だけ考えれば良い。また、 $\alpha_1 = 1$  を基準にしているので、 $\alpha_N < 1$  でなければならない。したがって、 $0 < \alpha_2 < 1$  の条件が入る。これより、4 テールセルが 2 乗特性になる条件は

$$K_2 = 8 + 3\sqrt{7} = 15.937 \quad (15)$$

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{11}{3} - \frac{4\sqrt{7}}{3}} = 0.37282 \quad (16)$$

となる。式 (14) に 4 次、6 次の係数を 0 にする条件式 (15)、(16) を代入すると、

$$y = \frac{8+3\sqrt{7}}{9+3\sqrt{7}} - \frac{2(5+2\sqrt{7})}{27(3+\sqrt{7})^2} x^2 + O(x^8) + \dots = 0.94 - 0.024 x^2 + O(x^8) + \dots \quad (17)$$

となり、確かに 4 次と 6 次の項は、0 になっている。これは、木村氏 [3] と同じ結果である。

### 3.3 5 テールおよび 6 テールセルに対する近似解

5 テールおよび 6 テールセルについては、条件式の次数が高くなるので、解析的に解を求めることが困難である。そこで、ここでは数値的に解を求めた。

#### 5 テールセルの場合

式 (9) で  $N = 3$  と置き、 $\alpha_3 = 0$  とすると 5 テールセルの場合になる。

$$y = \frac{K_2 \cosh(\alpha_2 x) + K_3}{\cosh(x) + K_2 \cosh(\alpha_2 x) + K_3} \quad (18)$$

自由になるパラメータは  $K_2$ 、 $K_3$ 、 $\alpha_2$  の 3 つなので、これを用いて、2 乗特性を近似する。すなわち、式 (18) をテイラー展開して 4 次、6 次、8 次の係数を 0 にする。この条件を満たすように、数値解を求めると次のようになる。

$$K_2 = 19.926; K_3 = 18.601; \alpha_2 = 0.57059$$

## 6 テールセルの場合

式(9)で  $N=3$  と置き、 $\alpha_3 \neq 0$  とすると6テールセルの場合になる。

$$y = \frac{K_2 \cosh(\alpha_2 x) + K_3 \cosh(\alpha_3 x)}{\cosh(x) + K_2 \cosh(\alpha_2 x) + K_3 \cosh(\alpha_3 x)} \quad (19)$$

自由になるパラメータは  $K_2, K_3, \alpha_2, \alpha_3$  の4つなので、これを用いて、2乗特性を近似する。すなわち、式(19)をテイラー展開して4次、6次、8次、10次の係数を0にする。この条件を満たすように、数値解を求めると次のようになる。

$$K_2 = 22.446; K_3 = 56.102$$

$$\alpha_2 = 0.68884; \alpha_3 = 0.24683$$

表1に3~6テールセルが2乗回路になる条件を示す。図

表1 マルチテールセルが2乗回路になる条件

circuit	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$
3-tail	1	5	-	1	-	-
4-tail	1	15.937	-	1	0.37282	-
5-tail	1	19.926	18.601	1	0.57059	-
6-tail	1	22.446	56.102	1	0.68884	0.24683

3は、3~6テールセルの出力電流  $y$  を最大値で正規化したものである。ここで、2乗特性をわかりやすくするために、 $y$  を  $x$  で2回微分する。これより  $x^2$  の部分が定数になり、平坦部分の広さで比較ができる。図4は、比較しやすいように  $y$  を  $x$  で2回微分した値を  $G'$  を、最大値  $G'_{max}$  で正規化した値で比較したものを示す。

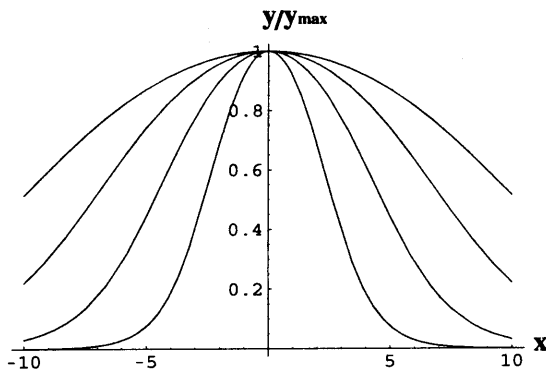


図3  $x$  に対するマルチテールセルの出力電流 (2乗特性)  
(内側から、3-tail、4-tail、5-tail、6-tail)

表2に、 $G'$  が最大平坦部分  $G'_{max}$  から1%低下するときの正規化差動入力電圧  $\frac{V_{in}}{2V_T}$ 、および常温における入力電圧範囲を3~6テールセルについてまとめた。また、3テールセルを基準にしたとき、常温での入力電圧範囲を比較した。

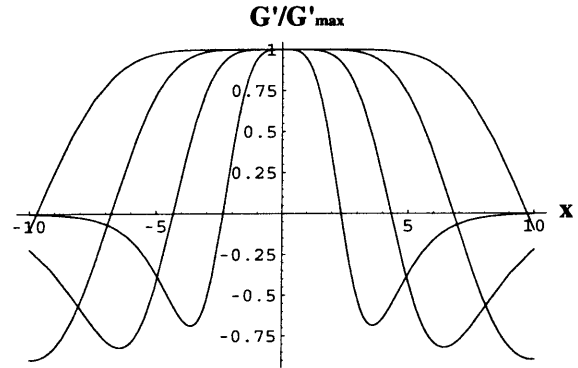


図4  $x$  に対するマルチテールセルの2回微分特性  
(内側から、3-tail、4-tail、5-tail、6-tail)

