ショートノート

Non-Standard FDTD 法における磁界の位相誤差について

千藤　雄樹[†]（学生員）　　工藤　祥典[†]（学生員）
柏　　達也[†a)]（正員）　　大谷　忠生[††]

On the Phase Error of Magnetic Fields in the Non-standard FDTD Method

Yuuki SENDO[†], Hironori KUDO[†], *Student Members*,
Tatsuya KASHIWA[† a)], *Regular Member*, and
Tadao OHTANI[††], *Nonmember*

† 北見工業大学，北見市
Kitami Institute of Technology, Kitami-shi, 090-8507 Japan
†† 三菱重工業株式会社，名古屋市
Mitsubishi Heavy Industries, Ltd., Nagoya-shi, 455-8515 Japan
a) E-mail : kashiwa@klab2.elec.kitami-it.ac.jp

あらまし　本論文では non-standard FDTD 法における磁界成分の位相誤差について調べた．その結果，磁界の位相誤差は電界の位相誤差と同等であり，FDTD 法に比べ遙かに高精度であることが示された．

キーワード　non-standard FDTD 法，FDTD 法，数値分散，位相誤差，双対性

1. ま え が き

波長に比べて大きな系の FDTD 解析においては数値分散により大きな位相誤差が生じ，解析が困難となる．この問題に対して種々の対策法が考案されている．その中の一つとして Cole により所望の周波数において位相誤差を縮小できる non-standard FDTD(NS-FDTD) 法 [1]～[7] が考案された．本手法は電界に関する差分式と磁界に関する差分式においては差分演算子が異なる．FDTD 法とは異なりマクスウェル方程式を直接用いているわけではなく，電界のスカラ波動方程式をもとに導出している．そのため，電界については正しく計算できるが，磁界に関しては必ずしも正確に求められているという保証はない．したがって，磁界を求める場合は，1) 電界を求める場合と計算順序を逆にするか，2) 電界の回転から求める必要があるとされている [1], [2]．しかしながら，遠方界解析のように問題によっては電界，磁界双方の値を必要とする場合がある．また，NS-FDTD 法と FDTD 法を接続する場合にも，各領域で電界及び磁界が同等の精度で求められている必要がある．しかしながら，磁界成分の位相誤差特性は電界と磁界の差分演算子が異なるため電界成分と同じになる保証がなく，その特性は不明なままであった．そのため磁界成分の数値分散式を導出する必要がある．既に，我々は本手法における電界の数値分散特性を求めた [6]．また，本手法において磁界変数が波動方程式を満足し物理的に磁界を表していることも示した [7]．本論文では，磁界成分の数値分散式を導出し位相誤差特性について考察を行った．

2. NS-FDTD 法

ここでは，NS-FDTD 法について簡単に説明する．NS-FDTD 法の差分式を H_x 成分及び E_x 成分について次式に示す [5].

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{t}} H_x\left(x, y-\frac{\Delta y}{2}, z-\frac{\Delta z}{2}, t\right) \\
&\quad = -\frac{S_\omega(\Delta t)}{\mu}\left[\frac{\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{y}}^{(0)}}{S_k(\Delta y)} E_z\left(x, y-\frac{\Delta y}{2}, z-\frac{\Delta z}{2}, t\right)\right. \\
&\qquad \left. -\frac{\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{z}}^{(0)}}{S_k(\Delta z)} E_y\left(x, y-\frac{\Delta y}{2}, z-\frac{\Delta z}{2}, t\right)\right] \quad (1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{t}} E_x\left(x-\frac{\Delta x}{2}, y, z, t+\frac{\Delta t}{2}\right) \\
&\quad = \frac{S_\omega(\Delta t)}{\varepsilon}\left[\frac{\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{y}}^{(1)}}{S_k(\Delta y)} H_z\left(x-\frac{\Delta x}{2}, y, z, t+\frac{\Delta t}{2}\right)\right. \\
&\qquad \left. -\frac{\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{z}}^{(1)}}{S_k(\Delta z)} H_y\left(x-\frac{\Delta x}{2}, y, z, t+\frac{\Delta t}{2}\right)\right] \quad (2)
\end{aligned}
$$

なお，磁界及び電界の y, z 成分 H_y, H_z, E_y, E_z も同様である．また，$\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{t}}$ 及び $\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}$ は FDTD 法における時間及び空間差分演算子である．ただし，$\xi = x, y, z$ である．$\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{\xi}}^{(0)}$ は次式に示すとおりである．

$$
\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{\xi}}^{(0)} = \alpha_{\xi 1}\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{\xi}}^{(1)} + \alpha_{\xi 2}\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{\xi}}^{(2)} + \alpha_{\xi 3}\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{\xi}}^{(3)} \quad (3)
$$

