

## ショートノート

### 損失媒質用3次元 Nonstandard FDTD 法の数値分散式及び安定条件

大谷 忠生<sup>†</sup> 柏 達也<sup>††</sup>(正員)

Numerical Dispersion Equation and Stability Condition of Three-Dimensional Nonstandard FDTD Method for Lossy Media

Tadao OHTANI<sup>†</sup>, Nonmember and  
Tatsuya KASHIWA<sup>††</sup>, Regular Member

<sup>†</sup> 三菱重工業株式会社, 名古屋市  
Mitsubishi Heavy Industries, Ltd., Nagoya-shi, 455-8515 Japan  
<sup>††</sup> 北見工業大学, 北見市  
Kitami Institute of Technology, Kitami-shi, 090-8507 Japan

あらまし 損失媒質用3次元 Nonstandard FDTD (NS-FDTD) 法の数値分散式及び安定条件を導出した。フェライト媒質を例に, 3次元 NS-FDTD 法は FDTD 法に比べ, 優れた等方的伝搬特性と大きな安定条件をもつことを示す。

キーワード NS-FDTD 法, 数値分散, 安定条件, 損失媒質

#### 1. まえがき

無損失媒質での FDTD 法の位相誤差を縮小した解法の一つに NS-FDTD 法 [1] がある。この NS-FDTD 法の損失媒質への拡張は文献 [2] で報告されている。そこでは, 損失媒質中の 2次元 NS-FDTD 差分式と, その伝搬特性及び安定条件が示されている。しかし, この手法の一般化のためには, 3次元での伝搬特性を明らかにすることが重要である。損失媒質中の 3次元 NS-FDTD 差分式は, 2次元の場合 [2] と同様の手順により容易に求められる。したがって, ここでは直接 3次元の数値分散式と安定条件を導出する。フェライト媒質を例に, NS-FDTD 法は FDTD 法に比べ, 優れた等方的伝搬特性と大きな安定条件をもつことを示す。

#### 2. 数値分散式と安定条件

まず, 3次元の数値分散式を示す。損失媒質中の 3次元 NS-FDTD 差分式に下記の平面波

$$\psi^n(x, y, z) = \psi_0 e^{j\omega n \Delta t - \hat{\gamma}_x x - \hat{\gamma}_y y - \hat{\gamma}_z z} \quad (1)$$

を代入する。ただし,  $\omega$  は角周波数,  $n$  は time step,  $\Delta t$  は時間分割幅とする。 $\hat{\gamma}_{x,y,z}$  は  $x, y$  及び  $z$  軸方向の複素伝搬定数である。これに文献 [3] の導出法を適用すれば, 次の数値分散式が得られる。

$$\left[ \mu_0 \mu_r \frac{2j \sin(\frac{\omega \Delta t}{2})}{S_\omega(\Delta t)} + \sigma_h \frac{2 \cos(\frac{\omega \Delta t}{2})}{\tilde{S}_\omega(\Delta t)} \right]$$

$$\left[ \epsilon_0 \epsilon_r \frac{2j \sin(\frac{\omega \Delta t}{2})}{S_\omega(\Delta t)} + \sigma_e \frac{2 \cos(\frac{\omega \Delta t}{2})}{\tilde{S}_\omega(\Delta t)} \right] - \sum_{\xi=x,y,z} \left( \frac{2 \sinh(\frac{\hat{\gamma}_\xi h_\xi}{2})}{S_\beta(h_\xi)} \right)^2 \hat{\rho}_\xi = 0 \quad (2)$$

ここで  $h_\xi$  は, 各  $x, y, z$  軸方向の空間分割幅である。また修正関数は,  $S_\omega(\Delta t) = 2 \sin(\frac{\omega \Delta t}{2})/\omega$ ,  $\tilde{S}_\omega(\Delta t) = 2 \cos(\frac{\omega \Delta t}{2})$ ,  $S_\beta(h_\xi) = 2 \sin(\frac{\beta_0 h_\xi}{2}) \cosh(\frac{\alpha_0 h_\xi}{2})/\beta_0$  とする。 $\alpha_0, \beta_0$  は理論値の減衰定数と位相定数である。 $\epsilon_0 \epsilon_r, \mu_0 \mu_r$  は媒質の誘電率と透磁率,  $\sigma_h, \sigma_e$  は磁気損及び導電率である。更に,  $\hat{\rho}_\xi$  は下式で与えられる。

$$\hat{\rho}_x = \alpha_{1x} + \alpha_{2x} \cosh(\hat{\gamma}_y h_y) \cosh(\hat{\gamma}_z h_z) + \frac{\alpha_{3x}}{2} [\cosh(\hat{\gamma}_y h_y) + \cosh(\hat{\gamma}_z h_z)] \quad (3a)$$

$$\hat{\rho}_y = \alpha_{1y} + \alpha_{2y} \cosh(\hat{\gamma}_x h_x) \cosh(\hat{\gamma}_z h_z) + \frac{\alpha_{3y}}{2} [\cosh(\hat{\gamma}_x h_x) + \cosh(\hat{\gamma}_z h_z)] \quad (3b)$$

$$\hat{\rho}_z = \alpha_{1z} + \alpha_{2z} \cosh(\hat{\gamma}_x h_x) \cosh(\hat{\gamma}_y h_y) + \frac{\alpha_{3z}}{2} [\cosh(\hat{\gamma}_x h_x) + \cosh(\hat{\gamma}_y h_y)] \quad (3c)$$

