

解 説

区間多項式の安定性判別
—多重線形と単調性

川村 武*・島 公脩†

1. はじめに

本解説では、線形制御系の特性方程式の係数がいくつかの区間パラメータの関数であるときの安定判別法について述べる。制御系の動特性の表現に現れるパラメータの取り得る値には幅（区間）があり、その範囲のいずれの値においてもある性質が成り立つように設計したいという要求は自然なことであり、ロバスト制御の原型ともいべきであろう。たとえば、Routh-Hurwitzの安定判別条件は特性多項式の係数の関数が正の値をとることを要請する。このような場合、直接、おのおののパラメータの取り得る値の区間の積集合上で関数の値を細かく調べるよりも、多変数関数の解析的・代数的性質を用いて、パラメータの区間の端点における値のみで判定できる条件があれば、計算機の能力が飛躍的に向上した今日においても効率的である。

本誌に1996年～1997年にかけて連載された森 武宏・小亀 英己両氏による詳しい解説講座 [1] は、本分野の嚆矢である Kharitonov の定理 [2] から安定半径に至るまで、その数学的な背景を含めた丁寧な内容であり本解説で改めて触れる点はあまり見当たらない。本解説では、上記の講座ではほとんど触れられていない多重線形構造の安定性に関する事柄および筆者らが取り組んでいる多項式型の構造をもつ場合について紹介する。

2. 区間多項式そして安定性解析法

線形制御系の特性多項式を

$$F(s, \mathbf{p}) = c_n(\mathbf{p})s^n + c_{n-1}(\mathbf{p})s^{n-1} + \dots + c_0(\mathbf{p}) \quad (1)$$

と表す。ここに $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m)$ であり、 $p_i \in [p_i, \bar{p}_i] = \mathbf{I}_i \subset \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $\mathbf{p} \in \mathcal{P} = \mathbf{I}_1 \times \mathbf{I}_2 \times \dots \times \mathbf{I}_m$ とし、係数 $c_j(\mathbf{p}) = c_j(p_1, \dots, p_m)$, $j = 0, 1, \dots, n$, は \mathbf{p} の多項式であり、 $c_n(\mathbf{p}) > 0$ と仮定する。

まず、特性多項式 $F(s, \mathbf{p})$ の係数 $c_j(\mathbf{p})$ が区間パラメータそのものであるときには、Kharitonov の定理が適用できて、区間係数の端点における値のみを用いて制御系の安定性の必要十分条件が得られる。また非モニツ

クな特性多項式において次数低減 (degree drop) が生じている場合にも Kharitonov の定理が有効であることが報告されている [3]。

次に係数 $c_j(\mathbf{p})$ が p_i のアフィン型の結合で表されている場合には Edge 定理 [1,4] が適用できる。このときは、

$$F(s, \mathbf{p}) = f_0(s) + \sum_{i=1}^m p_i f_i(s) \quad (2)$$

であり、係数 $c_j(\mathbf{p})$ は、 $\alpha_{0j} + \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} p_i$ となっている。

さらに係数 $c_j(\mathbf{p})$ が p_i の多重線形 (multilinear) になっている場合がある。ここでは、係数 $c_j(\mathbf{p})$ が $p_i \cdot p_j \cdot p_k$ のように p_i に関して1次と0次の項からなっている。この場合は、写像定理 [5,4] が適用できる。係数 $c_j(\mathbf{p})$ は、 p_i 以外の項も含むため、森氏らの解説のようにマルチアフィンと厳密にはいふべきであるが、次の定理のように多重線形の呼称が一般的であるので、本稿では多重線形で表記を統一する。

【定理 1】 (写像定理) 係数が多重線形 (multilinear) である多項式の値域 $F(j\omega, \mathbf{p})$ の凸包は、 \mathcal{P} の頂点の写像 $F(j\omega, \mathbf{p}^*)$ の凸包である。

周波数領域での表現を用いるこの定理による安定性の証明では、パラメータ空間の凸包 \mathcal{P} (各 p_i を軸とした超立方体) とその周波数領域での値域 $F(s, \mathbf{p})$ の凸包の関連および $F(j\omega, \mathbf{p})$ の凸包の安定判別の二つの議論が必要である。

いま、それぞれの係数 $c_j(\mathbf{p})$ は p_i に関して多重線形であるから、ある角周波数 ω における $F(j\omega, \mathbf{p})$ の値が複素平面上で作る凸包の頂点は、 p_i の端点の組合せで表現できる。 $F(j\omega, \mathbf{p})$ の値が凸包の内部に含まれるかどうかの検証は、パラメータの存在区間を $[0, 1]$ として考えるとわかりやすい [5,4]。

一方、 $F(j\omega, \mathbf{p})$ の凸包の安定性判別は、零不包含定理 (zero exclusion theorem) と Mikhailov, Leonhard, Cremer の定理 [1,4] による。

【定理 2】 (Mikhailov, Leonhard, Cremer の定理) 特性多項式

$$F(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1 + a_0$$

が安定であるための必要十分条件は、周波数領域での値集合 $F(j\omega)$; $0 \leq \omega \leq \infty$ が、

* 北見工業大学 工学部

† 北海道大学 大学院 工学研究科

Key Words: interval parameter, characteristic polynomial, stability, multilinear, monotonicity.

