Non-Standard FDTD法における電界及び磁界の双対性について

工藤　祥典† (学生員)　柏　達也†a) (正員)
大谷　忠生††

On the Duality of Electric Fields and Magnetic Fields in the Non-standard FDTD Method

Hironori KUDO†, *Student Member*,
Tatsuya KASHIWA†a), *Regular Member*, and
Tadao OHTANI††, *Nonmember*

† 北見工業大学，北見市
Kitami Institute of Technology, Kitami-shi, 090-8507 Japan
†† 三菱重工業株式会社，名古屋市
Mitsubishi Heavy Industries, Ltd., Nagoya-shi, 455-8515 Japan
a) E-mail : kashiwa@klab2.elec.kitami-it.ac.jp

あらまし　本論文ではnon-standard FDTD法における電界及び磁界の双対性について調べた．その結果，厳密な意味での双対性は満足していないが，磁界についても波動方程式を満足し，物理的な意味では磁界においても正確な解が得られていることが示された．

キーワード　non-standard FDTD法，FDTD法，位相誤差，双対性

1. まえがき

波長に比べて大きな系のFDTD解析においては数値分散により大きな位相誤差が生じ，解析が困難となる．この問題に対して種々の対策法が考案されている．その中の一つとしてColeにより所望の周波数において位相誤差を縮小できるNS-FDTD(non-standard FDTD)法[1]～[6]が考案された．本手法は電界に関する差分式と磁界に関する差分式においては差分演算子が異なる．形式的にはFDTD法と同様に見えるが，FDTD法とは異なりマクスウェル方程式を直接用いているわけではなく，電界のスカラ波動方程式をもとに導出している．そのため，電界については正しく計算できるが，磁界に関しては必ずしも正確に求められているという保証はない．したがって，電界を求める場合と磁界を求める場合とでは計算順序を変える必要があるとされている[1], [2]．しかしながら，遠方界解析のように問題によっては電界，磁界双方の値を必要とする場合があり，電界を求めるNS-FDTD法においても磁界変数が何を表しているのかを明確にする必要がある．そのため，磁界についての数値的特性を調べる必要がある．厳密には磁界における数値分散等の誤差論を展開する必要があるが，その前に磁界成分のもっている物理的な意味を明確にしておく必要がある．また，NS-FDTD法とFDTD法を接続する場合にも，各領域で電界及び磁界が同等の精度で求められている必要がある．見方を変えると，NS-FDTD法において磁界変数が物理的に磁界を表しているという保証が必要となってくる．

本論文では本手法における電界及び磁界の双対性について考察を行う．

2. NS-FDTD法

ここでは，NS-FDTD法について簡単に説明する．NS-FDTD法の差分式をH_x成分及びE_x成分について次式に示す．

$$\tilde{\boldsymbol{d}}_t H_x\left(x, y-\frac{\Delta y}{2}, z-\frac{\Delta z}{2}, t\right) = -\frac{S_\omega(\Delta t)}{\mu}\left[\frac{\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{y}}^{(0)}}{S_k(\Delta y)} E_z\left(x, y-\frac{\Delta y}{2}, z-\frac{\Delta z}{2}, t\right) - \frac{\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{z}}^{(0)}}{S_k(\Delta z)} E_y\left(x, y-\frac{\Delta y}{2}, z-\frac{\Delta z}{2}, t\right)\right] \quad (1)$$

$$\tilde{\boldsymbol{d}}_t E_x\left(x-\frac{\Delta x}{2}, y, z, t+\frac{\Delta t}{2}\right) = \frac{S_\omega(\Delta t)}{\varepsilon}\left[\frac{\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{y}}^{(1)}}{S_k(\Delta y)} H_z\left(x-\frac{\Delta x}{2}, y, z, t+\frac{\Delta t}{2}\right) - \frac{\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{z}}^{(1)}}{S_k(\Delta z)} H_y\left(x-\frac{\Delta x}{2}, y, z, t+\frac{\Delta t}{2}\right)\right] \quad (2)$$

なお，磁界及び電界のy, z成分H_y, H_z, E_y, E_zも同様である．また，$\tilde{\boldsymbol{d}}_t$及び$\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}$はFDTD法における時間及び空間差分演算子である．ただし，$\xi = x, y, z$である．