ここで，$\alpha_{\xi 1}, \alpha_{\xi 2}$ 及び $\alpha_{\xi 3}$ は 1 階差分演算子 $\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}$, $\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{\xi}}^{(2)}$, $\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{\xi}}^{(3)}$ に対する最適化パラメータであり，$\alpha_{\xi 1} + \alpha_{\xi 2} + \alpha_{\xi 3} = 1$ である．なお，$\alpha_{\xi 1}, \alpha_{\xi 2}, \alpha_{\xi 3}$ の導出法は付録に示すとおりである．また，修正関数 $S_k(\Delta\xi)$, $S_\omega(\Delta t)$ を次式に示す．

$$
S_k(\Delta\xi) = \frac{2\sin(\frac{k\Delta\xi}{2})}{k} \quad (4)
$$

$$
S_\omega(\Delta t) = \frac{2\sin(\frac{\omega\Delta t}{2})}{\omega} \quad (5)
$$

本手法は FDTD 法で用いられる空間離散間隔 $\Delta\xi$ 及び時間離散間隔 Δt を修正関数 $S_k(\Delta\xi)$, $S_\omega(\Delta t)$ に置き換えている．本手法は電界に関する FD Laplacian [5] 及び修正関数を用いることにより，FDTD 法の欠点である位相誤差を縮小している．

3. 磁界に関する数値分散式の導出

磁界成分 H_x の差分式の両辺を時間微分し，電界成分 E_y, E_z の差分式を代入すると次式を得ることができる．

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{\boldsymbol{d}}_t^2}{c_0^2 S_\omega^2(\Delta t)} H_x^n(I,J,K) &= \frac{\tilde{\boldsymbol{d}}_y^{(0)}\tilde{\boldsymbol{d}}_y^{(1)}}{S_k^2(\Delta y)} H_x^n(I,J,K) \\ &+ \frac{\tilde{\boldsymbol{d}}_z^{(0)}\tilde{\boldsymbol{d}}_z^{(1)}}{S_k^2(\Delta z)} H_x^n(I,J,K) \\ &- \frac{\tilde{\boldsymbol{d}}_y^{(0)}\tilde{\boldsymbol{d}}_x^{(1)}}{S_k(\Delta y) S_k(\Delta x)} H_y^n(I,J,K) \\ &- \frac{\tilde{\boldsymbol{d}}_z^{(0)}\tilde{\boldsymbol{d}}_x^{(1)}}{S_k(\Delta z) S_k(\Delta x)} H_z^n(I,J,K) \end{aligned} \tag{6}$$

式 (6) に平面波の式 (7) を代入すると式 (8) が得られる．

$$\begin{aligned} H_\xi^n(I,J,K) &= H_{\xi 0} e^{-j\omega\Delta t} \\ &\quad \times e^{j(k_x I\Delta x + k_y J\Delta y + k_z K\Delta z)} \end{aligned} \tag{7}$$

ただし，$\xi = x, y, z$ である．

$$\begin{aligned} &H_{x0}\Biggl[\frac{\sin^2(\frac{\omega\Delta t}{2})}{c_0^2 S_\omega^2(\Delta t)} - \frac{\sin^2(\frac{k_y\Delta y}{2})}{S_k^2(\Delta y)} \\ &\quad \Bigl\{\alpha_{y1} + \alpha_{y2}\cos(k_z\Delta z)\cos(k_x\Delta x) \\ &\quad + \frac{\alpha_{y3}}{2}\Bigl(\cos(k_z\Delta z) + \cos(k_x\Delta x)\Bigr)\Bigr\} \\ &\quad - \frac{\sin^2(\frac{k_z\Delta z}{2})}{S_k^2(\Delta z)}\Bigl\{\alpha_{z1} + \alpha_{z2}\cos(k_x\Delta x)\cos(k_y\Delta y) \\ &\quad + \frac{\alpha_{z3}}{2}\Bigl(\cos(k_x\Delta x) + \cos(k_y\Delta y)\Bigr)\Bigr\}\Biggr] \\ &+ H_{y0}\Biggl[\frac{\sin(\frac{k_x\Delta x}{2})\sin(\frac{k_y\Delta y}{2})}{S_k(\Delta x) S_k(\Delta y)} \\ &\quad \Bigl\{\alpha_{y1} + \alpha_{y2}\cos(k_z\Delta z)\cos(k_x\Delta x) \\ &\quad + \frac{\alpha_{y3}}{2}(\cos(k_z\Delta z) + \cos(k_x\Delta x)\Bigr)\Bigr\}\Biggr] \\ &+ H_{z0}\Biggl[\frac{\sin(\frac{k_z\Delta z}{2})\sin(\frac{k_x\Delta x}{2})}{S_k(\Delta z) S_k(\Delta x)} \\ &\quad \Bigl\{\alpha_{z1} + \alpha_{z2}\cos(k_x\Delta x)\cos(k_y\Delta y) \\ &\quad + \frac{\alpha_{z3}}{2}\Bigl(\cos(k_x\Delta x) + \cos(k_y\Delta y)\Bigr)\Bigr\}\Biggr] = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