- 1) $F(j0) = a_0 > 0$ ($F(j\omega)$ の起点の実部が正)
- 2) ω が増加するにつれて $F(j\omega)$ が原点を反時計まわりに回り, 位相が $\omega \rightarrow \infty$ で $n\frac{\pi}{2}$ の2条件を満たすことである.

【例題 1】 (写像定理を用いた安定判別 [6]) 次の特性多項式の安定性を考える.

$$F(s, \mathbf{p}) = s^3 + (2p_1p_2 + 4p_2p_3)s^2 + (2p_1p_2p_3 + 4p_1p_2)s + 3 \quad (3)$$

ここで $p_1 \in [0.5, 1], p_2 \in [1, 2], p_3 \in [0.2, 0.4]$

この (3) 式に $s = j\omega$ を代入して, パラメータ空間における 8 頂点 $p^{---}, p^{--+}, p^{-+-}, p^{+--}, p^{++-}, p^{+-+}, p^{+--}, p^{+++}$ (ここで $p^{***} = [p_1, p_2, p_3]$; * は + または - の記号を取り, + はそれぞれの定義区間での最大値, - は定義区間での最小値を取るものとする.) に対して, それぞれ $\text{Re}F(j\omega), \text{Im}F(j\omega)$ を作る. ここでも右肩の添え字は, 8 頂点と同様とする.

$$\begin{cases} \text{Re}F(j\omega)^{---} = 3 - 1.8\omega^2, \\ \text{Im}F(j\omega)^{---} = 2.2\omega - \omega^3, \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \text{Re}F(j\omega)^{--+} = 3 - 2.6\omega^2, \\ \text{Im}F(j\omega)^{--+} = 2.4\omega - \omega^3, \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \text{Re}F(j\omega)^{-+-} = 3 - 3.6\omega^2, \\ \text{Im}F(j\omega)^{-+-} = 4.4\omega - \omega^3, \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \text{Re}F(j\omega)^{+--} = 3 - 2.8\omega^2, \\ \text{Im}F(j\omega)^{+--} = 4.4\omega - \omega^3, \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \text{Re}F(j\omega)^{++-} = 3 - 5.2\omega^2, \\ \text{Im}F(j\omega)^{++-} = 4.8\omega - \omega^3, \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \text{Re}F(j\omega)^{+-+} = 3 - 3.6\omega^2, \\ \text{Im}F(j\omega)^{+-+} = 4.8\omega - \omega^3, \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \text{Re}F(j\omega)^{+--} = 3 - 5.6\omega^2, \\ \text{Im}F(j\omega)^{+--} = 8.8\omega - \omega^3, \end{cases} \quad (10)$$

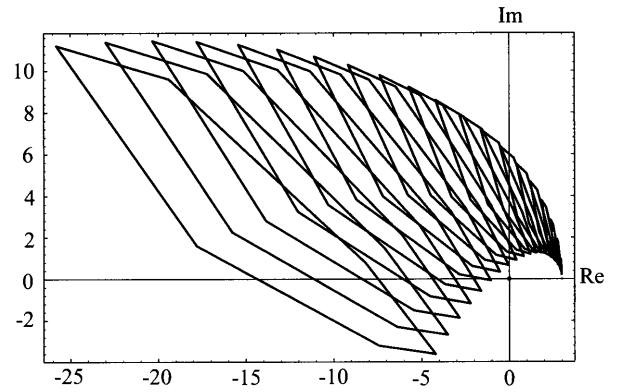
$$\begin{cases} \text{Re}F(j\omega)^{+++} = 3 - 7.2\omega^2, \\ \text{Im}F(j\omega)^{+++} = 9.6\omega - \omega^3 \end{cases} \quad (11)$$

以上の点を結び, 各 ω に対して凸包を作ったのが第 1 図である. 結局, 各角周波数 ω において, 凸包を作り, $\omega: 0 \rightarrow \infty$ における凸包の軌跡を考えることにより安定性を判別できるのである.

3. 特性多項式の係数が区間パラメータの多項式の場合

特性多項式 (1) が, 区間パラメータ \mathbf{p} の多項式である場合には, Routh-Hurwitz の定理の証明 [7,8] などを検討すると, Sturm の定理の多変数版があれば問題は解決できる. しかし, 現時点で見当たらない.

この問題に対して従来は, 区間解析法 (Interval analysis) を元に Bernstein アルゴリズムを用いた解法 [13]



第 1 図 $F(j\omega, \mathbf{p})$ の凸包の配置: $\omega = 0.1k, k = 0, 1, \dots, 20$

や多重線形となる多項式を新たな区間パラメータを用いて作る方法などが試みられてきている. 前者は, 参考文献を示すにとどめ, 後者については, 後ほど述べることにする. さて, 先に述べた写像定理で扱った特性多項式の係数がパラメータの多重線形である場合は, 写像の値域の最大最小は区間パラメータの端点の値のみで計算できる. 同じような状況は, 多変数関数が「単調」である場合にも期待できる. そこで, まず, 多変数関数の単調性の一つの定義を与えよう.