$\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{\xi}}^{(0)}$は図1に示す電界に関するFD Laplacianを分解して得られる1階差分演算子であり次式のように示される．

$$\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{\xi}}^{(0)} = \alpha_{\xi 1}\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{\xi}}^{(1)} + \alpha_{\xi 2}\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{\xi}}^{(2)} + \alpha_{\xi 3}\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{\xi}}^{(3)} \quad (3)$$

ここで，$\alpha_{\xi 1}$，$\alpha_{\xi 2}$及び$\alpha_{\xi 3}$は$\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}$，$\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{\xi}}^{(2)}$，$\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{\xi}}^{(3)}$に対する重み係数であり，$\alpha_{\xi 1} + \alpha_{\xi 2} + \alpha_{\xi 3} = 1$である．$\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}, \tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{\xi}}^{(2)}, \tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{\xi}}^{(3)}$については付録に示す．なお，$\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}, \tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{\xi}}^{(2)}, \tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{\xi}}^{(3)}$の$x$成分$\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{x}}^{(1)}, \tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{x}}^{(2)}, \tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{x}}^{(3)}$の節点の位置関係を図2に示す．

また，修正関数$S_k(\Delta\xi)$, $S_\omega(\Delta t)$を次式に示す．

$$S_k(\Delta\xi) = \frac{2\sin(\frac{k\Delta\xi}{2})}{k} \quad (4)$$

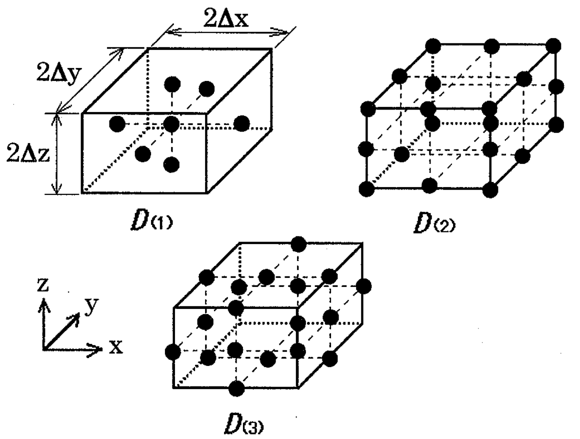

図1　電界に関する3種類の FD Laplacian $\boldsymbol{D}_{(1)}$,$\boldsymbol{D}_{(2)}$, $\boldsymbol{D}_{(3)}$ の節点配置

Fig. 1　Position of nodes in three types of FD Laplacians associated with electric fields, $\boldsymbol{D}_{(1)}$,$\boldsymbol{D}_{(2)}$ and $\boldsymbol{D}_{(3)}$.

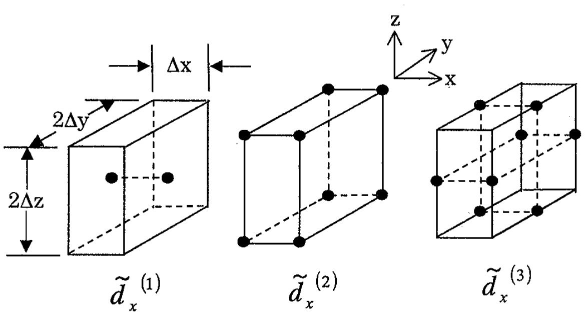

図2　1階空間差分演算子の節点配置

Fig. 2　Position of nodes of first order spatial difference operators.

$$S_\omega(\Delta t) = \frac{2\sin(\frac{\omega\Delta t}{2})}{\omega} \tag{5}$$

本手法はFDTD法で用いられる空間離散間隔 $\Delta\xi$ 及び時間離散間隔 Δt を修正関数 $S_k(\Delta\xi)$, $S_\omega(\Delta t)$ に置き換えている．

本手法は電界に関する FD Laplacian 及び修正関数を用いることにより，FDTD 法の欠点である位相誤差を縮小している．図2に示す電界の FD Laplacian $\boldsymbol{D}_{(1)}$, $\boldsymbol{D}_{(2)}$,$\boldsymbol{D}_{(3)}$ を1階差分演算子 $\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{\xi}}^{(0)}$ に分解し差分式を導出しているため，電界については解が正しく計算できる．しかしながら，磁界については解が正しく求められているという保証はない．したがって，本手法における磁界成分の数値的特性を把握する必要がある．厳密には磁界における数値分散等の誤差論を展開する必要があるが，その前に本手法における磁界成分が何を表しているかについて物理的な意味を明確にしておく必要がある．次章で本手法における磁界変数の物理的な意味について考察する．

