GS4-5

複素電力は何を表すか？

谷本　洋 *（北見工業大学）　　永井　信夫（北海道大学）

Implication of Complex Power

Hiroshi Tanimoto* (Kitami Institute of Technology)　Nobuo Nagai (Hokkaido University)

Abstract　It is well recognized that sinusoidal steady-state voltages and currents in a linear circuit can be viewed as two dimensional real vectors. On the other hand, the alternating current theory treats voltages and currents as complex numbers, or phasors, and it does not stress that they actually are vectors. We observe that this situation makes it difficult to understand physical meaning of complex power, paticularly for understanding of reactive power. This paper treats voltages and currents as vectors, and by interpreting the power as a bilinear form or tensor product of voltage and current, we can understand active and reactive powers physically, and we pointe out that apparent power should be defined as a complex number.

キーワード：2 次元ベクトル空間，フェーザ，複素電力，有効電力，無効電力，皮相電力，双一次形式，対称成分
Keywords: two dimensional vector space, phasor, complex power, active power, reactive power, apparent power, bilinear form, symmetric components

1　はじめに

電気回路を教えていて学生に伝わりにくいと感ずることがいくつかある．正直に言えば，これらの中には自分でも十分には納得していないと感ずることがある．そのひとつに複素電力，特に無効電力と皮相電力の概念がある．

線形回路において正弦波定常状態を扱う場合，その電圧・電流は 2 次元の実ベクトルと考えられることはよく知られている．一方，交流理論では電圧・電流を複素数（フェーザ）として取り扱い，これらがベクトルであるとの認識が薄い．はじめ時間の実関数であったはずの電圧・電流がいつのまにか複素関数であるフェーザに化けており，複素ベクトルに拡張されている．筆者は，学生がフェーザの導入にあたって混乱する根本原因が実ベクトル空間を複素ベクトル空間へと拡張したことをきちんと説明していない点にあると考えているが，それは別の機会に説明するとして，本報告では複素電力と皮相電力が何を表しているのかを論じたい．

有効電力は時間域の議論でもフェーザ領域の議論でもその物理的な意味が明確であるのに対して，無効電力の物理的意味づけはわかり難い．皮相電力に至っては，なぜそのようなものを考える必要があるのかさえ（筆者には）よく理解できていなかった．

本報告では電圧と電流をベクトルと考えて，電力をこれらの双一次形式すなわち 2 階のテンソルと捉え，従来の時間領域とフェーザ領域における電力の表現と比較することにより，複素電力の物理的な理解が深まり，電力には有効電力と無効電力以外に，皮相電力が存在することが自然に説明できることを示した．また，複素電力同様，皮相電力を複素量として定義すると都合が良いことを示した．

2　時間域における電力

電力に関する議論を始めるにあたって，その対象と範囲を定めておく．まず，我々は正弦波定常状態にある線形時不変 1-ポートの電力を取り扱う．したがって，その電圧・電流は単一の角周波数 ω で振動する正弦波である．

2.1　振幅-位相表現と直交成分表現

時不変回路を対象とするからには，ポートの電圧 $v(t)$ および電流 $i(t)$ も t そのもの以外は時間に依存しないパラメータだけを用いて表現される：

$$v(t) = V\cos(\omega t + \phi),\ i(t) = I\cos(\omega t + \psi). \tag{1}$$

ここで，時不変のパラメータ $V, I \geq 0$ はそれぞれ電圧・電流の振幅（ピーク値），ϕ, ψ はそれぞれ電圧・電流の初期位相角である．

これらはまた，余弦成分と正弦成分に分解して，次式のようにも表すことができる：

$$v(t) = V_1\cos\omega t + V_2\sin\omega t,\ i(t) = I_1\cos\omega t + I_2\sin\omega t. \tag{2}$$

ここで，

$$V = \sqrt{V_1^2+V_2^2},\ I = \sqrt{I_1^2+I_2^2}, \tag{3}$$

$$\phi = -\tan^{-1}(V_2/V_1),\ \psi = -\tan^{-1}(I_2/I_1) \tag{4}$$

の関係がある[*1]．

[*1] $\tan^{-1}$ が多価関数なので点 (V_1, V_2) が第 3(4) 象限にあるなら ϕ に π を加える（減ずる）．ψ も同様．C 言語の atan2 関数と同じ．

2.2　瞬時電力 [1]–[6]

本節では従来の瞬時電力，有効電力，無効電力に関する教科書的知識を復習する．

ある 1-ポートにおける瞬時電力 $p(t)$ はそのポートの電圧 $v(t)$ と電流 $i(t)$ の積として定義される．標準的な電気回路理論では，**瞬時**電力 $p(t)$ から**時間に依存しない**成分として有効電力と無効電力を定義し，逆にこれらを使って瞬時電力を取り扱う．このことを念頭に置いて，電圧・電流の振幅-位相表現で有効電力と無効電力を計算する．