3.1 単調性の定義と判定法

まず区間パラメータについて次の定義をしておく [9]:

【定義 1】 区間パラメータ $p_1, p_2, \dots, p_m; p_i \in [p_i, \bar{p}_i] = \mathbf{I}_i \subset \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, m$ を考える. パラメータ領域 \mathcal{P} に対して, その端点を \mathbf{p}^* とし, 端点の集合を \mathcal{P}^* ; $\mathbf{p}^* \in \mathcal{P}^*$ とする.

さらに k 番目の区間パラメータを除外したパラメータの組 $\hat{\mathbf{p}}_k = (p_1, p_2, \dots, p_{k-1}, p_{k+1}, \dots, p_m), \hat{\mathbf{p}}_k \in \hat{\mathcal{P}}_k = \mathbf{I}_1 \times \mathbf{I}_2 \times \dots \times \mathbf{I}_{k-1} \times \mathbf{I}_{k+1} \times \dots \times \mathbf{I}_m, k = 1, 2, \dots, m$ を定義する. この $\hat{\mathcal{P}}_k$ に対しても同様に端点を $\hat{\mathbf{p}}_k^*$ とし, 端点集合を $\hat{\mathcal{P}}_k^*; \hat{\mathbf{p}}_k^* \in \hat{\mathcal{P}}_k^*$ とする.

つぎにこれにより単調性の定義をする.

【定義 2】 (\mathbf{p} に関する多項式の \mathcal{P} 上での単調性)

$\phi(\mathbf{p})$ を p_i の多項式とする. ただし, $p_i \in [p_i, \bar{p}_i] \subset \mathbb{R}, i = 1, \dots, m$.

もし次の不等式のうちのいずれかが, ある $\hat{\mathbf{p}}_i \in \hat{\mathcal{P}}_i$ に対して成立するとき, 多項式は p_i について単調であるという.

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{p})}{\partial p_i} \geq 0, \quad p_i \in [p_i, \bar{p}_i] \quad (12)$$

または

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{p})}{\partial p_i} \leq 0, \quad p_i \in [p_i, \bar{p}_i] \quad (13)$$

もしも $\phi(\mathbf{p})$ がすべての $p_i, i = 1, \dots, m$ について単調であれば, 多項式は \mathbf{p} について単調であるという.

3.1.1 単調性が明らかに判定できる場合

上記の単純な単調性の判定に対しても通常は複雑な計算を要する。これに対し、単調性が自明な場合もあるので、簡単な2例を挙げる [10].

Case 1: 偏微分が

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{p})}{\partial p_i} = \psi(\hat{p}_i), \quad (14)$$

ここで $\psi(\hat{p}_i)$ は \hat{p}_i の多項式

である場合、 $\phi(\mathbf{p})$ は p_i について単調である。

Case 2: 偏微分が

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{p})}{\partial p_i} = \psi_1(p_i)\psi_2(\hat{p}_i), \quad (15)$$

ここで $\psi_1(p_i)$ は p_i の多項式
かつ $\psi_2(\hat{p}_i)$ は \hat{p}_i の多項式

と表されるとき、 $\phi(\mathbf{p})$ の p_i に関する単調性は $\psi_1(p_i)$ により判定できる。このとき、次の条件

$$\psi_1(p_i) \geq 0, \quad p_i \in [\underline{p}_i, \bar{p}_i] \quad (16)$$

または

$$\psi_1(p_i) \leq 0, \quad p_i \in [\underline{p}_i, \bar{p}_i] \quad (17)$$

の一つが成り立つと $\phi(\mathbf{p})$ は p_i について単調である。

Case 1 は Case 2 で $\psi_1(p_i)$ が定数である場合である。もしも多項式 $\phi(\mathbf{p})$ が \mathbf{p} について線形、アファイン、多重線形である場合は、Case 1 となる。

これらのように単調性が簡単にわかる場合ばかりではない。そのような場合に対して、筆者らは単調性判定アルゴリズムを Sturm の定理と単調性を組み合わせることにより考案した [9]。次に単調性を用いて安定性判定条件を考える。

3.2 多項式型係数に対する単調性の適用

まず次の定義を新たに与える [11].

【定義 3】

多項式 (1) の係数 $c_j(\mathbf{p})$ のパラメータの端点 \mathbf{p}^* における最大値および最小値の組合せで作られる 2^{n+1} 本の多項式の集合を \tilde{Q}^n とする。

これにより Kharitonov の定理と同様に記述する [11].

【定理 3】 (単調性を用いた Kharitonov の定理 I)

(1) で定義される多項式 $F(s, \mathbf{p})$ の係数 $c_j(\mathbf{p})$ が \mathbf{p} について単調であり、 2^{n+1} 本の多項式の集合 \tilde{Q}^n が安定であれば、多項式 $F(s, \mathbf{p})$ は安定となる。

定理 3 の単調性の仮定のもと、 2^{n+1} 本の多項式 \tilde{Q}^n より 4 本の多項式 $\bar{f}_1(s), \bar{f}_2(s), \bar{f}_3(s), \bar{f}_4(s)$ を作る。

【定義 4】 多項式 $\bar{f}_1(s), \bar{f}_2(s), \bar{f}_3(s), \bar{f}_4(s)$ を次のようにする。

$$\bar{f}_i(s) = \tilde{c}_n s^n + \tilde{c}_{n-1} s^{n-1} + \dots + \tilde{c}_1 s + \tilde{c}_0 \quad (18)$$