なお, 式 (3) 中の  $\alpha_{*\xi}$  値には空間分割幅  $h_\xi$  に対し, 等方的伝搬特性の得られる最適値を用いる [1]。

次に安定条件を示す。ここでは, NS-FDTD 差分式に下記の平面波

$$\psi^n(x, y, z) = Z_0^n e^{-j(\beta_x x + \beta_y y + \beta_z z)} \quad (4)$$

を入力し, その応答波が発散せず減衰伝搬すれば安定と考える。 $Z_0$  は振幅,  $\beta$  は位相定数である。文献 [3] による振幅増幅率  $g$  の導出法から, 最終的に 3次元 NS-FDTD 法の安定条件は下式となる。

$$|g_{\pm}| = \left| a_0 \pm \sqrt{a_0^2 - b_0} \right| \leq 1 \quad (5)$$

ここで  $a_0, b_0$  は

$$a_0 = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\frac{\mu_0 \mu_r}{S_\omega(\Delta t)} - \frac{\sigma_h}{\tilde{S}_\omega(\Delta t)}}{\frac{\mu_0 \mu_r}{S_\omega(\Delta t)} + \frac{\sigma_h}{\tilde{S}_\omega(\Delta t)}} \right) + \left( \frac{\frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{S_\omega(\Delta t)} - \frac{\sigma_e}{\tilde{S}_\omega(\Delta t)}}{\frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{S_\omega(\Delta t)} + \frac{\sigma_e}{\tilde{S}_\omega(\Delta t)}} \right) - \frac{1}{\eta_e \eta_h} \sum_{\xi=x,y,z} \left( \frac{2}{S_\beta(h_\xi)} \right)^2 \rho_\xi \right] \quad (6)$$

$$b_0 = \left( \frac{\frac{\mu_0 \mu_r}{S_\omega(\Delta t)} - \frac{\sigma_h}{\tilde{S}_\omega(\Delta t)}}{\frac{\mu_0 \mu_r}{S_\omega(\Delta t)} + \frac{\sigma_h}{\tilde{S}_\omega(\Delta t)}} \right) \cdot \left( \frac{\frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{S_\omega(\Delta t)} - \frac{\sigma_e}{\tilde{S}_\omega(\Delta t)}}{\frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{S_\omega(\Delta t)} + \frac{\sigma_e}{\tilde{S}_\omega(\Delta t)}} \right) \quad (7)$$

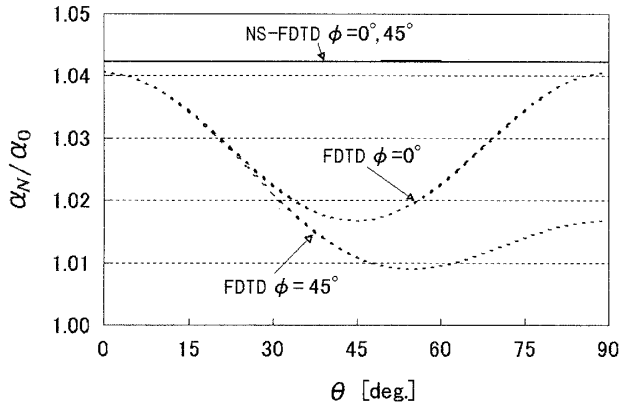


図1 フェライト中の減衰定数  
Fig. 1 Attenuation constant in Ferrite.

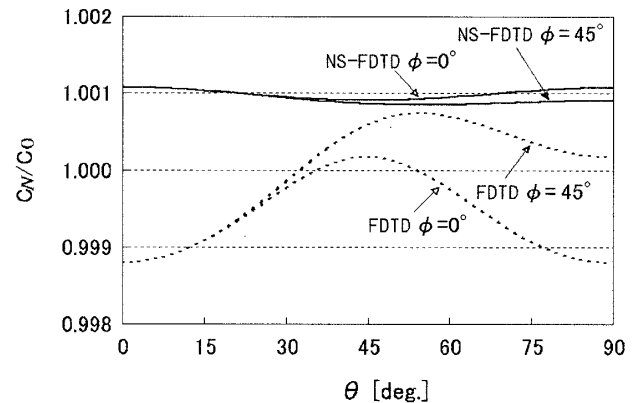


図2 フェライト中の位相速度  
Fig. 2 Phase velocity in Ferrite.