3. 磁界に関する波動方程式の導出

ここでは，3次元 NS-FDTD 法の差分方程式のスカラ化を行う．まず，簡単のために修正関数は用いないものとして考える．磁界 x 成分 H_x の差分式の両辺を時間微分し，電界 y,z 成分 E_y,E_z の差分式を代入すると次式を得ることができる．

$$\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{t}}{}^2 H_x^n(I,J,K) = c_0^2\Delta t^2 \Bigg[-\frac{\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{y}}^{(0)}\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{x}}^{(1)}}{\Delta y\Delta x} H_y^n(I,J,K) + \frac{\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{y}}^{(0)}\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{y}}^{(1)}}{\Delta y^2} H_x^n(I,J,K) + \frac{\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{z}}^{(0)}\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{z}}^{(1)}}{\Delta z^2} H_x^n(I,J,K) - \frac{\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{z}}^{(0)}\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{x}}^{(1)}}{\Delta z\Delta x} H_z^n(I,J,K) \Bigg] \tag{6}$$

ただし，c_0 は物理的光速度を示す．ここで，式(6)の右辺第1項目及び第4項目を取り出すと式(7)のように表すことができる．

$$-\frac{\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{x}}^{(1)}}{\Delta x}\left[\frac{\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{y}}^{(0)}}{\Delta y} H_y^n(I,J,K) + \frac{\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{z}}^{(0)}}{\Delta z} H_z^n(I,J,K)\right] \tag{7}$$

ただし，差分演算子 $\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{y}}^{(0)}\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{x}}^{(1)} \to \tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{x}}^{(1)}\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{y}}^{(0)}$, $\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{z}}^{(0)}\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{x}}^{(1)} \to \tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{x}}^{(1)}\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{z}}^{(0)}$ と置き換えている（ここでは示さないが微分演算子 $\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{\zeta}}^{(0)}\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{\xi}}^{(1)} \leftrightarrow \tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{\zeta}}^{(0)}$ の互換性をもつことを確認している）．

ところで，磁界に関するガウスの定理より

$$div\boldsymbol{H} = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \tag{8}$$

が成立する．ここで，式(8)との類似性より

$$div\boldsymbol{H} = \frac{\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{x}}^{(0)} H_x}{\Delta x} + \frac{\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{y}}^{(0)} H_y}{\Delta y} + \frac{\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{z}}^{(0)} H_z}{\Delta z} = 0 \tag{9}$$

と仮定すると，式(9)より式(7)は次式のように表される．

$$-\frac{\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{x}}^{(1)}}{\Delta x}\left[\frac{\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{y}}^{(0)}}{\Delta y} H_y^n(I,J,K) + \frac{\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{z}}^{(0)}}{\Delta z} H_z^n(I,J,K)\right] = \frac{\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{x}}^{(1)}\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{x}}^{(0)}}{\Delta x^2} H_x^n(I,J,K) \tag{10}$$

式(6),(10)及び修正関数式(4),(5)を考慮すると最終的に磁界成分 H_x に関するスカラ形式で表される次式の差分方程式が得られる．

$$\tilde{d_t}^2 H_x^n(I,J,K) = c_0^2 S_\omega^2(\Delta t)\left[\frac{\tilde{d_x^{(1)}}\tilde{d_x^{(0)}}}{S_k^2(\Delta x)} H_x^n(I,J,K) + \frac{\tilde{d_y^{(1)}}\tilde{d_y^{(0)}}}{S_k^2(\Delta y)} H_x^n(I,J,K) + \frac{\tilde{d_z^{(1)}}\tilde{d_z^{(0)}}}{S_k^2(\Delta z)} H_x^n(I,J,K)\right] \quad (11)$$

なお，上式において差分演算子の互換性 $\tilde{d_\zeta^{(0)}}\tilde{d_\xi^{(1)}} \leftrightarrow \tilde{d_\xi^{(1)}}\tilde{d_\zeta^{(0)}}$ を用いている．式(11)において左辺は2階の時間差分演算を表し，右辺は2階の空間差分すなわち FD Laplacian(文献[2],式(28))を表している．以上，式(11)より本手法においては磁界についても電界同様差分形式において波動方程式を満足していることがわかる．