ここで $\bar{f}_1(s)$:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{n-2k} &= \begin{cases} \max(c_{n-2k}(\mathbf{p})) \text{ at } \mathbf{p}^*, & k: \text{ even} \\ \min(c_{n-2k}(\mathbf{p})) \text{ at } \mathbf{p}^*, & k: \text{ odd} \end{cases} \\ \tilde{c}_{n-2k-1} &= \begin{cases} \max(c_{n-2k-1}(\mathbf{p})) \text{ at } \mathbf{p}^*, & k: \text{ even} \\ \min(c_{n-2k-1}(\mathbf{p})) \text{ at } \mathbf{p}^*, & k: \text{ odd} \end{cases} \\ \bar{f}_2(s): \\ \tilde{c}_{n-2k} &= \begin{cases} \min(c_{n-2k}(\mathbf{p})) \text{ at } \mathbf{p}^*, & k: \text{ even} \\ \max(c_{n-2k}(\mathbf{p})) \text{ at } \mathbf{p}^*, & k: \text{ odd} \end{cases} \\ \tilde{c}_{n-2k-1} &= \begin{cases} \min(c_{n-2k-1}(\mathbf{p})) \text{ at } \mathbf{p}^*, & k: \text{ even} \\ \max(c_{n-2k-1}(\mathbf{p})) \text{ at } \mathbf{p}^*, & k: \text{ odd} \end{cases} \\ \bar{f}_3(s): \\ \tilde{c}_{n-2k} &= \begin{cases} \min(c_{n-2k}(\mathbf{p})) \text{ at } \mathbf{p}^*, & k: \text{ even} \\ \max(c_{n-2k}(\mathbf{p})) \text{ at } \mathbf{p}^*, & k: \text{ odd} \end{cases} \\ \tilde{c}_{n-2k-1} &= \begin{cases} \max(c_{n-2k-1}(\mathbf{p})) \text{ at } \mathbf{p}^*, & k: \text{ even} \\ \min(c_{n-2k-1}(\mathbf{p})) \text{ at } \mathbf{p}^*, & k: \text{ odd} \end{cases} \\ \bar{f}_4(s): \\ \tilde{c}_{n-2k} &= \begin{cases} \max(c_{n-2k}(\mathbf{p})) \text{ at } \mathbf{p}^*, & k: \text{ even} \\ \min(c_{n-2k}(\mathbf{p})) \text{ at } \mathbf{p}^*, & k: \text{ odd} \end{cases} \\ \tilde{c}_{n-2k-1} &= \begin{cases} \min(c_{n-2k-1}(\mathbf{p})) \text{ at } \mathbf{p}^*, & k: \text{ even} \\ \max(c_{n-2k-1}(\mathbf{p})) \text{ at } \mathbf{p}^*, & k: \text{ odd} \end{cases} \end{aligned}$$

この定義の多項式 $\bar{f}_1(s), \bar{f}_2(s), \bar{f}_3(s), \bar{f}_4(s)$ を用いて上記の定理を書きかえることができる。

【定理 4】 (単調性を用いた Kharitonov の定理 II)

すべての多項式 $\bar{f}_1(s), \bar{f}_2(s), \bar{f}_3(s), \bar{f}_4(s)$ が安定であるとき、 $F(s, \mathbf{p})$ は安定である。

このように係数が区間パラメータに関して単調であっても、これらの定理は十分条件にしかない。

3.3 条件式の単調性

3.3.1 単調性の Nyquist 線図への適用

この節では、単調性を周波数領域の特性多項式 (1) に対して用いる。まず $s = j\omega$ を特性多項式 (1) に代入して $F(j\omega, \mathbf{p})$ を得る。

$$F(j\omega, \mathbf{p}) = \text{Re}F(j\omega, \mathbf{p}) + j\text{Im}F(j\omega, \mathbf{p}) \quad (19)$$

ここで $\text{Re}F(j\omega, \mathbf{p})$ と $\text{Im}F(j\omega, \mathbf{p})$ は、実多項式

この表現を用いて次の定理を得る。

【定理 5】 [9]

$\text{Re}F(j\omega, \mathbf{p})$ と $\text{Im}F(j\omega, \mathbf{p})$ が \mathbf{p} について単調であれば、 $F(j\omega, \mathbf{p})$ は複素平面上の矩形領域 $F_r(\omega)$ に含まれる。

$$F_r(\omega) = \{x + jy : \alpha_m \leq x \leq \alpha_M, \beta_m \leq y \leq \beta_M\} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \min_{\substack{p_i = \underline{p}_i, \bar{p}_i \\ i=1,2,\dots,m}} \text{Re}F(j\omega, \mathbf{p}), \\ \alpha_M &= \max_{\substack{p_i = \underline{p}_i, \bar{p}_i \\ i=1,2,\dots,m}} \text{Re}F(j\omega, \mathbf{p}), \\ \beta_m &= \min_{\substack{p_i = \underline{p}_i, \bar{p}_i \\ i=1,2,\dots,m}} \text{Im}F(j\omega, \mathbf{p}), \end{aligned}$$

$$\beta_M = \max_{\substack{p_i = \bar{p}_i, \\ i=1,2,\dots,m}} \text{Im}F(j\omega, \mathbf{p}).$$