ポートの電圧と端子電流が式 (1) で表される場合，これらより瞬時電力を計算すると

$$
\begin{aligned}
p(t) &= v(t)\, i(t) = V\cos(\omega t+\phi)\, I\cos(\omega t+\psi) \\
&= \frac{1}{2}VI\left[\cos(\phi-\psi)+\cos(2\omega t+\phi+\psi)\right] \qquad (5)
\end{aligned}
$$

を得る．すなわち，$p(t)$ は平均値 $\frac{1}{2}VI\cos(\phi-\psi)$ を中心に角周波数 2ω で振動する振幅が一定値 $\frac{1}{2}VI$ の余弦波である*2．電圧と電流の位相差 $\phi-\psi$ がゼロ，すなわち $\phi=\psi$ ならば瞬時電力の平均値と振幅（ピーク値）は等しく，ゼロでなければ平均値よりも振幅が大きくなる．

式 (5) より，時間の原点の平行移動によって位相差 $\phi-\psi$ は変化しないから，第 1 項は時不変な量であることが分る．この項を**有効電力**といい，記号 P で表す．すなわち，$T=2\pi/\omega$ として，

$$
P=\overline{p(t)}=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} p(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}VI\cos(\phi-\psi). \qquad (6)
$$

有効電力の物理的な意味は明らかで，負荷で消費される電力，という事になる．本文では正弦波定常状態だけを考えているので，有効電力は実数で一定値を取る．

一方，第 2 項は $\phi+\psi$ を含むことから時不変ではないが，振幅値 $\frac{1}{2}VI$ 自体は時不変で，これを**皮相電力**という．記号 S で表し，$S\geqq 0$ である．

■無効電力　つぎに，式 (5) の時不変ではない部分である $\cos(2\omega t+\phi+\psi)$ から何らかの時不変な量を取り出す目的で，電圧と同相の倍周波 $\cos(2\omega t+2\phi)$ で振動する成分，およびそれに直交する $\sin(2\omega t+2\phi)$ で振動する成分に分解する．

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}VI\cos(2\omega t+\phi+\psi) \\
&=\frac{1}{2}VI\left[\cos(\phi+\psi)\cos 2\omega t-\sin(\phi+\psi)\sin 2\omega t)\right] \\
&=\frac{VI}{2}\left[\cos(\phi-\psi)\cos(2\omega t+2\phi)+\sin(\phi-\psi)\sin(2\omega t+2\phi)\right] \qquad (7)
\end{aligned}
$$

式 (7) による振動成分の分解から次のことがわかる．

1. 瞬時電力の振動成分自体は時不変ではないが，その cos 成分と sin 成分の振幅である $\frac{1}{2}VI\cos(\phi-\psi)$ と $\frac{1}{2}VI\sin(\phi-\psi)$ は時不変な量である．前者の値は既出の有効電力に等しく，後者の $\frac{1}{2}VI\sin(\phi-\psi)$ を無効電力という．しかし，二つの振幅を正しく算出するためには 2ω で振動する成分の位相をちょうど 2ϕ（または 2ψ）に選ぶ必要がある．
2. 瞬時電力の振動成分は cos 成分も sin 成分も角周波数 2ω の正弦波であるから，その時間平均はゼロである．瞬時電力が正の期間は電源から負荷へ向かって電力が送られ，負の期間には逆に負荷から電源に向かって電力が送られる．しかし，無効電力の平均値はゼロであるから，これらは電源と負荷の間を往復しているだけで実質的に移動しないため，実際にはエネルギーの消費に関与しない電力である．
3. 負荷の電圧と電流に位相差がない場合，すなわち純抵抗の場合は瞬時電力の振動成分のうち cos 成分の振幅はゼロにならず常に有効電力と同じ値を維持するが，sin 成分はゼロになる．負荷がリアクタンス成分を含んで位相差がある場合には，sin 成分の振幅がゼロでなくなる．

上記の観察結果から，角周波数 2ω で振動する，電圧と直交する成分の振幅を**無効電力**Q と定義するのが電気回路理論の伝統である．すなわち，

$$
Q=\frac{1}{2}VI\sin(\phi-\psi). \qquad (8)
$$

である．無効電力では $\sin\theta$ が奇関数であることから，有効電力とは違って電圧と電流の位相差だけでなく，その進み・遅れが「振幅」であるにもかかわらず無効電力の符号に反映する．