なお，磁界成分 H_y, H_z で構成される式も同様にして求められる．これら3式は文献 [6] 付録1(A-1) に示される電界に関する式と比較すると式の形は同型となるが係数が異なり同一ではない．ここで，上述の H_{x0}, H_{y0}, H_{z0} についての連立方程式を解くことにより以下に示す磁界の数値分散式が得られる．

$$\begin{aligned} c_n^2 = c_0^2 \Biggl[&\Bigl\{\alpha_{x1} + \alpha_{x2}\cos(k_y\Delta y)\cos(k_z\Delta z) + \frac{\alpha_{x3}}{2} \\ &\times\Bigl(\cos(k_y\Delta y) + \cos(k_z\Delta z)\Bigr)\Bigr\}\frac{\sin^2(\frac{k_x\Delta x}{2})}{\sin^2(\frac{k\Delta x}{2})} \\ &+\Bigl\{\alpha_{y1} + \alpha_{y2}\cos(k_z\Delta z)\cos(k_x\Delta x) + \frac{\alpha_{y3}}{2} \\ &\times\Bigl(\cos(k_z\Delta z) + \cos(k_x\Delta x)\Bigr)\Bigr\}\frac{\sin^2(\frac{k_y\Delta y}{2})}{\sin^2(\frac{k\Delta y}{2})} \\ &+\Bigl\{\alpha_{z1} + \alpha_{z2}\cos(k_x\Delta x)\cos(k_y\Delta y) + \frac{\alpha_{z3}}{2} \\ &\times\Bigl(\cos(k_x\Delta x) + \cos(k_y\Delta y)\Bigr)\Bigr\} \\ &\times\frac{\sin^2(\frac{k_z\Delta z}{2})}{\sin^2(\frac{k\Delta z}{2})}\Biggr] \end{aligned} \tag{9}$$

式 (8) においては電界と磁界に関する式は同一とはならないが最終的に得られる数値分散式 (9) は文献 [6] 付録1(A-4) に示される電界の数値分散式と同一となる．これにより電界の FD Laplacian をもとに導出された NS-FDTD 法においても電界と磁界の双対性が数値的に満たされ，磁界成分も FDTD 法に比べはるかに高精度に求められることが示された．

4. むすび

本論文ではこれまで知られていなかった NS-FDTD 法における磁界成分の数値分散式の導出を行った．その結果，磁界の数値分散式は電界の数値分散式と同一の式となり数値的な意味において電界と磁界の双対性が満たされていることが示された．電界の FD Laplacian をもとに導出された NS-FDTD 差分式においても磁界が FDTD 法に比べはるかに高精度に得られることを示した．磁界においても電界と同様高精度な解が得られていることが示されたため，磁界を求める場合においても計算手続きの順序の交換を行う必要がないことがわかった．また，従来，遠方界解析のように問題によっては電界，磁界双方の値を必要とする場合，電界を求める NS-FDTD 法において磁界は電界の回転から求めていたが [5]，その必要はなく直接磁界成分の値を用いることが可能であることを示した．

謝辞 日ごろよりお世話になる北見工大修士1年打矢匡氏に深謝致します．

文 献

[1] J. B. Cole, "A high-accuracy FDTD algorithm to solve microwave propagation and scattering problems on a coarse grid," IEEE Trans. Microwave Theory & Tech., vol.43, no.9, pp.2053–2058, Sept. 1995.

[2] J. B. Cole, "A high-accuracy realization of the Yee algorithm using non-standard finite differences," IEEE Trans. Microwave Theory & Tech., vol.45, no.6, pp.991–996, June 1997.