である。上式中の  $\eta_e, \eta_h$  は以下のものである。

$$\eta_e = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{S_\omega(\Delta t)} + \frac{\sigma_e}{\tilde{S}_\omega(\Delta t)} \quad (8a)$$

$$\eta_h = \frac{\mu_0 \mu_r}{S_\omega(\Delta t)} + \frac{\sigma_h}{\tilde{S}_\omega(\Delta t)} \quad (8b)$$

更に、2次元の場合と同様 [2]、式 (5) には  $|g_+| = |g_-|$  の条件を付加するものとする。また式 (5) にて、一般の直方体格子には  $\rho_\xi = 1$  を用いる。特別な場合として、立方体格子には  $\rho_\xi = \alpha_{1\xi} + \alpha_{2\xi} - \alpha_{3\xi}$  を用い、比率が  $(h_\xi : h_{\xi'}) \leq 1 \sim 2$  内の直方体格子には  $\rho_\xi = \alpha_\xi$  を用いる。なお、式 (2) と式 (5) で修正関数を用いず、 $\hat{\rho}_\xi, \rho_\xi = 1$  とすれば通常の FDTD 法の式となる。

### 3. 数値例

ここでは、本導出の式 (2) と式 (5) を用いてフェライト損失媒質での NS-FDTD 法の伝搬特性を示す。ただし、周波数は 900 MHz、フェライトの媒質定数は  $\hat{\epsilon}_r = 2.5 - j1.25$ 、 $\hat{\mu}_r = 1.6 - j0.8$  とする。空間分割は  $x, y, z$  軸同一の  $h = \lambda_{loss}/10$  とする立方体格子とする。  $\lambda_{loss}$  はフェライト損失媒質中の波長である。更に、 $\Delta t = h/(2\sqrt{2}C_p)$  とする。ここで  $C_p = c_0/\sqrt{\epsilon_r \mu_r}$ 、 $c_0$  は真空中の光速である。  $\epsilon_r, \mu_r$  は  $\hat{\epsilon}_r, \hat{\mu}_r$  の実部である。

図 1 は、数値分散式 (2) より算出した NS-FDTD 法の減衰定数  $\alpha_N$ 、図 2 が位相速度  $C_N$  である。ただし、理論値の  $\alpha_0$  と  $C_0$  で規格化してある。  $\theta, \phi$  は極座標系における角度変数である。  $\theta$  は  $z$  軸からの角度、  $\phi$  は  $x$  軸からの角度である。実線が NS-FDTD 法、破線が FDTD 法の結果である。図には  $\phi = 0^\circ$  と  $45^\circ$  の代表特性を示す。これより、本フェライト媒質における立方体格子での NS-FDTD 法の伝搬誤差は FDTD 法と同程度である。しかし、異方性は小さくより等方的で

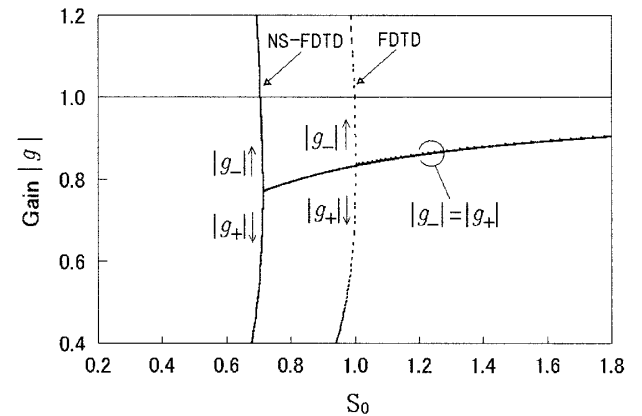


図3 フェライト中の振幅増幅率  
Fig. 3 Amplitude gain in Ferrite.

あることがわかる。

図 3 は式 (5) から求めた振幅増幅率  $|g|$  特性である。横軸は  $S_0 = h/(\sqrt{3}C_p \Delta t)$  である。図 3 より NS-FDTD 法は、 $|g_+| = |g_-| \leq 1$  となる  $S_0$  値が FDTD 法に比べ小さく、より大きな安定条件をもつことがわかる。

### 4. むすび

本論文では、損失媒質における NS-FDTD 法の 3次元数値分散式と安定条件を導出した。これより、本フェライト媒質例において 2次元と同様、NS-FDTD 法の伝搬誤差は FDTD 法と同程度である。しかし、立方体格子での異方性は極めて小さく、より大きな安定条件をもつことがわかった。今後は、損失媒質における NS-FDTD 法の高精度化を検討する予定である。

謝辞 TeX に関する有益な御助言を頂いた鶴岡工業高等専門学校の渡部誠二助手に感謝致します。

### 文 献

- [1] J.B.Cole, "A high-accuracy realization of the Yee algorithm using non-standard finite differences," IEEE Trans.

レ タ ー

---

Microw. Theory Tech., vol.45, no.6, pp.991-996, June 1997.

- [2] 大谷忠生, 千藤雄樹, 柏 達也, “損失媒質中の Non-Standard FDTD 法,” 信学論 (C), vol.J85-C, no.10, pp.889-897, Oct. 2002.

- [3] K. Kunz and R. J. Luebbers, Finite Difference Time Domain Method for Electrimagnetics, CRC Press, Boca Raton, 1993.

(平成 14 年 10 月 22 日受付, 12 月 6 日再受付)

---