さらに $F_r(\omega)$ について Mikhailov の定理を用いると $F(s, \mathbf{p})$ の安定性を判定できる。

3.4 Frazer-Duncan の定理

これまでは、単調性が成り立っても、安定性の十分条件しか得られない場合を述べたが、最後に単調性が成り立つと必要十分条件が得られる定理について説明する。この定理は Hurwitz の行列式を用いるので、一般的な定義を与える。

【定義 5】 特性多項式 (1) に対して Hurwitz の行列式 $H_i(\mathbf{p})$, $i = 1, 2, \dots, n$ は次のように与えられる。ここで $H_i(\mathbf{p})$ は $H_n(\mathbf{p})$ の i 番目の首座小行列式である ($i = 1, 2, \dots, n-1$)

$$H_n(\mathbf{p}) = \begin{vmatrix} c_{n-1}(\mathbf{p}) & c_{n-3}(\mathbf{p}) & c_{n-5}(\mathbf{p}) & \cdots \\ c_n(\mathbf{p}) & c_{n-2}(\mathbf{p}) & c_{n-4}(\mathbf{p}) & \cdots \\ 0 & c_{n-1}(\mathbf{p}) & c_{n-3}(\mathbf{p}) & \cdots \\ 0 & c_n(\mathbf{p}) & c_{n-2}(\mathbf{p}) & \cdots \\ 0 & 0 & c_{n-1}(\mathbf{p}) & \cdots \\ 0 & 0 & c_n(\mathbf{p}) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} \quad (21)$$

この表現を用いて次の定理が与えられる。

【定理 6】 (Frazer-Duncan の定理 [12,4]) 特性多項式 (1) が安定であるための必要十分条件は、

- 1) 最大の Hurwitz 行列式 $H_n(\mathbf{p})$ が $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$ に対して 0 とならないこと。
- 2) $F(s, \mathbf{p}')$ が安定であるような $\mathbf{p}' \in \mathcal{P}$ が存在すること。

この定理にも単調性の概念を当てはめてみよう [10]。

【定理 7】 (単調性を用いた Frazer-Duncan の定理) $H_{n-1}(\mathbf{p})$ と $c_0(\mathbf{p})$ が \mathbf{p} について単調であると仮定すると特性多項式 (1) が安定であるための必要十分条件は、次の条件である。

- 1) $H_{n-1}(\mathbf{p})$ と $c_0(\mathbf{p})$ がすべての端点 $\mathbf{p}^* \in \mathcal{P}^*$ で正である。
- 2) $F(s, \mathbf{p}^*)$ が安定となる一点 $\mathbf{p}^* \in \mathcal{P}^*$ が存在する。

さきにも述べたが単調性と Kharitonov の定理および写像定理を用いて安定判別を考えても安定性について十分条件しか得られなかったが、Frazer-Duncan の定理の条件に単調性を考慮すると、安定性に関して必要十分条件を与える。しかし、Hurwitz の行列式を計算したのちに単調性を判定することは、容易でない場合がありうる。このような場合についてつぎに考えてみよう。

4. Sideris と Peña の方法と単調多項式の作成法

一部または全部のパラメータの変動・存在領域で単調性の条件が成り立たないことがある。このときに新しい

パラメータを導入して単調性の成り立つ多項式に形を変える方法がある。これは Sideris と Peña の多重線形形式への変換方法 [14,15] を発展させたものである。

4.1 Sideris と Peña の方法

参考文献 [14] において、Sideris と Peña は区間パラメータ \mathbf{p} の多項式 $f(\mathbf{p})$ に新たな区間パラメータを導入し、パラメータの 2 次以上の項を多重線形の形に置き換える方法を提案した。この置き換えは単純な方法でありながら、確実にもとの多項式の値域を包含し、その最大・最小は区間パラメータの端点に現れる。ここでは、紙面の都合によりアルゴリズムの説明は例により示す。

【例題 2】 ここでは、区間パラメータ p_1, p_2 が存在する多項式 $f(\mathbf{p})$ を考える。

$$f(\mathbf{p}) = 3p_1^3 + p_1^2 p_2 + 2p_1 + p_2^2 + 10 \quad (22)$$

ここで $p_1 \in [-1, 1], p_2 \in [-2, 2]$

ここで $f(\mathbf{p})$ には、 p_1^3, p_1^2, p_2^2 の項がある。この場合、パラメータ区間の端点と $f(\mathbf{p})$ の値域の最大・最小は必ずしも一致しない。 $f(\mathbf{p})$ の最大値は、21 ($(p_1, p_2) = (1, 2)$)、最小値は、4.75 ($(p_1, p_2) = (1, 0.5)$)。この場合に Sideris らの方法では、 $p_1^3 \rightarrow p'_1 p'_2 p'_3, p_2^2 \rightarrow p'_4 p'_5$ のパラメータ変換を行う。ここで新しいパラメータは $p'_1 \in [-1, 1], p'_2 \in [-1, 1], p'_3 \in [-1, 1], p'_4 \in [-2, 2], p'_5 \in [-2, 2]$ のようにそれぞれ置き換える元のパラメータ p_1, p_2 と同じ区間を取る。これにより、 $f(\mathbf{p})$ は、 $\bar{f}(\mathbf{p}')$ に置き換えられる。

$$\bar{f}(\mathbf{p}') = 3p'_1 p'_2 p'_3 + p'_1 p'_2 p'_4 + 2p'_1 + p'_4 p'_5 + 10 \quad (23)$$