[3] N. V. Kantartzis and T. D. Tsiboukis, "A higher-order FDTD technique for the implementation of enhanced dispersionless perfectly matched layers combined with efficient absorbing boundary conditions," IEEE Trans. Magnetics, vol.34, no.5, pp.2736–2739, Sept. 1998.

[4] 工藤祥典, 柏 達也, 大谷忠生, "Non-Standard FDTD 法における数値分散特性及び安定条件について," 信学論 (C), vol.J83-C, no.12, pp.1076–1084, Dec. 2000.

[5] 大谷忠生, 工藤祥典, 柏 達也, "Non-Standard FDTD 法を用いた大型 Cavity の散乱解析," 信学論 (C), vol.J84-C, no.4, pp.237–244, April 2001.

[6] 工藤祥典, 柏 達也, 大谷忠生, "3次元Non-Standard FDTD法における数値分散特性及び安定条件," 信学論(C), vol.J84-C, no.5, pp.374–384, May 2001.

[7] 工藤祥典, 柏 達也, 大谷忠生, "Non-Standard FDTD 法における電界及び磁界の双対性について，" 信学論 (C), vol.J84-C, no.6, pp.524–526, June 2001.

付 録

最適化パラメータ $\alpha_{\xi 1}$, $\alpha_{\xi 2}$, $\alpha_{\xi 3}$ の導出

本論文で使用する1階空間差分演算子の最適化パラメータ $\alpha_{\xi 1}, \alpha_{\xi 2}, \alpha_{\xi 3}$ は以下の式で示される．

$$\begin{aligned}\alpha_{\xi 1} &= \eta_{\xi 1} + \frac{1}{3}\eta_{\xi 2} + \frac{1}{2}\eta_{\xi 3}\\ \alpha_{\xi 2} &= \frac{1}{3}\eta_{\xi 2}\\ \alpha_{\xi 3} &= \frac{1}{3}\eta_{\xi 2} + \frac{1}{2}\eta_{\xi 3}\end{aligned} \tag{A・1}$$

ここで，$\eta_{\xi 1}, \eta_{\xi 2}, \eta_{\xi 3}$ はFD Laplacian [5] の重み係数である．なお，最適な $\eta_{\xi 1}, \eta_{\xi 2}, \eta_{\xi 3}$ の値は以下の式で与えられる．

$$\begin{aligned}\eta_{\xi 1} &= \eta_{\xi 0}(1-\gamma_0) + (2\gamma_0 - 1)\\ \eta_{\xi 2} &= \eta_{\xi 0}(1-\gamma_0)\\ \eta_{\xi 3} &= 1 - (\eta_{\xi 1} + \eta_{\xi 2})\end{aligned} \tag{A・2}$$

ただし，γ_0 は次式で示される．

$$\gamma_0 = \frac{\cos k'_x \cos k'_y - \cos k'}{1 + \cos k'_x \cos k'_y - \cos k'_x - \cos k'_y} \tag{A・3}$$

$k'_x = k' \cos\theta_0$, $k'_y = k' \sin\theta_0$, $k' = k\Delta\xi$, $\theta_0 = 0.18203\pi$ [1] である．また，k は物理的な波数である．$\eta_{\xi 0}$ は次式で示される．

$$\eta_{\xi 0} = \frac{(2\gamma_0 - 1)D_1 + 2(1-\gamma_0)D_3 - (\cos k - 1)}{(\gamma_0 - 1)D_1 - (1-\gamma_0)D_2 + 2(1-\gamma_0)D_3} \tag{A・4}$$

ここで，D_1, D_2, D_3 は次式で示される．

$$\begin{aligned}D_1 &= \cos k'_x + \cos k'_y + \cos k'_z - 3\\ D_2 &= \cos k'_x \cos k'_y \cos k'_z - 1\\ D_3 &= \frac{1}{2}(\cos k'_x \cos k'_y + \cos k'_x \cos k'_z\\ &\quad + \cos k'_y \cos k'_z - 3)\end{aligned} \tag{A・5}$$

$k'_x = k' \sin\theta_1 \cos\phi_0$, $k'_y = k' \sin\theta_1 \sin\phi_0$, $k'_z = k' \cos\theta_1$ であり，$k' = k\Delta\xi$, $\theta_1 = \pi/4$, $\phi_0 \approx 0.11811\pi$ [1] である．また，k は物理的な波数である．

（平成12年3月15日受付，4月16日再受付）