The Institute of Electronics, Information and Communication Engineers

論　文

各種高精度FDTD法の数値分散特性及び安定条件の比較検討

千藤　雄樹[†]　田口　健治[†]　工藤　祥典[†]　柏　達也[†a)]
大谷　忠生[††]

Comparison of Several High Accuracy FDTD Methods Based on Numerical Dispersion and Stability Condition

Yuuki SENDO[†], Kenji TAGUCHI[†], Hironori KUDO[†], Tatsuya KASHIWA[†a)], and Tadao OHTANI[††]

あらまし　FDTD法における位相誤差を縮小するために種々の高精度FDTD法が考案されている．それゆえ，実際の解析での適切な使い分けのためには各手法の特性を比較検討することが重要である．本論文では，高精度FDTD法である光速度補正FDTD法，FDTD(2,4)法，差分係数補正FDTD(2,4)法，Non-standard FDTD(NS-FDTD)法，及びFDTD(2,4)法を改良した新手法として提案する光速度補正FDTD(2,4)法を取り上げ，それらの数値分散特性及び安定条件について比較検討した．統一的比較のために，NS-FDTD法における帯域特性を示し得る数値分散式を新たに導出した．また，光速度補正FDTD法及び光速度補正FDTD(2,4)法における3次元数値分散式及び安定条件を新たに示した．その結果，狭帯域での簡便な解析には光速度補正FDTD法，広帯域な解析にはFDTD(2,4)法，狭帯域での高精度な解析にはNS-FDTD法がそれぞれ適することを明らかにした．

キーワード　光速度補正FDTD法，FDTD(2,4)法，Non-standard FDTD法，数値分散，安定条件

1. まえがき

近年の計算機の高速大容量化によりFDTD法[1],[2]を用いたアンテナ・伝搬問題等における電磁場の大規模数値解析が可能となってきている．しかしながら，波長に比べて大きな系のFDTD解析においては数値分散により角度特性をもつ大きな位相誤差が生じる．この位相誤差は波の伝搬に伴って蓄積するため，大規模数値解析上非常に大きな問題となる．

従来，この問題を克服するための高精度FDTD法としてFDTD (2,4) 法[3]～[5], Modified FDTD (2,4) (FDTD M(2,4))法[6],[7]及びNon-standard FDTD (NS-FDTD) 法[8]～[11]等が考案されている．また，光速度補正法[12]～[14]あるいは差分係数補正法等[2]を用いてFDTD法及びFDTD(2,4)法を更に高精度化した方法も考案されている．

一方，実際の解析にあたってはこれら種々の手法の特性を明確にする必要があり，各種高精度FDTD法について特性の比較検討を行うことが重要である．具体的には，各手法における特性を誤差論的に明確に示すことができる数値分散特性及び安定条件の比較が重要である．しかしながら，各手法について位相誤差の周波数特性に対応している数値分散特性及び安定条件の比較検討は行われていない．従来行われている位相誤差の2乗積分値[6]や単周波での位相誤差の角度特性[14]等による表現では実際の解析に必要な各周波数での位相誤差特性を明確に把握することは困難である．例えば2乗積分値では特定の方向に大きな誤差がある場合，その誤差が平均化されてしまい全体として見るとほとんど誤差がないように見えてしまう．各手法のもつ位相誤差の帯域特性，異方的伝搬特性及びその絶対量等を含めた位相誤差の総合的特性を簡便かつ明確に理解するためには数値的光速度の最大値及び最小値

† 北見工業大学，北見市
Kitami Institute of Technology, Kitami-shi, 090-8507 Japan
†† 三菱重工業株式会社，名古屋市
Mitsubishi Heavy Industries, Ltd., Nagoya-shi, 455-8515 Japan
a) E-mail : kashiwa@klab2.elec.kitami-it.ac.jp

NII-Electronic Library Service

The Institute of Electronics, Information and Communication Engineers

の周波数特性を示すことが最も有効である．しかしながら，これらの観点に立って比較検討された例はない．

本論文では，高精度FDTD法である光速度補正FDTD法，FDTD(2,4)法，光速度補正FDTD(2,4)法，差分係数補正FDTD(2,4)法，及びNS-FDTD法について数値分散特性及びその安定条件の比較検討を行った．このとき，異方度を含めた伝搬特性を明確に理解するために数値的光速度の最大値及び最小値の周波数特性を各手法について初めて示し，それらの特徴を明らかにした．次にこれらの特徴について各手法の比較検討を行った．また，この検討においては光速度補正FDTD法について3次元数値分散式及び安定条件を新たに示した．また，FDTD(2,4)法に対して簡単に位相補正を可能とする光速度補正法を導入した光速度補正FDTD(2,4)法を新たに提案した．更に，FDTD M(2,4)法を簡略化した差分係数補正FDTD(2,4)法における数値分散特性を示した．NS-FDTD法では従来位相誤差を最小にする補正周波数での位相誤差を求める式が示されていたが，ここでは周波数特性を示し得る数値分散式を新たに導出している．また，これらの数値分散式より得られる数値的光速度の周波数特性を求めることにより具体的な特性を示し，各手法の比較検討を行った．

2. 数値分散式及び安定条件

以下に，本論文において新たに導出，あるいは統一的記述で整理した各手法における位相誤差の周波数特性を表す式すなわち数値分散式，及び安定条件を示す．

2.1 光速度補正FDTD法 [14]

FDTD法は時間及び空間について2次の精度である．光速度補正FDTD法の数値分散特性は式(1)で表される．文献[14]では2次元であるが，本論文では3次元に拡張した式を示す．光速度補正法では$\Delta x, \Delta y, \Delta z$の部分にそれぞれ各座標軸方向に対する光速度補正比率$\nu_{rx}, \nu_{ry}, \nu_{rz}$が掛かる．

$$c_n^2 = c_0^4\left\{\frac{\nu_{rx}^2}{\Delta x^2}\sin^2\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right) + \frac{\nu_{ry}^2}{\Delta y^2}\sin^2\left(\frac{k_y\Delta y}{2}\right) + \frac{\nu_{rz}^2}{\Delta z^2}\sin^2\left(\frac{k_z\Delta z}{2}\right)\right\}\frac{\Delta t^2}{\sin^2\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)} \quad (1)$$