ここで $p'_1, p'_2, p'_3 \in [-1, 1], p'_4, p'_5 \in [-2, 2]$

この場合、 $\bar{f}(\mathbf{p}')$ の値域の最大・最小は必ず区間パラメータの端点上に現れる。 $\bar{f}(\mathbf{p}')$ の最大値は、21 ($(p'_1, p'_2, p'_3, p'_4, p'_5) = (1, -1, -1, -2, -2), (1, 1, 1, 2, 2)$)、最小値は、-1 ($(p'_1, p'_2, p'_3, p'_4, p'_5) = (-1, -1, -1, -2, 2), (-1, 1, 1, 2, -2)$) である。

4.2 区間分割法と変換アルゴリズムによる単調多項式の作成

まず区間を分割することにより単調性の条件を用いることができる場合を述べる。つぎにその方法が適用できないときに Sideris と Peña の方法にならって、単調な多項式で元の多項式 $f(\mathbf{p})$ の値域を覆う方法を説明する [10]。

区間分割法 多項式 $f(\mathbf{p})$ が p_i について単調ではなくて、 $\frac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial p_i} = 0$ の ℓ 個の根 ($q_{i1} < q_{i2} < \dots < q_{i\ell}$) が他の区間パラメータ $p_k, i \neq k$ に依存していない場合、パラメータ p_i の区間を小区間: $[p_i, q_{i1}], [q_{i1}, q_{i2}], \dots, [q_{i\ell}, \bar{p}_i]$ に分割する。すると $f(\mathbf{p})$ は、分割された小区間において p_i について単調となる。

この方法が定理 7 の $H_{n-1}(\mathbf{p})$ または $c_0(\mathbf{p})$ が単調でないときに適用できるならば、安定判別条件は必要十分

条件のままである。

変換アルゴリズム ここでは、 $\frac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial p_i} = 0$ の根が他の区間パラメータ p_k ($i \neq k$) に依存している場合を考える。この場合は、区間分割法を使えない。

【定義 6】 (単調化指標 Monotonization index)

p_i について k_1 次の多項式

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{p}) = & p_i^{k_1} \Psi_{k_1}(\hat{\mathbf{p}}_i) + p_i^{k_2} \Psi_{k_2}(\hat{\mathbf{p}}_i) + \dots \\ & + p_i^{k_{j-1}} \Psi_{k_{j-1}}(\hat{\mathbf{p}}_i) + p_i^{k_j} \Psi_{k_j}(\hat{\mathbf{p}}_i) \\ & + X(\hat{\mathbf{p}}_i) \end{aligned} \quad (24)$$

ここで $k_1 > k_2 > \dots > k_{j-1} > k_j \geq 1$, $k_1, k_2, \dots,$

$k_{j-1}, k_j \in \mathbb{Z}$, そして $\Psi_{k_1}, \Psi_{k_2}, \dots, \Psi_{k_{j-1}}, \Psi_{k_j}$,

X は $\hat{\mathbf{p}}_i$ の多項式

を考える。この多項式に対して、パラメータ p_i に関する単調化指標 m_i を次のように定める。

$$m_i = k_1 - 2k_j \quad (25)$$

この定義を用いて、変換アルゴリズムを述べる。

アルゴリズム

Step 1 まず多項式の各項を p_i について降べきの順に並べ、単調化指標 m_i を計算する。

Step 2 $m_i < 0$ ならば、**Step 4** へ。

そうでなければ $m_i \geq 0$ で、**Step 3** へ。

Step 3 ($m_i \geq 0$)

最小次数の項の p_i を置きかえる: $p_i^{k_j} \rightarrow q_i^{k_j-1} q_{m+1}$.
そして他の項のすべての \mathbf{p} を \mathbf{q} に置きかえる; $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_m)$, $q_j \in [p_j, \bar{p}_j]$, $j = 1, 2, \dots, m$, $q_{m+1} \in [p_i, \bar{p}_i]$. この操作を (24) 式に加えると

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(\mathbf{q}) = & q_i^{k_1} \Psi_{k_1}(\hat{\mathbf{q}}_i) + q_i^{k_2} \Psi_{k_2}(\hat{\mathbf{q}}_i) + \dots \\ & + q_i^{k_{j-1}} \Psi_{k_{j-1}}(\hat{\mathbf{q}}_i) + q_i^{k_j-1} q_{m+1} \Psi_{k_j}(\hat{\mathbf{q}}_i) \\ & + X(\hat{\mathbf{q}}_i) \end{aligned} \quad (26)$$

を得る。変換後の多項式 $\tilde{\Phi}(\mathbf{q})$ の q_i についての単調性を調べる。変換後の多項式が q_i について単調であれば、アルゴリズムはおわり。これ以外は再びパラメータ $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{p}$ と新しい区間パラメータ $p_{m+1} \in [p_i, \bar{p}_i]$ を加え変換し、 $\tilde{\Phi} \rightarrow \Phi$ として **Step 1** へ。

Step 4 ($m_i < 0$)