4. むすび

本論文では NS-FDTD 法における電界及び磁界の双対性について考察を行った．その結果，磁界についても電界同様波動方程式を満足していることを確認した．電界と磁界で差分式が異なるため厳密な意味での双対性は満足していないが，物理的な意味では磁界においても正確な解が得られていることが示された．したがって，磁界を求める場合においても計算手続きの順序の交換を行う必要がないことがわかった．また，従来，電界を求める NS-FDTD 法において磁界は電界の回転から求めていたが[6]，その必要はなく直接磁界成分の値を用いることが可能であることを示した．

NS-FDTD 法と FDTD 法を接続する場合，電界を求める NS-FDTD 法において磁界についても正確な解が得られていることにより，NS-FDTD/FDTD の接続が物理的な意味で可能となっていることを示した．実際，数値的シミュレーションにおいても接続面での反射が起こらないことを確認している[4]．

今後は磁界における数値分散等の誤差論について調べていく予定である．

謝辞　TEX 入力に御協力頂きました北見工大修士1年打矢匡氏に深く感謝致します．

文　献

[1] J. B. Cole, "A high-accuracy FDTD algorithm to solve microwave propagation and scattering problems on a coarse grid," IEEE Trans. Microwave Theory & Tech., vol.43, no.9, pp.2053–2058, Sept. 1995.

[2] J. B. Cole, "A high-accuracy realization of the Yee algorithm using non-standard finite differences," IEEE Trans. Microwave Theory & Tech., vol.45, no.6, pp.991–996, June 1997.

[3] N. V. Kantartzis and T. D. Tsiboukis, "A higher-order FDTD technique for the implementation of enhanced dispersionless perfectly matched layers combined with efficient absorbing boundary conditions," IEEE Trans. Magn., vol.34, no.5, pp.2736–2739, Sept. 1998.

[4] 工藤祥典, 柏　達也, 大谷忠生, "Non-Standard FDTD 法における数値分散特性及び安定条件について," 信学論(C), vol.J83-C, no.12, pp.1076–1084, Dec. 2000.

[5] 工藤祥典, 柏　達也, 大谷忠生, "3次元 Non-Standard FDTD 法における数値分散特性及び安定条件," 信学論(C), vol.J84-C, no.5, pp.374–384, May 2001.

[6] 大谷忠生, 工藤祥典, 柏　達也, "Non-Standard FDTD 法を用いた大型 Cavity の散乱解析," 信学論(C), vol.J84-C, no.4, pp.237–244, April 2001.

付　録

1階空間差分演算子 $\tilde{d_\xi^{(1)}}, \tilde{d_\xi^{(2)}}, \tilde{d_\xi^{(3)}}$

本論文で使用する1階空間差分演算子は関数 $f(x,y,z)$ に対し次の作用をするものである．

$$\tilde{d_x^{(1)}} f(x,y,z) = f(x+h_x/2,y,z) - f(x-h_x/2,y,z) \quad (\mathrm{A\cdot1})$$

$$\begin{aligned}\tilde{d_x^{(2)}} f(x,y,z) = \frac{1}{4}[&f(x+h_x/2,y+h_y,z+h_z) \\ &+f(x+h_x/2,y-h_y,z+h_z) \\ &+f(x+h_x/2,y+h_y,z-h_z) \\ &+f(x+h_x/2,y-h_y,z-h_z) \\ &-f(x-h_x/2,y+h_y,z+h_z) \\ &-f(x-h_x/2,y-h_y,z+h_z) \\ &-f(x-h_x/2,y+h_y,z-h_z) \\ &-f(x-h_x/2,y-h_y,z-h_z)]\end{aligned} \quad (\mathrm{A\cdot2})$$

$$\begin{aligned}\tilde{d_x^{(3)}} f(x,y,z) = \frac{1}{4}[&f(x+h_x/2,y+h_y,z)+f(x+h_x/2,y-h_y,z) \\ &+f(x+h_x/2,y,z+h_z)+f(x+h_x/2,y,z-h_z) \\ &-f(x-h_x/2,y+h_y,z)-f(x-h_x/2,y-h_y,z) \\ &-f(x-h_x/2,y,z+h_z)-f(x-h_x/2,y,z-h_z)]\end{aligned} \quad (\mathrm{A\cdot3})$$

以下，y,z 成分についても同様である．

（平成12年12月4日受付）