ただし，c_nは数値的光速度，c_0は物理的光速度，ωは角周波数，kは物理的波数である．なお本手法は補正周波数を中心に高精度化を行う手法である．$k_x = k\sin\theta\cos\phi$, $k_y = k\sin\theta\sin\phi$, $k_z = k\cos\theta$である．

本手法の安定条件は式(2)で表される．

$$\Delta t \leqq \frac{1}{c_0\sqrt{\frac{\nu_{rx}^2}{\Delta x^2} + \frac{\nu_{ry}^2}{\Delta y^2} + \frac{\nu_{rz}^2}{\Delta z^2}}} \quad (2)$$

ここで，$\nu_{rx} = \nu_{ry} = \nu_{rz} = 1$とすると，FDTD法の場合の式となる．

2.2 FDTD(2,4)法及び光速度補正FDTD(2,4)法

FDTD(2,4)法は時間について2次，空間について4次の精度である[4],[6]．光速度補正FDTD(2,4)法の差分式は光速度補正FDTD法と同様に光速度補正比率を導入したことによって差分式中の係数$\Delta t/\Delta\xi$ $(\xi = x, y, z)$が$\nu_{r\xi}\Delta t/\Delta\xi$ $(\xi = x, y, z)$に置き換わる．その結果，数値分散式においても同様に光速度補正比率が掛かる．光速度補正FDTD(2,4)法の数値分散特性は式(3)で表される．

$$c_n^2 = c_0^4\left[\frac{\nu_{rx}^2}{\Delta x^2}\left\{\frac{9}{8}\sin\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right) - \frac{1}{24}\sin\left(\frac{3k_x\Delta x}{2}\right)\right\}^2 + \frac{\nu_{ry}^2}{\Delta y^2}\left\{\frac{9}{8}\sin\left(\frac{k_y\Delta y}{2}\right) - \frac{1}{24}\sin\left(\frac{3k_y\Delta y}{2}\right)\right\}^2 + \frac{\nu_{rz}^2}{\Delta z^2}\left\{\frac{9}{8}\sin\left(\frac{k_z\Delta z}{2}\right) - \frac{1}{24}\sin\left(\frac{3k_z\Delta z}{2}\right)\right\}^2\right] \times \frac{\Delta t^2}{\sin^2\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)} \quad (3)$$

光速度補正FDTD(2,4)法の安定条件は式(4)で表される．

$$\Delta t \leqq \frac{6}{7c_0\sqrt{\frac{\nu_{rx}^2}{\Delta x^2} + \frac{\nu_{ry}^2}{\Delta y^2} + \frac{\nu_{rz}^2}{\Delta z^2}}} \quad (4)$$

ここで，各座標軸方向に対する光速度補正比率を$\nu_{rx} = \nu_{ry} = \nu_{rz} = 1$とするとFDTD(2,4)法の場合の式となる．

2.3 差分係数補正FDTD(2,4)法

差分係数補正FDTD(2,4)法はFDTD(2,4)法を拡張あるいはFDTD M(2,4)法を簡略化した手法と考えられる．ここでは，その説明のわかりやすさから本手法をFDTD M(2,4)法の差分係数の一部を省略した手法として説明を行う．

まず，FDTD M(2,4)法について説明する．FDTD M(2,4)法は時間について2次，空間について4次の精度である．ただし，FDTD M(2,4)法は，FDTD(2,4)法に新たに差分項を追加して補正周波数において位相誤差

NII-Electronic Library Service

The Institute of Electronics, Information and Communication Engineers

をより縮小するために考案されたものである．FDTD M(2,4)法の数値分散特性は式(5)で表される[7]．

$$
\begin{aligned}
c_n^2 = c_0^4\Bigg[\Bigg\{ & 144k_1^2\sin^2\Big(\frac{k_x\Delta x}{2}\Big)+16k_2^2\sin^2\Big(\frac{3k_x\Delta x}{2}\Big)\\
& +96k_1k_2\sin\Big(\frac{k_x\Delta x}{2}\Big)\sin\Big(\frac{3k_x\Delta x}{2}\Big)\\
& +k_3^2\sin^2\Big(\frac{3k_x\Delta x}{2}\Big)\Big\{\cos(k_y\Delta y)+\cos(k_z\Delta z)\Big\}\\
& +2\Big\{12k_1\sin\Big(\frac{k_x\Delta x}{2}\Big)+4k_2\sin\Big(\frac{3k_x\Delta x}{2}\Big)\Big\}\\
& \times k_3\sin\Big(\frac{k_x\Delta x}{2}\Big)\sin\Big(\frac{3k_x\Delta x}{2}\Big)\\
& \times\Big\{\cos(k_y\Delta y)+\cos(k_z\Delta z)\Big\}\Bigg\}\frac{1}{144\Delta x^2}+\cdots\Bigg]\\
& \times\frac{\Delta t^2}{\sin^2(\frac{\omega\Delta t}{2})} \qquad (5)
\end{aligned}
$$

ここで，k_1, k_2, k_3 は参照される各節点における重み係数である．なお，k_3 は位相誤差を更に縮小させるためFDTD M(2,4)法で新たに導入された重み係数である．ここで，$k_1 = 9/8, k_2 = 1/8, k_3 = 0$ とした場合FDTD(2,4)法の場合の式となる．

安定条件は式(6)で表される．

$$
\begin{aligned}
\Delta t \leqq & \frac{1}{c_0\sqrt{\frac{1}{\Delta x^2}+\frac{1}{\Delta y^2}+\frac{1}{\Delta z^2}}}\\
& \times\frac{1}{\sqrt{k_1^2+\frac{1}{9}k_2^2+\frac{2}{3}k_1k_2+\frac{\sqrt{2}}{144}k_3(24k_1+8k_2+k_3)}} \qquad (6)
\end{aligned}
$$