さらに，P, Q に加えて皮相電力 $S(>0)$ を

$$
S=\sqrt{P^2+Q^2}=\frac{1}{2}VI \qquad (9)
$$

で定義するのが標準的である．すなわち，S は瞬時電力の角周波数 2ω で振動する成分の振幅という意味を持つから，これも時不変な量であることが分る．

以上をまとめると，有効電力 P と無効電力 Q が分っていれば，次の式 (10), (11) により瞬時電力を知るために必要な情報が実用上は（位相 2ϕ あるいは $\phi+\psi$ を気にしなければ）再現できる，という事である：

$$
\begin{aligned}
p(t) &= P\left[1+\cos(2\omega t+2\phi)\right]+Q\sin(2\omega t+2\phi) \qquad (10) \\
&= P+S\cos(2\omega t+\phi+\psi) \qquad (11)
\end{aligned}
$$

しかし，式 (5) で表される瞬時電力を完全に再現するには，角周波数 ω を既知として，電圧・電流の振幅の積 VI, 電圧・電流の間の位相差 $(\phi-\psi)$, 電圧の位相・電流の位相の和 $(\phi+\psi)$ の **3 つの量が必要である**．あるいは式 (10) で言えば P, Q, ϕ が，式 (11) なら $P, S, \phi+\psi$ が必要である．なぜなら，式 (10) から分かるように，時間の原点が移動すると位相**差**$(\phi-\psi)$ は変化しないが，ϕ と ψ は $t=0$

*2 1/2 が付くのは V, I が波高値だからである．

のときの初期位相角であるため，値が変化してしまうからである．したがって，瞬時電力を完全に表現するには有効電力と無効電力の 2 つの量だけでは十分でない [1]．したがって，複素電力を $P + \mathrm{j}Q$ と定義しても，もう一つ不足している情報があるため，電力を完全に表現したことにはならない．また，なぜ式 (7) のような恣意的な分解を行わなければならないかについても，事情がわかりにくい[*3]．

3 複素電力 [1]–[6]

前節では時間域で瞬時電力を考え，それを時不変な量で表すことを検討した．本節ではフェーザを用いて同じことを考える．時間域の解析と条件を揃えるため，本節ではフェーザを実効値ではなく波高値で表す．フェーザの実部と虚部は，時間域における直交成分による表現の $\cos\omega t$ 成分と $\sin\omega t$ 成分にそれぞれ対応させる．すなわち，

$$\dot{V} = V_1 + \mathrm{j}V_2,\ \dot{I} = I_1 + \mathrm{j}I_2 \tag{12}$$

とする．ここで, 実部と虚部は実数なので $V_1, V_2, I_1, I_2 \in \mathbb{R}$ とし，今後フェーザにはドット「$\dot{}$」を付けて複素数であることを明示する．

■有効電力　さて，有効電力を計算するには，電圧と電流のフェーザが複素数[*4]であることから，これらの複素型のスカラー積を計算してその実部を取ればよい．よって，これらが波高値表示であることに注意して複素電力 $\dot{S} \in \mathbb{C}$ は次式で定義される．

$$\dot{S} \equiv \langle \dot{V}, \dot{I} \rangle = \frac{1}{2}\dot{V}\dot{I}^* = \frac{1}{2}(V_1 + \mathrm{j}V_2)(I_1 + \mathrm{j}I_2)^* \tag{13}$$

$$= \frac{V_1 I_1 + V_2 I_2}{2} + \mathrm{j}\frac{V_2 I_1 - V_1 I_2}{2} \tag{14}$$

したがって，有効電力は

$$P = \mathrm{Re}(\dot{S}) = \frac{V_1 I_1 + V_2 I_2}{2} \tag{15}$$

である．

■無効電力　同様に，複素数表現の場合無効電力 Q は複素電力の虚部と定義される．

$$Q = \mathrm{Im}(\dot{S}) = \frac{V_2 I_1 - V_1 I_2}{2} \tag{16}$$

以上のように，時間域の直交成分表現から得た結果と同じ結果が得られた．しかし，フェーザを用いて電力を計算するとき，なぜ無効電力が虚部として出てきたのか？多くの電気回路の教科書では，「そのようにするとうまく行くから」という説明しか与えられない．つまり，時間域の計算と合うように複素電力が考案されたと読めるが，うまく行くについては何か内在的な理由があるのではないか？

これらの疑問を考えるため，次節では正弦波定常状態にある線形時不変回路の電流・電圧が，複素数であるフェーザではなく直交基底を $(\cos\omega t,\ \sin\omega t)$ とする 2 次元実ベクトル空間のベクトルであるとし，その（座標）成分を使って電力を考える．