多項式の最高次数の項を $p_i^{k_1} \rightarrow q_i^{k_1-1} q_{m+1}$ と置きかえ、ほかのすべての項 \mathbf{p} を \mathbf{q} と置きかえる; $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_m)$, $q_i \in [p_i, \bar{p}_i]$, $i = 1, 2, \dots, m$, $q_{m+1} \in [p_i, \bar{p}_i]$. このステップを多項式 (24) に適用すると

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(\mathbf{q}) = & q_i^{k_1-1} q_{m+1} \Psi_{k_1}(\hat{\mathbf{q}}_i) + q_i^{k_2} \Psi_{k_2}(\hat{\mathbf{q}}_i) + \dots \\ & + q_i^{k_{j-1}} \Psi_{k_{j-1}}(\hat{\mathbf{q}}_i) + q_i^{k_j} \Psi_{k_j}(\hat{\mathbf{q}}_i) \\ & + X(\hat{\mathbf{q}}_i) \end{aligned} \quad (27)$$

を得る。変換された多項式 $\bar{\Phi}(\mathbf{q})$ で q_i について単調性を調べる。もしも変換後の多項式が q_i について単

調であれば、アルゴリズムはおわり。そうでなければ、区間パラメータ $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{p}$ と新たな区間パラメータ $p_{m+1} \in [p_i, \bar{p}_i]$ を加え再変換する。そして、 $\bar{\Phi} \rightarrow \Phi$ と置きこのステップ (**Step 4**) を繰り返す。

(注意 1) このアルゴリズムで Step 3 または Step 4 を繰り返し適用し、その過程で多項式が p_i に関して単調であると判定できなければ、最終的に 3.1.1 節の **Case 2** の形になる。たとえば、Step 3 のみを (24) 式に用いると

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{q}) = q_i^{k_1} \Psi_{k_1}(\hat{\mathbf{q}}_i) + \tilde{X}(\hat{\mathbf{q}}_i) \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \text{ここで } \tilde{X}(\hat{\mathbf{q}}_i) = & X(\hat{\mathbf{q}}_i) + q_{m+1} q_{m+2} \dots q_{m+k_j} \Psi_{k_j}(\hat{\mathbf{q}}_i) \\ & + q_{m+1} q_{m+2} \dots q_{m+k_{j-1}} \Psi_{k_{j-1}}(\hat{\mathbf{q}}_i) + \dots \\ & + q_{m+1} q_{m+2} \dots q_{m+k_2} \Psi_{k_2}(\hat{\mathbf{q}}_i) \end{aligned}$$

となる。(28) 式で k_1 が奇数ならば、 $\tilde{\Phi}(\mathbf{q})$ は明らかに q_i について単調となる。 k_1 が偶数で区間 $[q_i, \bar{q}_i]$ が 0 を含まなければ、 $\tilde{\Phi}(\mathbf{q})$ は q_i について単調となる。 k_1 が偶数で区間 $[q_i, \bar{q}_i]$ が 0 を含むならば、区間を 0 で分割すると、 $\tilde{\Phi}(\mathbf{q})$ は区間 $[q_i, 0]$, $[0, \bar{q}_i]$ で単調となる。

Step 3 を用いた場合、単調化指標の符号が変わる場合があるが、Step 4 を用いた場合、単調化指標 m_i の値は常に減少するため、Step 4 の条件は保持され、同 Step を繰り返す。

Step 4 のみを適用した場合、さらに Step 3, Step 4 を合わせて用いた場合も 3.1.1 節の **Case 2** の形を得て、上記と同様の結果を得る。このため、このアルゴリズムは有限回数で終了し、パラメータに関して単調である多項式を得る。□

【例題 3】 例題 2 と同じ問題を考えよう。まずそれぞれのパラメータに関する単調性をみると

$$\frac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial p_1} = 9p_1^2 + 2p_1 p_2 + 2 > 0, \quad (29)$$

$$\frac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial p_2} = p_1^2 + 2p_2 \quad (30)$$

ここで $p_1 \in [-1, 1]$, $p_2 \in [-2, 2]$

p_1 については明らかに単調であり、 p_2 については単調ではない。そこで p_2 について変換アルゴリズムを用いる。まず $f(\mathbf{p})$ を p_2 の降べき順に直して、

$$f(\mathbf{p}) = p_2^2 + p_1^2 p_2 + 3p_1^3 + 2p_1 + 10 \quad (31)$$

ここで $p_1 \in [-1, 1]$, $p_2 \in [-2, 2]$

このとき、単調化指数 m_2 は 0 であるので **Step 3** により、低次よりパラメータ変換 $p_1^2 p_2 \rightarrow q_1^2 q_3$ とする。

$$\tilde{f}(\mathbf{q}) = q_2^2 + q_1^2 q_3 + 3q_1^3 + 2q_1 + 10 \quad (32)$$

ここで $q_1 \in [-1, 1]$, $q_2, q_3 \in [-2, 2]$

再び単調性を q_2 について調べる。

$$\frac{\partial \tilde{f}(\mathbf{q})}{\partial q_2} = 2q_2, q_2 \in [-2, 2] \quad (33)$$

このとき, q_2 を 0 で分割すると分割区間上で単調となる. 結局, $q_1 \in [-1, 1]$, $q_2, q_3 \in [-2, 2]$ で $\tilde{f}(\mathbf{q})$ の最大値は, 21 ($(q_1, q_2, q_3) = (1, 2, 2)$), 最小値は, 3 ($(q_1, q_2, q_3) = (-1, 0, -2)$) となる. この例題と例題 2 を比較すると, この場合では, 本手法が新たなパラメータの数が一つだけでよく, 最小値がより元の多項式の値に近いことがわかる.