FDTD M(2,4)法においては2次元で実際の解析が行われている．しかし，3次元では定式化のみであり実際の解析には用いられていない．3次元では差分係数が三つ存在し，その最適値を求めることは2次元の場合に比べて格段に難しくなる．したがって，本論文ではFDTD M(2,4)法の特性については考慮しない．ここではFDTD M(2,4)法において $k_3 = 0$ とし k_1, k_2 に自由度をもたせ補正周波数における位相誤差を最小化させることを考える．本論文ではこの方法を差分係数補正FDTD(2,4)法と称しその特性を調べる．

2.4 NS-FDTD法

本手法は補正周波数を中心に高精度化を行う解析法である．また，時間及び空間について2次の精度を有している．従来，我々は本手法の補正周波数における位相誤差を示した[10]．本論文では補正周波数と使用周波数が異なる場合の位相誤差を表すため，新たな数値分散式を導出した．数値分散特性は式(7)で表される．

$$
\begin{aligned}
c_n^2 = c_0^4\Bigg[& \Big\{\alpha_{x1}(\omega_\alpha)+\alpha_{x2}(\omega_\alpha)\cos(k_y\Delta y)\cos(k_z\Delta z)\\
& +\frac{\alpha_{x3}(\omega_\alpha)}{2}\Big(\cos(k_y\Delta y)+\cos(k_z\Delta z)\Big)\Big\}\frac{\sin^2(\frac{k_x\Delta x}{2})}{S_{k_c}^2(\Delta x)}\\
& +\Big\{\alpha_{y1}(\omega_\alpha)+\alpha_{y2}(\omega_\alpha)\cos(k_z\Delta z)\cos(k_x\Delta x)\\
& +\frac{\alpha_{y3}(\omega_\alpha)}{2}\Big(\cos(k_z\Delta z)+\cos(k_x\Delta x)\Big)\Big\}\frac{\sin^2(\frac{k_y\Delta y}{2})}{S_{k_c}^2(\Delta y)}\\
& +\Big\{\alpha_{z1}(\omega_\alpha)+\alpha_{z2}(\omega_\alpha)\cos(k_x\Delta x)\cos(k_y\Delta y)\\
& +\frac{\alpha_{z3}(\omega_\alpha)}{2}\Big(\cos(k_x\Delta x)+\cos(k_y\Delta y)\Big)\Big\}\\
& \times\frac{\sin^2(\frac{k_z\Delta z}{2})}{S_{k_c}^2(\Delta z)}\Bigg]\frac{S_{\omega_c}^2(\Delta t)}{\sin^2(\frac{\omega\Delta t}{2})} \qquad (7)
\end{aligned}
$$

ここで，$\alpha_{\xi1}$, $\alpha_{\xi2}$ 及び $\alpha_{\xi3}$ は1階差分演算子[10],[11]に対する最適化パラメータである．なお，$\xi = x, y, z$ である．S_{k_c} 及び S_{ω_c} は修正関数であり，$S_a(\Delta) = 2\sin(a\Delta/2)/a$ である．ω_α 及び ω_c は差分演算子の重み係数 α 及び修正関数 S における角周波数の設定値である．$k_c = \omega_c/c_0$ であり，k 及び ω は使用周波数における物理的波数及び角周波数である．なお，式(7)の導出にあたっては文献[10]の式(A・1)～(A・3)において修正関数 S_k 及び S_ω をそれぞれ S_{k_c} 及び S_{ω_c} とすることにより求めた．$k_c = k$, $\omega_c = \omega$ とすると補正周波数における位相誤差を表す式となる[10]．

安定条件は式(8)で表される．

$$
S_{\omega_c}(\Delta t) \leqq \frac{1}{c_0\sqrt{\frac{1}{S_{k_c}^2(\Delta x)}+\frac{1}{S_{k_c}^2(\Delta y)}+\frac{1}{S_{k_c}^2(\Delta z)}}} \qquad (8)
$$

なお，立方格子に近い場合にはFDTD法に比べ大きな安定条件を得ることができる[10]．本手法は，三つの差分演算子を用いて数値的光速度の角度特性を回転楕円体(立方格子の場合は球型)とし，更に修正関数による光速度補正により角度特性をほぼ球形とすることで，極めて等方的な伝搬特性を得る方法である．また，修正関数により分散カーブが上下に移動する等，手法を構成する各部分が物理的に明確な意味をもっており，手法の特性が把握しやすい．

3. 結　　果

ここでは立方格子及び直方体格子の場合について数値分散特性を調べた．立方格子は手法の基本的特性を理解するために重要であり，直方体格子は実用的な特

NII-Electronic Library Service

The Institute of Electronics, Information and Communication Engineers

性を理解する上で重要である．直方体格子においてはいかなる格子においても定性的な特性は同様である．ここでは，$\Delta x : \Delta y : \Delta z = 1/20 : 1/15 : 1/10$ の軸比とした．また，Δt は各手法のとり得る最大離散時間間隔 Δt_{max} とした．なお，理論式の妥当性は数値シミュレーション結果との一致により確認している．

3.1 FDTD 法

まず，比較の基準としてFDTD法の特性について示す．図1に立方格子の場合におけるFDTD法の数値的光速度の最大値及び最小値の周波数特性を示す．図中では横軸を z 軸方向の波長分割数の逆数 $\Delta z/\lambda$ としている．最小値は軸方向，最大値は $\theta = 45°, \phi = 45°$ 方向である．また，$\Delta z/\lambda = 0.05, 0.10, 0.15, 0.20$ での位相誤差はそれぞれ $0.27, 1.10, 2.46, 4.37\%$ である．図2に直方体格子の場合についての特性を同様に示す．最小値は格子間隔が最も粗い方向である z 軸方向，最大値は $\theta = 68°, \phi = 37°$ 方向である．以上のようにFDTD法は高周波においてかなりの位相誤差を有する．