4 テンソル量としての電力

4.1 ベクトル表現における電力

まず 2 つの基底ベクトルを並べたものを横ベクトル $\boldsymbol{e} \equiv (\cos\omega t,\ \sin\omega t)$ とし，これらの座標成分となるべき $\boldsymbol{V} = (V_1,\ V_2)^T$ と $\boldsymbol{I} = (I_1,\ I_2)^T$ という縦ベクトルを定義すれば $v(t) = \boldsymbol{eV}$, $i(t) = \boldsymbol{eI}$ のように書くことができる．ここでは基底を明示するため $\boldsymbol{e}$ を定義したが，今後は基底ベクトルを $\boldsymbol{e}$ に固定し，成分から成るベクトル $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{I}$ だけを用いる．$\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{I}$ は 2 次元の実ベクトルである．

実ベクトルの表現で有効電力を計算するには，電圧と電流の実数型スカラー積を計算すればよい． 基底ベクトル同士は直交しているが，正規ではないことに注意すると

$$\langle \boldsymbol{V}, \boldsymbol{I} \rangle = \frac{V_1 I_1 + V_2 I_2}{2} \tag{17}$$

したがって，

$$P = \frac{V_1 I_1 + V_2 I_2}{2} \tag{18}$$

を得る．これは有効電力を複素電力から求めた結果と一致している．

次に無効電力を求めたいが，困ったことにベクトル表現には無効電力に相当する表現はない．そこで，次に電力の基本である，直流電力に立ち戻って考えて見よう．

4.2 電力をテンソル量と考えてみる

直流ではポートの電圧 V と電流 I はどちらも一定値の実数[*5]であるが，このとき電力 P はこれらの単なる積で $P = VI$ と定義され，P もまた一定値の実数である．したがって，振動成分である無効電力は存在しない．

次に，交流ではポートの電圧 $v(t)$ と電流 $i(t)$ は正弦波状の実関数であるが，これらは直交基底を定めることによりそれぞれ 2 成分の実ベクトル $\boldsymbol{V}$ と $\boldsymbol{I}$ であると考えることができた．このとき，交流の電力は $p(t) = v(t)\,i(t)$ のように積として得られるから，電力は物理的には電圧と電流の双方に比例する双 1 次形式であると考えられる．すなわち，電力という物理量がふたつのベクトル $\boldsymbol{V}$ と $\boldsymbol{I}$ から電力という実数への双 1 次形式を定義するテンソル量であると考えてみる．

そこで，これに相当する量として電圧ベクトル $\boldsymbol{V}$ と電流ベクトル $\boldsymbol{I}$ から双 1 次形式を構成するためのテンソル

[*3] 時不変な量が得られるように分解したという事が顕わでない．つまり，表式が shift-invariant でない．

[*4] 複素数といえど 1 次元の複素ベクトルである！

[*5] 実数とはいえ，1 次元実ベクトル空間のベクトルでもある！

表 1　電力テンソルの不変量

	固有値	トレース	行列式
$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{I}$	0, $2P$	$2P$	0

表 2　電力テンソルの対称部分と反対称部分の不変量

	固有値	トレース	行列式
対称部分	$P+S, P-S$	$2P$	$-Q^2$
反対称部分	$+\mathrm{j}Q, -\mathrm{j}Q$	0	$+Q^2$

積 [7, 8] を調べてみる．テンソル積は具体的には

$$\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{I} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{I}^T = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & I_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} V_1 I_1 & V_1 I_2 \\ V_2 I_1 & V_2 I_2 \end{pmatrix}}_{\equiv \boldsymbol{T}} \tag{19}$$

のように成分を使って 2×2 行列 $\boldsymbol{T}$ で表すことができる．

$\boldsymbol{T}$ の座標回転に対する不変量はトレース（対角和），固有値，行列式の 3 つの値であることが知られているので，これを計算すると表 1 の結果を得る．同表より，確かに有効電力は固有値とトレースに現れており，この量が不変量であることが分かる．また，座標系の回転において原点は動かないから，確かに 0 も不変量ではある．しかし，無効電力と皮相電力は姿を現さない．

そこで，反対称行列が座標回転に対してひとつのベクトルとして変換する事実を手掛かりに，電力テンソル $\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{I}$ を対称部分と反対称部分に分解してみる．恒等式

$$\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{I} = \boldsymbol{T} = \frac{\boldsymbol{T} + \boldsymbol{T}^T}{2} + \frac{\boldsymbol{T} - \boldsymbol{T}^T}{2} \tag{20}$$

が成り立つから，これを具体的に計算すると

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{I} = &\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2V_1 I_1 & V_1 I_2 + V_2 I_1 \\ V_1 I_2 + V_2 I_1 & 2V_2 I_2 \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & V_1 I_2 - V_2 I_1 \\ V_2 I_1 - V_1 I_2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を得る．分解された対称部分と反対称部分の不変量をそれぞれ計算すると，表 2 のようになる．同表を見ると，対称部分の固有値から有効電力 P と皮相電力 S が，行列式から無効電力 Q が顔をのぞかせている．しかし，そのものずばりの不変量が現れないのが難点である．