5. おわりに

本稿では, 特性多項式の係数に区間パラメータが多重線形で表れる場合, より一般的な多項式型の場合に単調性を用いて安定性解析を行う試みについて紹介した. 今のところ, Frazer-Duncan の定理が一般的な場合に有効であると思われる. これと端点条件をいかに組み合わせるかという問題を, 最後に例題を含めて説明した. このように制御系の設計の多くが何らかの多変数関数が正值である, あるいは零にならないことを条件にしており, 本稿で述べた方法は, それらを確認するときにも有用であろうと思われる. このほかに区間パラメータが存在する制御系の安定性解析の手法の応用で PID 制御器の設計 [4] やむだ時間のある制御系に関する研究 [16] も行われている.

(2003年9月1日受付)

参考文献

- [1] 森, 小亀: パラメータ空間における多項式安定性理論の基礎; システム/制御/情報, [講座] I: Vol. 40, No. 6, pp. 259-266 (1996), II: Vol. 40, No. 8, pp. 366-372 (1996), III: Vol. 40, No. 10, pp. 459-465 (1996), IV: Vol. 40, No. 12, pp. 531-538 (1996), V: Vol. 41, No. 2, pp. 73-81 (1997)
- [2] V. L. Kharitonov: Asymptotic stability of an equilibrium position a family of systems of linear differential equations; *Differential Equations*, Vol. 14, No. 11, pp. 2086-2088 (1978)
- [3] A. A. Kale and A. L. Tits: On Kharitonov's theorem without invariant degree assumption; *Automatica*, Vol. 36, No. 7, pp. 1075-1076 (2000)
- [4] J. Ackermann: *Robust Control System with Uncertain Physical Parameters*, 2nd ed., Springer-Verlag (2003)
- [5] L. A. Zadeh and C. A. Desoer: *Linear System Theory*, McGraw-Hill (1963), [和訳] (訳者) 関根ほか: 線形系の理論, コロナ社 (1971)
- [6] 島ほか: 非線形システム制御論, コロナ社 (1997)
- [7] 高木: 代数学講義, 共立出版 (1965)
- [8] F. R. Gantmacher: *The Theory of Matrices*, Vol. II, Chelsea (1959)
- [9] T. Kawamura and M. Shima: Robust stability

analysis of characteristic polynomials whose coefficients are polynomials of interval parameters; *Journal of Mathematical Systems, Estimation, and Control, Summary* Vol. 6, No. 4, pp. 461-464 (1996), **Full paper** Vol. 8, No. 4, pp. 455-466 (1998)

- [10] T. Kawamura and M. Shima: Stability analysis of characteristic polynomials whose coefficients are polynomials of interval parameters using monotonicity; *Transactions of the Society of Instrument and Control Engineers*, Vol. 38, No. 6, pp. 557-566 (2002)
- [11] T. Kawamura and M. Shima: Robust stability of characteristic polynomials with monotonicity; *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, Vol. 30, No. 8, pp. 5109-5119 (1997)
- [12] R. A. Frazer and W. J. Duncan: On the criteria for the stability of small motions; *Proceedings of Royal Society A*, Vol. 124, pp. 642-654 (1929)
- [13] M. Zettler and J. Garloff: Robustness analysis of polynomials with polynomial parameter dependency using Bernstein expansion; *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 43, No. 3, pp. 425-431 (1998)
- [14] A. Sideris and R. S. S. Peña: Fast computation of the multivariable stability margin for real interrelated uncertain parameters; *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 34, No. 12, pp. 1272-1276 (1989)
- [15] B. R. Barmish: *New Tools for Robustness of Linear Systems*, Macmillan Publishing Company (1994)
- [16] K. Gu, V. L. Kharitonov and J. Chen: *Stability of Time-Delay Systems*, Birkhäuser (2003)

著者略歴

かわ
川 村



たけし
武 (正会員)

1991年3月北海道大学大学院工学研究科精密工学専攻博士後期課程中途退学. 同年4月北見工業大学電気工学科講師, 2003年4月同電気電子工学科助教授. 安定性解析, 計算代数の応用などの研究に従事. 博士(工学). 計測自動制御学会, 電気学会, 日本応用数学会, 日本ロボット学会などの会員.

しま
島



まさ
すけ
公 脩 (正会員)

1968年3月京都大学工学研究科博士課程単位取得退学. 同年4月大阪大学基礎工学部助手, 1970年京都大学工学部助教授, 1982年北海道大学工学部教授, 現在, 同大学院工学研究科教授. 非線形制御系の設計論, 最適制御と数値計算, 大域の制御理論などの研究に従事. 工学博士. 1981年システム制御情報学会榎木記念賞論文賞, 1999年計測自動制御学会論文賞を受賞. 計測自動制御学会, 日本応用数学会, 日本ロボット学会などの会員.