時間離散間隔 Δt を減少させるに従い，高周波域で図中の分散カーブが下に移動する．そのため，Δt を安定条件の上限 Δt_{max} としたとき最も精度が良い．

3.2 光速度補正FDTD法

光速度補正FDTD法の結果を以下に示す．光速度補正の方法については文献[14]に従った．図3に立方格子の場合における数値的光速度の最大値及び最小値の周波数特性を示す．図中では補正周波数の設定値を $\Delta z/\lambda_{opt} = 0.05, 0.10, 0.15, 0.20$ とした．λ_{opt} は補正周波数に対する波長である．補正周波数での位相誤差はそれぞれ $0.14, 0.55, 1.25, 2.23\%$ である．なお，図3では $\Delta z/\lambda = 0.20$ に対応する最大値はその位相誤差の大きさのため図の範囲外にある．図4に直方体格子の場合についての特性を同様に示す．位相誤差は立方格子，直方体格子いずれの場合も本手法のもつ異方性によりある値以下には縮小されない．

本手法は基本的にはFDTD法であるので安定条件については光速度補正比率 ν_r による影響があるものの実質的にFDTD法と同等である．

3.3 FDTD(2,4)法

図5に立方格子におけるFDTD(2,4)法の数値的光速度の最大値及び最小値の周波数特性を示す．$\Delta z/\lambda = 0.05, 0.10, 0.15, 0.20$ での位相誤差はそれぞれ $0.10, 0.40, 0.87, 1.50\%$ である．図6に直方体格子についての特性を同様に示す．数値的光速度の最小値は格子間隔の最も粗い z 軸方向の値である．最大値はおよ

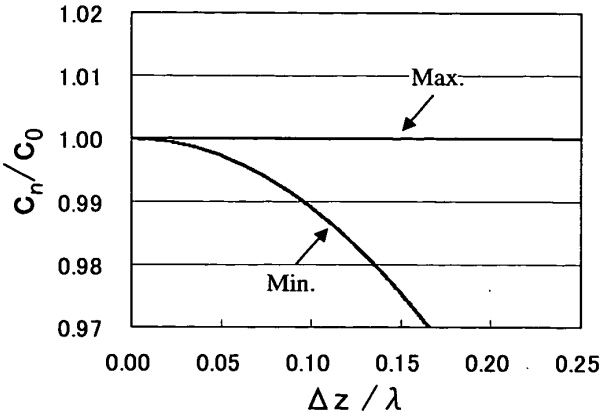

図1 FDTD法の数値的光速度 (立方格子)
Fig. 1 Numerical phase velocity of the FDTD method in the case of cubic grids.

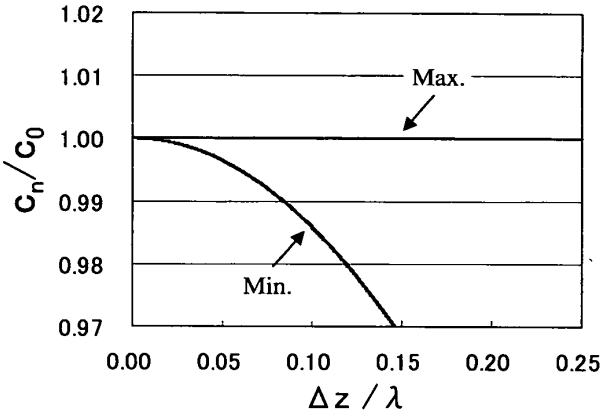

図2 FDTD法の数値的光速度 (直方体格子)
Fig. 2 Numerical phase velocity of the FDTD method in the case of rectangular grids.

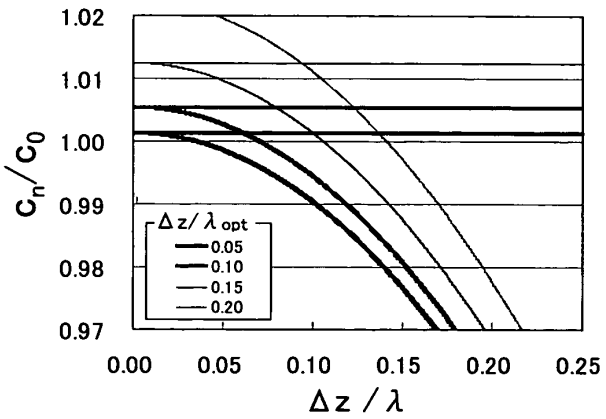

図3 光速度補正FDTD法の数値的光速度 (立方格子)
Fig. 3 Numerical phase velocity of the FDTD method in the case of cubic grids by modifying the speed of light.

NII-Electronic Library Service

The Institute of Electronics, Information and Communication Engineers

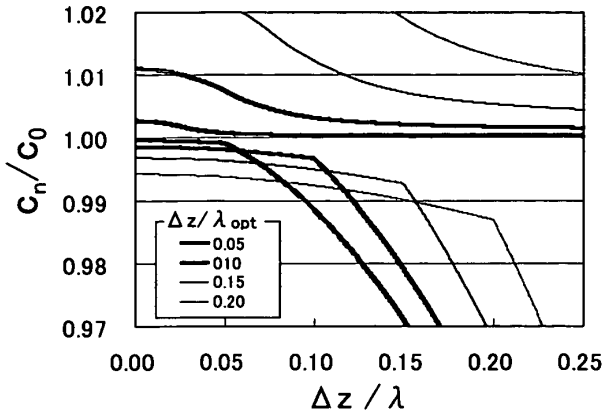

図 4　光速度補正 FDTD 法の数値的光速度 (直方体格子)
Fig. 4　Numerical phase velocity of the FDTD method in the case of rectangular grids by modifying the speed of light.