4.2.1　既約分解 [9, 10]

テンソルの分解について調べてみると，座標の回転に対してスカラーとして変換する成分（＝変化しない成分），ベクトルとして変換する成分，テンソルとして変換する成分に分解できることが分かった [9, 10]．これを既約分解というが，その要点を説明する．

2 次元実ベクトルの成分表示を $\boldsymbol{V} = (V_1, V_2)^T$，$\boldsymbol{I} = (I_1, I_2)^T$ とし，これらから作られるテンソル積 $\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{I}$ の成分表示を行列 $\boldsymbol{T}$ とすると，$\boldsymbol{T}$ は式 (19) で与えられる．この $\boldsymbol{T}$ が数学的には

$$\boldsymbol{T} = \underbrace{\frac{\mathrm{tr}\boldsymbol{T}}{2}\mathbf{1}}_{\equiv \boldsymbol{T}^{(0)}} + \underbrace{\frac{\boldsymbol{T} - \boldsymbol{T}^T}{2}}_{\equiv \boldsymbol{T}^{(1)}} + \underbrace{\left(\frac{\boldsymbol{T} + \boldsymbol{T}^T}{2} - \frac{\mathrm{tr}\boldsymbol{T}}{2}\mathbf{1} \right)}_{\equiv \boldsymbol{T}^{(2)}} \tag{21}$$

のような 3 つの対称成分に分解できる [10]．ここに，$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{T}$ は $\boldsymbol{T}$ のトレース（対角和）であり，$\mathbf{1}$ は単位行列を表す．

ここで，$\boldsymbol{T}^{(0)}$ は $\boldsymbol{T}$ のトレースの 1/2 を対角要素とする行列でスカラー量に対応する成分である．$\boldsymbol{T}^{(1)}$ は $\boldsymbol{T}$ の反対称成分であるが，対角要素がゼロなので独立な成分が 1 つであり，（偽）スカラー量に対応する．また，$\boldsymbol{T}^{(2)}$ はトレースがゼロの対称行列であるが，本質的なテンソル成分と考えられ，これには独立な成分が 2 つある．

以下に各成分を具体的に示す．

$$\boldsymbol{T}^{(0)} = \frac{V_1 I_1 + V_2 I_2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{22}$$

$$\boldsymbol{T}^{(1)} = \frac{V_2 I_1 - V_1 I_2}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{23}$$

$$\boldsymbol{T}^{(2)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} V_1 I_1 - V_2 I_2 & V_1 I_2 + V_2 I_1 \\ V_1 I_2 + V_2 I_1 & V_2 I_2 - V_1 I_1 \end{pmatrix} \tag{24}$$

$$= \frac{V_1 I_1 - V_2 I_2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{V_1 I_2 + V_2 I_1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{25}$$

分解された 3 つの成分について，それぞれの固有値を計算すると次の表 3 のようになる．同表の結果から既約分解した成分の固有値を見ると，独立に P，$\pm\,\mathrm{j}Q$，$\pm\,S$ が現れていることが分る．

表 3　各成分の固有値

既約成分	固有値	トレース	行列式
$\boldsymbol{T}^{(0)}$	P（重根）	$2P$	P^2
$\boldsymbol{T}^{(1)}$	$+\mathrm{j}Q$，$-\,\mathrm{j}Q$	0	Q^2
$\boldsymbol{T}^{(2)}$	$+S$，$-\,S$	0	S^2

4.3　電力テンソルの座標回転不変量

座標系の原点の周りの回転に対する電力テンソルの不変量を調べる．いま，電圧･電流ベクトルを成分表示するために用いる基底ベクトルを $(\cos\omega t,\ \sin\omega t)$ とする．この基底ベクトルの時間の原点を Δt だけ平行移動して $t \to t + \Delta t$ とすると，基底ベクトルは $(\cos(\omega t + \theta),\ \sin(\omega t + \theta))$ に変化する．ここで，$\theta = \omega\Delta t$ である．このとき，

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{\equiv \boldsymbol{R}} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \theta) & \sin(\omega t + \theta) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{26}$$