表2 最大平坦部分  $G'_{max}$  から、1%低下する  $x$  の値

circuit	$x = \frac{V_{in}}{2V_T}$	$V_{in\text{-p-p}}$	3-tailと比較
3-tail	0.63752	66 mV <sub>p-p</sub>	1倍
4-tail	1.5950	166 mV <sub>p-p</sub>	2.5倍
5-tail	2.8539	297 mV <sub>p-p</sub>	4.5倍
6-tail	4.3960	457 mV <sub>p-p</sub>	7倍

## 4. エミッタ面積比と分圧比変動の影響

2乗特性を得るためには前の章で求めたエミッタ面積比、分圧比を正しく設定する必要がある。しかし、実際は各素子に製造でばらつきが生じるので、2乗特性を示す入力範囲が狭くなると考えられる。

各回路について、近似的に2乗特性が得られる入力範囲(許容入力範囲)を比較するため、比較の基準として仮に  $G'_{max}$  からの許容平坦範囲を1%として、その平坦部分が約10%減少する  $x$  の幅をとる。それぞれの入力電圧範囲は、次のようになる。

表3 許容入力電圧範囲の変化

circuit	基準 (100%)	変化後 (90%)
3-tail	66 mV <sub>p-p</sub>	60 mV <sub>p-p</sub>
4-tail	166 mV <sub>p-p</sub>	149 mV <sub>p-p</sub>
5-tail	297 mV <sub>p-p</sub>	267 mV <sub>p-p</sub>
6-tail	457 mV <sub>p-p</sub>	411 mV <sub>p-p</sub>

エミッタ面積比、分圧比を表1で示した値から、それぞれ独立に変化させ、許容範囲に収まるエミッタ面積比、分圧比を求めた。これより、エミッタ面積比、分圧比の変動許容範囲は、表4のようになる。

エミッタ面積のばらつきは、直接測定することができない。しかし、飽和電流  $I_S$  の値を測定することにより、等価的なエミッタ面積のばらつきが計算できる。特に工夫をしない限り、トランジスタの  $I_S$  の相対誤差は1%程度が現実的な値である。同様に、抵抗の相対誤差は0.1%程度

表4 エミッタ面積比, 分圧比の許容範囲

circuit	$K_2$	$K_3$	$\alpha_2$	$\alpha_3$
3-tail	± 2.44%	-	-	-
4-tail	± 1.49%	-	± 0.37%	-
5-tail	± 2.63%	± 0.85%	± 0.17%	-
6-tail	± 1.18%	± 0.58%	± 0.09%	± 2.30%

が現実的な値である.[4]

表4より, 6テールセルのエミッタ面積比  $K_3$  の許容範囲が ±0.58% であるので, この許容範囲では, 必要な精度で2乗特性を得るのは困難であることがわかる。

エミッタ面積比の精度を向上するため, 表4のばらつき許容範囲内で実現できる整数比を探すと, エミッタ面積比は, 3テールセルの場合,

$$K_{Q1A} : K_{Q2} : K_{Q1B} = 1 : 10 : 1,$$

4テールセルの場合,

$$K_{Q1A} : K_{Q2A} : K_{Q2B} : K_{Q1B} = 1 : 16 : 16 : 1,$$

5テールセルの場合,

$$K_{Q1A} : K_{Q2A} : K_{Q3} : K_{Q2B} : K_{Q1B} = 1 : 20 : 37 : 20 : 1,$$

6テールセルの場合,

$$K_{Q1A} : K_{Q2A} : K_{Q3A} : K_{Q3B} : K_{Q2B} : K_{Q1B} \\ = 1 : 22 : 56 : 56 : 22 : 1$$

となる。これより, 内側のトランジスタへ向かうほどエミッタ面積比が大きくなり, 高次のセルほど, 急速にエミッタ面積比が大きくなることがわかる。つまり, セルの次数をこれ以上増やしても, エミッタ面積比が過大となり, 比精度の確保が困難になる。したがって, 現状では5~6テールセルが実用的な限界と考えられる。

## 5. 結 論

低電源電圧で動作可能なマルチテールセルを用いて, 2乗回路になるための条件を解析した。3~6テールセル回路についてエミッタ面積  $K_m$ , 分圧比  $\alpha_m$  の条件を求めることができた。5, 6テールセルに対する条件はこれまで知られていなかった結果である。

また, 2乗特性が精度よく得られる入力電圧範囲を求めた。その結果3テールセルを基準にすると, 常温時の入力電圧範囲は, それぞれ, 4テールセルの場合約2.5倍, 5テールセルの場合約4.5倍, 6テールセルの場合約7倍に改善されることがわかった。さらに, エミッタ面積比と分圧比のばらつきの影響について解析した。エミッタ面積比, 分圧比のばらつきの典型値から考えて, 現状では6テールセル以上では精度よく2乗特性を得ることが困難であることがわかった。

## 文 献

- [1] ヨハネス・オット・フォルマン, 「トランスコンダクタンス増幅器」, 特公平 8-34393.
- [2] 谷本洋, 板倉哲朗: 「6-tail セルまでのバイポーラ multi-tail 回路の最大平坦条件」, 電気学会研究会資料, 電子回路研究会, ECT-00-24, pp. 19-24, 2000年3月10日
- [3] 木村克治: 「集積回路化に適する高性能差動増幅回路とその応用に関する研究」, 学位論文(東京工業大学), pp. 70-75, 1998.
- [4] Paul R. Gray, Robert G. Meyer, "Analysis and design of analog integrated circuits (3rd ed.)", p. 320, John Wiley & Sons, Inc, New York, 1993.
- [5] 杉山広輝: 「バイポーラ・マルチテールセルの素子感度解析」, 北見工業大学電気電子工学科卒業論文, 2001

原稿受付日

平成14年 6月 7日