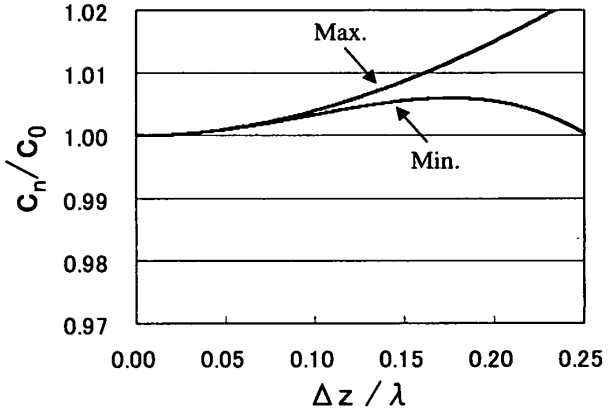

図 5　FDTD(2,4) 法の数値的光速度 (立方格子)
Fig. 5　Numerical phase velocity of the FDTD(2,4) method in the case of cubic grids.

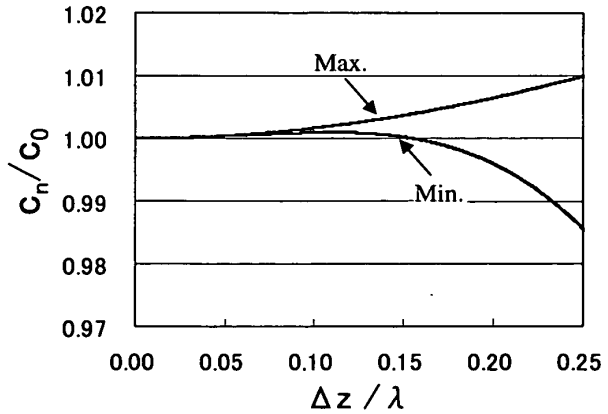

図 6　FDTD(2,4) 法の数値的光速度 (直方体格子)
Fig. 6　Numerical phase velocity of the FDTD(2,4) method in the case of rectangular grids.

そ $\theta = 68°, \phi = 37°$ 方向である．この手法では FDTD 法と異なり数値的光速度が物理的光速度を超えることがわかる．

この手法の安定条件は FDTD 法の 6/7 となる．Δt を小さくすると高い周波数域において分散カーブが下に移動する．なお，立方格子においては $\Delta t \fallingdotseq 0.3\Delta t_{max}$ のとき，$\Delta z/\lambda = 0$ 及び 0.10 で位相誤差がそれぞれ 0%及び約 0.03%と非常に位相誤差が小さく高精度広帯域な解析が可能となる．ただし，Δt が小さくなるため計算時間が増大する．

3.4　光速度補正 FDTD(2,4) 法

光速度補正 FDTD(2,4) 法の結果を以下に示す．図 7 に立方格子における数値的光速度の最大値及び最小値の周波数特性を示す．図中には補正周波数の設定値を $\Delta z/\lambda_{opt} = 0.05, 0.10, 0.15, 0.20$ とした場合の周波数特性を示している．ここで，補正周波数での位相誤差はそれぞれ 0.002, 0.03, 0.16, 0.47%である．図 8 に直方体格子の場合についての特性を同様に示す．立方格子，直方体格子いずれの場合においても位相誤差は補正周波数において縮小される．しかしながら，位相誤差の異方性によりある値以下には縮小されないことがわかる．

この手法は基本的には FDTD(2,4) 法であるので安定条件については光速度補正比率 ν_r による影響があるものの実質的に FDTD(2,4) 法と同等である．

3.5　差分係数補正 FDTD(2,4) 法

差分係数補正 FDTD(2,4) 法の結果を以下に示す．図 9 に立方格子の場合における数値的光速度の最大値及び最小値の周波数特性を示す．ここで，補正周波数の

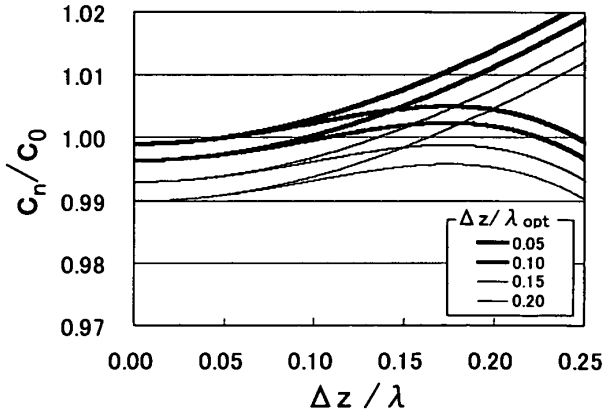

図 7　光速度補正 FDTD(2,4) 法の数値的光速度 (立方格子)
Fig. 7　Numerical phase velocity of the FDTD(2,4) method in the case of cubic grids by modifying the speed of light.

NII-Electronic Library Service

The Institute of Electronics, Information and Communication Engineers

設定値 $\Delta z/\lambda_{opt} = 0.05, 0.10, 0.15, 0.20$ での位相誤差はそれぞれ $10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 10^{-1}$%以下である．図10に直方体格子の場合における特性を同様に示す．補正周波数において光速度補正FDTD(2,4)法に比べ位相誤差をはるかに縮小することができる．しかし，空間分割幅が大きくなるとその縮小には限界があることが示されている．本手法はあくまで補正周波数で精度を向上させる手法である．そのため，高周波で最適化すると低周波域で位相誤差が大きくなる．

本手法は基本的にはFDTD(2,4)法であるので安定条件はFDTD法よりも小さい．本手法では，最適化係数 k_1, k_2 を求めて初めて安定条件が求まる．我々の行った範囲においては安定条件はFDTD(2,4)法より若干大きく，FDTD法に比べ約0.9倍の値であった．

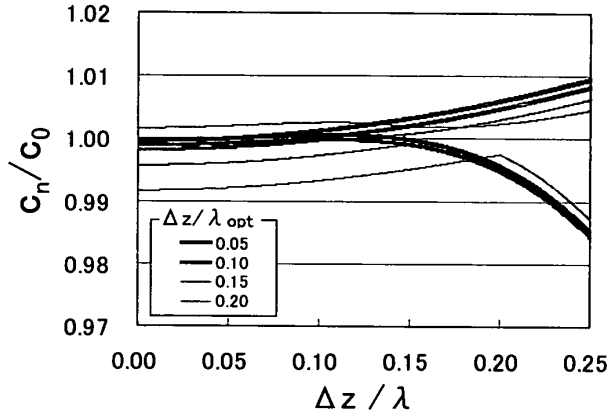

図8 光速度補正FDTD(2,4)法の数値的光速度 (直方体格子)
Fig. 8 Numerical phase velocity of the FDTD(2,4) method in the case of rectangular grids by modifying the speed of light.