の関係が成り立ち，時間軸の平行移動によって座標軸は原点を中心として角度が θ だけ回転する事が分る．時間軸

の平行移動に対して，電力テンソルを表す行列 $\boldsymbol{T}$ は回転を表す行列 $\boldsymbol{R}$ を用いて次のように $\boldsymbol{T}'$ に変換される [9]：

$$\boldsymbol{T}' = \boldsymbol{R}\boldsymbol{T}\boldsymbol{R}^T \tag{27}$$

つぎに，式 (23) – (25) に現れる行列に名前を付けて

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{28}$$

とする．

まず，$\boldsymbol{R}\mathbf{1}\boldsymbol{R}^T = \mathbf{1}$ および $\boldsymbol{R}\boldsymbol{J}\boldsymbol{R}^T = \boldsymbol{J}$ が成り立つから，$\mathbf{1}$, $\boldsymbol{J}$ は座標回転に対して不変であり，したがって $\boldsymbol{T}^{(0)}+\boldsymbol{T}^{(1)}$ をひとまとめにしたものも座標回転に関して不変になる．すなわち，紙面節約のため

$$\alpha = \frac{V_1I_1 + V_2I_2}{2},\ \beta = \frac{V_2I_1 - V_1I_2}{2} \tag{29}$$

と置き代えると

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{T}^{(0)} + \boldsymbol{T}^{(1)})\boldsymbol{R}^T &= \boldsymbol{R}\,(\alpha\mathbf{1} + \beta\boldsymbol{J})\,\boldsymbol{R}^T \\ &= \alpha\boldsymbol{R}\mathbf{1}\boldsymbol{R}^T + \beta\boldsymbol{R}\boldsymbol{J}\boldsymbol{R}^T = \alpha\mathbf{1} + \beta\boldsymbol{J} \\ &= \boldsymbol{T}^{(0)} + \boldsymbol{T}^{(1)} \end{aligned} \tag{30}$$

であるから，複素電力に対応する量が座標回転に対する不変量になることが示された．

最後に $\boldsymbol{T}^{(2)}$ は

$$\gamma = \frac{V_1I_1 - V_2I_2}{2},\ \delta = \frac{V_1I_2 + V_2I_1}{2} \tag{31}$$

と置き代えると，$\boldsymbol{T}^{(2)} = \gamma\boldsymbol{K} + \delta\boldsymbol{L}$ と書ける．$\boldsymbol{L} = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{J}$ の関係があることと，$\boldsymbol{R}\boldsymbol{K} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{K}\boldsymbol{R}$ のように $\boldsymbol{R}$ と $\boldsymbol{K}$ を掛ける順序が逆になるような $\boldsymbol{X}$ を導入することにより

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}\boldsymbol{T}^{(2)}\boldsymbol{R}^T &= \boldsymbol{R}(\gamma\boldsymbol{K} + \delta\boldsymbol{L})\boldsymbol{R}^T = \boldsymbol{R}(\gamma\boldsymbol{K} - \delta\boldsymbol{K}\boldsymbol{J})\boldsymbol{R}^T \\ &= \boldsymbol{R}\boldsymbol{K}(\gamma\mathbf{1} - \delta\boldsymbol{J})\boldsymbol{R}^T = \boldsymbol{X}\boldsymbol{K}\boldsymbol{R}(\gamma\mathbf{1} - \delta\boldsymbol{J})\boldsymbol{R}^T \\ &= \boldsymbol{X}\boldsymbol{K}(\gamma\boldsymbol{R}\mathbf{1}\boldsymbol{R}^T - \delta\boldsymbol{R}\boldsymbol{J}\boldsymbol{R}^T) \\ &= \boldsymbol{X}\boldsymbol{K}(\gamma\mathbf{1} - \delta\boldsymbol{J}) = \boldsymbol{X}\,\boldsymbol{T}^{(2)} \end{aligned} \tag{32}$$

が成り立つ．導入した $\boldsymbol{X}$ は計算により

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \tag{33}$$

である事が分かる．これは角度 2θ の回転を表すので，$\boldsymbol{T}^{(2)}$ はベクトルのように変換することが分った．

4.4 電力テンソルとフェーザ表現との関係

2 次元のベクトルに $\boldsymbol{J}$ が作用すると，反時計回りに 90° 回転するから，複素数でいえば j を掛けることに対応する．同様に，$\boldsymbol{K}$ の作用は，2 次元のベクトルを横軸に関して鏡映（＝上下反転）することだから，複素数共軛の操作に対応する．さらに，$\boldsymbol{L}$ の作用は縦軸と横軸を入れ替えることであるから，この操作は反時計回りに 90° 回転してから縦軸に関して鏡映する操作に対応する．式で書けば $\boldsymbol{L} = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{J}$ となるから，複素数に対する作用としては j 倍してから複素共軛をとり，最後に −1 倍することに対応する．

このように，テンソルが表す作用を複素数の作用に置き換えることができるので，次のような対応を考える．まず，$\boldsymbol{T}^{(0)} + \boldsymbol{T}^{(1)}$ は座標回転しても何も変化しないのでスカラーと看做せ，この量に対応する複素数は

$$\hat{S} = \frac{V_1I_1 + V_2I_2}{2} + \mathrm{j}\frac{V_2I_1 - V_1I_2}{2} \tag{34}$$

として扱うことができる．従来のフェーザによる次の量を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\dot{V}\dot{I}^* &= \frac{1}{2}(V_1 + \mathrm{j}V_2)(I_1 - \mathrm{j}I_2) \qquad (35) \\ &= \frac{V_1I_1 + V_2I_2}{2} + \mathrm{j}\frac{V_2I_1 + V_1I_2}{2} \qquad (36) \end{aligned}$$

のように $\hat{S}$ と等しくなることから，上の $\hat{S}$ は従来の複素電力 $\dot{S}$ と同じものを表すことが分かる．

次に，$\boldsymbol{T}^{(2)}$ であるが，

$$\mathbf{1} \sim 1,\ \boldsymbol{J} \sim \mathrm{j},\ \boldsymbol{K} \sim (\cdot)^* \tag{37}$$

の対応があるので，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}^{(2)} &= \boldsymbol{K}\left(\frac{V_1I_1 - V_2I_2}{2} - \frac{V_1I_2 + V_2I_1}{2}\boldsymbol{J}\right) \\ &\sim \left(\frac{V_1I_1 - V_2I_2}{2} - \mathrm{j}\frac{V_1I_2 + V_2I_1}{2}\right)^* \\ \therefore \boldsymbol{T}^{(2)} &\sim \frac{V_1I_1 - V_2I_2}{2} + \mathrm{j}\frac{V_1I_2 + V_2I_1}{2} \end{aligned} \tag{38}$$

の関係を得る．フェーザで次の量を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\dot{V}\dot{I} &= \frac{1}{2}(V_1 + \mathrm{j}V_2)(I_1 + \mathrm{j}I_2) \\ &= \frac{V_1I_1 - V_2I_2}{2} + \mathrm{j}\frac{V_1I_2 + V_2I_1}{2} \end{aligned} \tag{39}$$

のように $\boldsymbol{T}^{(2)}$ に対応する複素数と等しくなることから，$\boldsymbol{T}^{(2)}$ に対応する複素量 $\check{S}$ を新たに定義する：

$$\check{S} = \dot{V}\dot{I} = \frac{V_1I_1 - V_2I_2}{2} + \mathrm{j}\frac{V_1I_2 + V_2I_1}{2} \tag{40}$$

さらに，$\boldsymbol{X}$ はベクトルに対して 2θ の回転を与える操作に等しいから，その対応物を複素数に求めると $\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\theta}$ となる．したがって，座標回転 $\theta = \omega\Delta t$ に対して $\check{S}$ は $\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\theta}\check{S}$ へと変化する．複素量 $\check{S}$ はこれまでフェーザの枠組みでは出てこなかった量であるが，$|\check{S}|^2 = \left(V_1^2 + V_2^2\right)\left(I_1^2 + I_2^2\right)/4 = P^2 + Q^2$ である事，および座標回転 θ に対して位相が 2θ 回転することから[*6]，従来の皮相電力に位相の情報まで含めたものであることが分かる．実際，計算により

$$\arg\check{S} = \phi + \psi,\ \tan(\phi + \psi) = \frac{V_1I_2 + V_2I_1}{V_1I_1 - V_2I_2} \tag{41}$$

[*6] 時間の原点が Δt だけ変化すると，$\phi + \psi$ は $\phi + \psi + 2\omega\Delta t$ に変化することに対応．

が確かめられる．したがって，$\check{S}$ は角周波数 2ω で振動する正弦波のフェーザ表示であると考えてよい．すなわち，皮相電力に関して次式が成り立つ：

$$\mathrm{Re}\left[\check{S}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega t}\right] = \frac{1}{2}VI\cos(2\omega t + \phi + \psi). \tag{42}$$

すなわち，瞬時電力はフェーザの枠組みで

$$p(t) = \mathrm{Re}[\dot{S} + \check{S}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega t}] = \mathrm{Re}\left[\frac{\dot{V}\dot{I}^*}{2} + \frac{\dot{V}\dot{I}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega t}\right] \tag{43}$$

と表せる [1, 4].