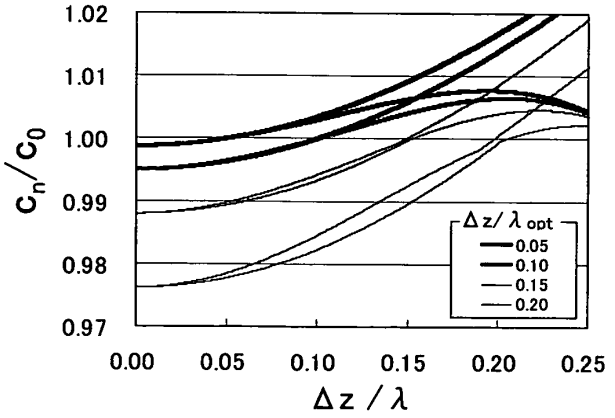

図9 差分係数補正FDTD(2,4)法の数値的光速度 (立方格子)
Fig. 9 Numerical phase velocity of the FDTD(2,4) method in the case of cubic grids by modifying the k_1 and k_2 parameters.

3.6 NS-FDTD法

図11に立方格子の場合のNS-FDTD法の数値的光速度の最大値及び最小値の周波数特性を示す．補正周波数をそれぞれ $\Delta z/\lambda_{opt} = 0.05, 0.10, 0.15, 0.20$ とした．補正周波数において位相誤差はそれぞれ $10^{-6}, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}$%以下である．なお，$\lambda_{opt}$ は $\omega_c = \omega_\alpha = \omega$ としたときの設定波長である．図12に直方体格子の場合について同様に示す．数値的光速度の最大値及び最小値は軸方向の値となる．

補正周波数における位相誤差はそれぞれ 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}%のオーダである．以上のように直方体格子の場合，立方格子のときと同様に補正周波数において位相誤差が極めて小さいが，立方格子の場合に比べ若干精度は劣ることがわかる．また，立方格子，直方体格子いずれの場合においても補正周波数ではほぼ等

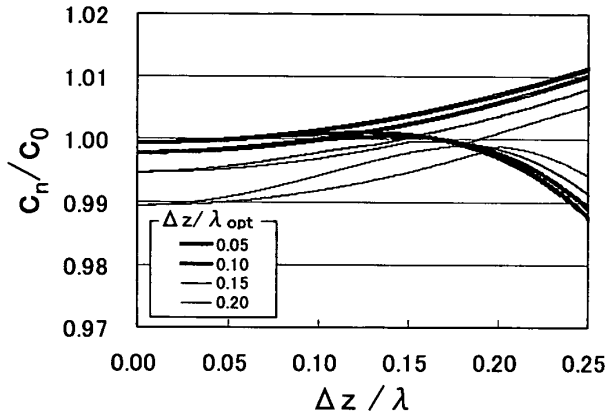

図10 差分係数補正FDTD(2,4)法の数値的光速度 (直方体格子)
Fig. 10 Numerical phase velocity of the FDTD(2,4) method in the case of rectangular grids by modifying the k_1 and k_2 parameters.

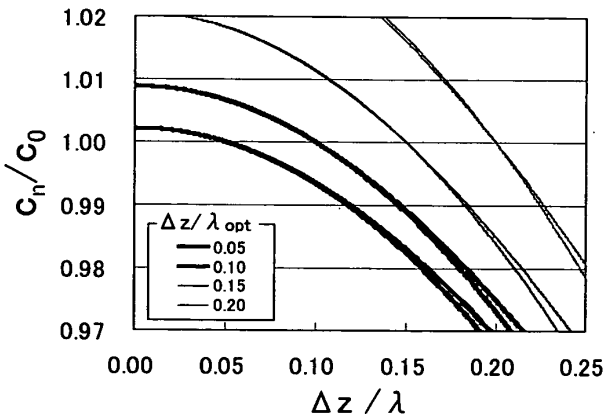

図11 NS-FDTD法の数値的光速度 (立方格子)
Fig. 11 Numerical phase velocity of the NS-FDTD method in the case of cubic grids.

NII-Electronic Library Service

The Institute of Electronics, Information and Communication Engineers

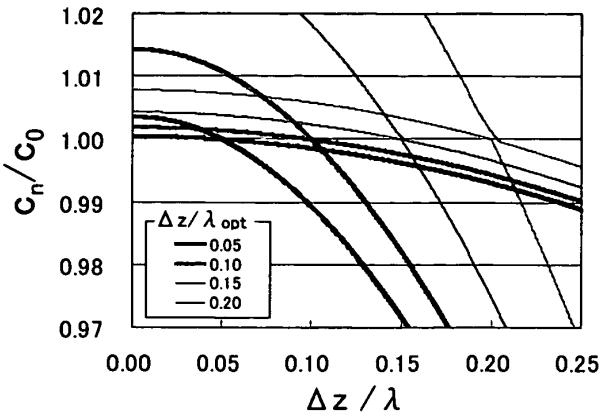

図 12　NS-FDTD 法の数値的光速度 (直方体格子)
Fig. 12　Numerical phase velocity of the NS-FDTD method in the case of rectangular grids.

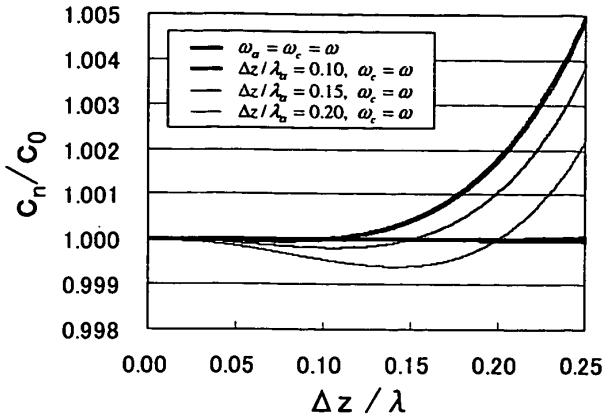

図 13　NS-FDTD 法 (立方格子) における各周波数で最適化された数値的光速度 ($\omega_\alpha = \omega_c = \omega$), 及び ω_α を固定した場合の数値的光速度 ($\omega_c = \omega$)
Fig. 13　Numerical phase velocity of the NS-FDTD method optimized at each frequency ($\omega_\alpha = \omega_c = \omega$), and that for fixed ω_α ($\omega_c = \omega$) in the case of cubic grids.

方的な伝搬特性となるが，位相誤差の小さい範囲が狭帯域であることが示されている．位相誤差は補正周波数 ($\omega_c = \omega_\alpha = \omega$) においては Δt に依存しないが，それ以外の周波数においては Δt が小さくなるに従い増大する．その結果，Δt を小さくすると周波数帯域は狭くなる．

本手法は補正周波数において極めて高精度な特性をもつ．この特性をより明確に示すため補正周波数における位相誤差特性を更に詳しく調べた．図13及び図14に立方格子及び直方体格子についてそれぞれの補正周波数における数値的光速度の最大値及び最小値を示す．ただし，通常の NS-FDTD 法における係数設定とした場合 ($\omega_\alpha = \omega_c = \omega$), 及び α を固定し修正関数 S のみを所望の周波数に設定した場合 ($\Delta z/\lambda_\alpha = 0.10, 0.15, 0.20$, $\omega_c = \omega$) について示す．ここで，$\lambda_\alpha = 2\pi c_0/\omega_\alpha$ である．なお，位相誤差が極めて小さいため図中では一部の線が $c_n/c_0 = 1.0$ の線に重なっている．本手法は通常の係数設定の場合では各補正周波数において極めて高精度であることが示されている．NS-FDTD 法は本来重み係数 α 及び修正関数 S の補正周波数である ω_α 及び ω_c を同一とする手法であるが，ω_α を固定した場合においても高い精度が維持されることが示されている．したがって，数値分散特性は重み係数 α による依存性が少なく主に修正関数に依存することが明らかとなった．NS-FDTD 法においては，$\Delta z/\lambda_\alpha = 0.15$ に固定したとき，ω_c を $\Delta z/\lambda_c = 0.10, 0.20$ とした場合の位相誤差は FDTD(2,4) 法の 1/10 程度である．また，NS-FDTD 法の安定条件については修正関数による影響はあるものの FDTD 法と同等以上の安定条件を有する．

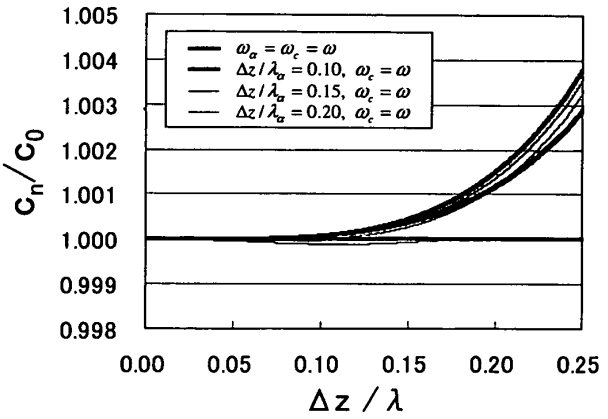

図 14　NS-FDTD 法 (直方体格子) における各周波数で最適化された数値的光速度 ($\omega_\alpha = \omega_c = \omega$) 及び ω_α を固定した場合の数値的光速度 ($\omega_c = \omega$)
Fig. 14　Numerical phase velocity of the NS-FDTD method optimized at each frequency ($\omega_\alpha = \omega_c = \omega$), and that for fixed ω_α ($\omega_c = \omega$) in the case of rectangular grids.

3.7　各手法の特性比較

3.1 から **3.6** より各手法の特徴は以下のように要約される．光速度補正 FDTD 法は簡便な手法であるが，補正周波数において位相誤差をある程度縮小することが可能である．しかし，補正周波数近傍において狭帯域である．FDTD(2,4) 法は FDTD 法及び光速度補正 FDTD 法よりも全周波数にわたって高精度かつ広帯域な解析が可能である．しかし，安定条件が FDTD 法の 6/7 であり，また，1 節点当りの計算量が増加する．光速度補正 FDTD(2,4) 法は，補正周波数において位相誤差をかなり縮小することが可能である．しかし，このとき低い周波数では FDTD(2,4) 法の場合より位相

NII-Electronic Library Service

The Institute of Electronics, Information and Communication Engineers

誤差が増大する．差分係数補正FDTD(2,4)法は光速度補正FDTD(2,4)法に比べ補正周波数において更に高精度な解析を行うことが可能である．また，補正周波数近傍において比較的広帯域である．しかしながら，低い周波数では光速度補正FDTD(2,4)法よりも位相誤差が増大する．また，k_1, k_2の最適値は数値的に求める必要がある．NS-FDTD法は，上記の各手法に比べ補正周波数における位相誤差が極めて小さく，また，安定条件がFDTD法と同等以上であるため大規模伝搬解析においては有利な点を有する．更に，最適化のためのパラメータが解析的に求められ，その物理的特性がわかりやすく，他の手法に比べ扱いやすい特徴をもっている．しかしながら，本論文で取り上げた手法の中で，1節点当りの計算量が最も多い．