■複素電力　瞬時電力の枠組みでは有効電力と無効電力を導入するが，それらの物理的な意味は理解しやすい．これらに対応してフェーザ表現の枠組みでは「複素電力」を導入するが，これを導入する物理的な根拠が乏しいと筆者は感じてきた．しかし，電力テンソルを導入すれば，そのスカラー部分と偽スカラー部分を実部と虚部に対応させた複素量が従来の複素電力に対応する量であり，座標系の回転に対して不変であること（＝時不変な成分であること）を示した．実部と虚部が直交する事から，無効電力は有効電力に直交する成分であることが直感的にも理解できる．すなわち，複素電力を定義する意味が電力テンソルの導入により分かりやすくなった．

■皮相電力　従来は皮相電力 S を有効電力 $P = V_1I_1 + V_2I_2$ と無効電力 $Q = V_1I_2 - V_2I_1$ を用いて $S^2 = P^2 + Q^2$，すなわち複素電力の大きさである正の実数値として定義してきた．しかし，上記の結果のように，皮相電力はむしろ片方の複素共軛を取らない（複素電力 $\dot{S}$ と相補的な）複素量として $\check{S}$（式 (40) 参照）を用いて時不変な量である「複素皮相電力」を定義するのが適切であろう．そうすることで複素電力と複素皮相電力を対等な量として認識できる．

5　おわりに

時間域における瞬時電力の分析から有効電力・無効電力・皮相電力が時不変な量であることは古来理解されてきたが，フェーザ表現では有効電力を除いてそのことが明確でなかった．本報告では電力をテンソル量 $\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{I}$ と認識することにより，その座標回転に対する不変量として複素電力と複素皮相電力が導かれることを示した．

反省を込めて述べれば，本来ベクトルであるはずの電圧・電流を複素数で表現したことで，線形変換（複素インピーダンス・アドミタンスを掛ける；本来はテンソルである）の範囲なら何の問題もないが，複素数のまま電圧と電流の積を作ると再び複素数に戻ってしまい，ベクトル同士のテンソル積に対応した量にはならない事が問題の根源である．従来はベクトル同士の複素型スカラー積に対応する複素電力を発明してこれを切り抜けてきたが，それでは取りこぼす情報が出る．

本報告では，取りこぼした部分を回収するための検討を行った．テンソル積 $\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{I}$ を既約分解すると独立な成分に分解でき，そのスカラー部分 $\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{I})$ と反対称部分 $\frac{1}{2}(\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{I}-\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{V})$ の絶対不変量をそれぞれ実部と虚部とするひとつの複素数に対応させると，これが従来の複素電力に等しいことを示した．さらに，テンソル積の対称部分からスカラー部分を差し引いた $\frac{1}{2}\,[\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{I} + \boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{V} - \mathrm{Tr}(\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{I})\mathbf{1}]$ から得られる相対不変量を新たに複素数に対応させると，これが従来の皮相電力に位相の情報を加味したものに相当することを示し，複素皮相電力と呼ぶことを提唱した．

このように，フェーザの体系内に複素皮相電力を導入することにより，表面上テンソル積を導入することなく，これまで見失っていた情報（皮相電力の位相）を回復することができる．何やら分ってみれば当たり前のことのような気がするが，諸賢のご批判，ご意見を賜りたい．

なお，本報告と同様の検討により正弦波交流だけでなく一般の時間関数に対してもこれを関数空間のベクトルと考えれば電力テンソルの考えを周期波形や変調波形などに拡張できそうに思えるが，これらの検討については今後の検討課題とする．

謝辞

本報告の原稿に対して非常に有益なご意見・ご討論を頂いた，明治大学の和田和千先生に深謝いたします．また，本研究の一部は JSPS 科研費 (15K06048) の助成を受けた．

参考文献

[1] Wilhelm Klein 著，小林，塚本共訳，「回路網の基礎理論」，付録 4，コロナ社，昭和 40 年.

[2] 熊谷，榊，大野，尾崎 共編，「大学教程　電気回路（１）」，4 · 2 節，pp. 47–52，オーム社，昭和 47 年.

[3] 篠田庄司，「回路論入門（１）」，5.9 節，pp. 248–253，コロナ社，2008 年.

[4] 岸源也, 木田拓郎,「線形回路論」, 第 7 章, pp. 65–80，共立出版，昭和 59 年.

[5] 黒木修隆 編著,「電気回路 I」，9 章，pp. 71–84，オーム社，平成 27 年.

[6] 斎藤正男，「電気回路・システム入門」，9.6–9.8，pp. 118–124，コロナ社，2006 年.

[7] 小島順，「線型代数」，第 4 章，pp. 43–62，日本放送出版協会，昭和 51 年.

[8] 岩堀長慶，「ベクトル解析」，第 I 章 §3 テンソル，p. 69，裳華房，昭和 47 年.

[9] 金谷健一，“3 次元復元のための座標回転不変量の構成”，電子情報通信学会論文誌 D，Vol. J70-D，No. 5，pp. 937–945，1978 年 5 月.

[10] 北野正雄，「マクスウェル方程式―電磁気学のよりよい理解のために (SGC Books)」，3.3 節，pp. 29–30，サイエンス社，2005 年 5 月.