以上より，全周波数にわたって広帯域な解析が必要な場合はFDTD(2,4)法が最も適していると考えられる．補正周波数において高精度化を行う場合は，補正周波数近傍での帯域特性も考慮すると以下のようにまとめられる．光速度補正FDTD法は狭帯域ではあるが最も簡便な手法である．光速度補正FDTD(2,4)法は狭帯域ではあるが簡便かつ比較的高精度な手法である．差分係数補正FDTD(2,4)法は比較的広帯域かつ高精度な手法である．NS-FDTD法は狭帯域ではあるが超高精度な手法である．なお，実際の解析においてはこれらの手法を目的に応じて使い分ける必要がある．

4. むすび

本論文では，大規模数値解析を目的とした各種高精度FDTD法について，数値分散式より与えられる数値的光速度の最大値及び最小値の周波数特性を初めて示した．次に各手法での位相誤差特性及び計算効率にかかわる安定条件の比較検討を行った．また，光速度補正FDTD法及び光速度補正FDTD(2,4)法について3次元数値分散式及び安定条件を求めた．更に，NS-FDTD法について数値分散式の導出を新たに行った．このとき，各種高精度FDTD法の比較が行えるように各手法において統一的記述の式表現を行い，各手法の数値分散特性及び安定条件を示した．その際，各手法における帯域特性及び補正周波数における位相誤差について論議を行った．

なお，FDTD M(2,4)法は全周波数にわたって広帯域かつ高精度な解析が行える可能性があるが，差分係数補正FDTD(2,4)法と同様に差分係数の導出に問題が残されている．特に，graded mesh等を用いた解析においては係数計算に相当の労力を要する．NS-FDTD法は修正関数のもつ周波数依存性を考慮することにより，煩雑な計算を要するがFDTD(2,4)法に比べ全周波数にわたって広帯域かつ超高精度な解析を行える可能性がある．解析手法が十分な帯域特性を有するか否かは個々の問題に依存するため，実際の解析においては本論文で論じた点を勘案し適切な手法を選択をする必要がある．

文　献

[1] K. S. Yee, "Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media," IEEE Trans. Antennas & Propag., vol.AP-14, no.3, pp.302–307, May 1966.

[2] A. Taflove, Computational Electrodynamics: The Finite — Difference Time-Domain Method, Artech House, 1995.

[3] P. G. Petropoulos, "Phase error control for FD-TD methods of second and fourth order accuracy," IEEE Trans. Antennas & Propag., vol.42, no.6, pp.859–862, June 1994.

[4] K. Lan, Y. Liu, and W. Lin, "A higher order (2,4) scheme for reducing dispersion in FDTD algorithm," IEEE Trans. Electromagn. Compat., vol.41, no.2, pp.160–165, May 1999.

[5] J. Zhang and Z. Chen, "Low-dispersive super high-order FDTD schemes," IEEE Antennas & Propagation Int. Symp. digest, pp.1510–1513, 2000.

[6] M. F. Hadi and M. Piket-May, "A modified FDTD (2,4) scheme for modeling electrically large structures with high-phase accuracy," IEEE Trans. Antennas & Propag., vol.45, no.2, pp.254–264, Feb. 1997.

[7] G. Haussmann and M. Piket-May, "FD-TD M24 dispersion and stability in three dimensions," Ann. Rev. Progress Appl. Computat. Electromagn., pp.82–89, March 1997.

[8] J. B. Cole, "A high-accuracy realization of the Yee algorithm using non-standard finite differences," IEEE Trans. Microwave Theory & Tech., vol.45, no.6, pp.991–996, June 1997.

[9] N. V. Kantartzis and T. D. Tsiboukis, "A higher-order FDTD technique for the implementation of enhanced dispersionless perfectly matched layers combined with efficient absorbing boundary conditions," IEEE Trans. Magn., vol.34, no.5, pp.2736–2739, Sept. 1998.

[10] 工藤祥典，柏　達也，大谷忠生，"3次元Non-Standard FDTD法における数値分散特性及び安定条件，" 信学論(C), vol.J84-C, no.5, pp.374–384, May 2001.

[11] 大谷忠生，工藤祥典，柏　達也，"Non-Standard FDTD法を用いた大型Cavityの散乱解析，" 信学論(C), vol.J84-C, no.4, pp.237–244, April 2001.

[12] J. W. Nehrbass, J. O. Jevtic, and R. Lee, "Reducing the phase error for finite-difference methods without increasing the order," IEEE Trans. Antennas & Propag., vol.46, no.8, pp.1194–1201, Aug. 1998.

NII-Electronic Library Service

The Institute of Electronics, Information and Communication Engineers

[13] J. S. Juntunen and T. D. Tsiboukis, "Reduction of numerical dispersion in FDTD method through artificial anisotropy," IEEE Trans. Microwave Theory & Tech., vol.48, no.4, pp.582–588, April 2000.

[14] 鈴木康介, 柏　達也, 細矢良雄, "FDTD解析における異方的光速度補正を用いた数値分散補正," 信学論(C), vol.J83-C, no.5, pp.389–396, May 2000.

（平成14年2月22日受付，5月20日再受付）

千藤　雄樹　（学生員）

平12北見工大・電気電子卒．同年同大大学院入学．以来，電磁界解析に従事．

田口　健治　（学生員）

平13北見工大・電気電子卒．同年同大大学院入学．以来，電磁界解析に従事．

工藤　祥典

平11北見工大・電気電子卒．平13同大大学院卒．現在，京セラ勤務．在学中，電磁界解析に従事．

柏　　達也　（正員）

昭59北大・工・電気卒．昭61同大大学院修士課程了．昭63同博士課程中退．同年同大・工・電気・助手．平8北見工大・電気電子・助教授．電磁界解析に従事．工博．平4 IEEE AP-S Tokyo Chapter Young Engineer Award．共著「Handbook of Microwave Technology」(Academic Press),「Antennas and Associated Systems for Mobile Satellite Communications」(Research Signpost)等．IEEE MTT査読委員．IEEE会員．

大谷　忠生

昭58豊橋技科大・工・電気電子卒．昭60同大大学院修士課程了．同年三菱重工業(株)入社，現在に至る．主に電磁波の散乱解析に従事．

NII-Electronic Library Service