

## 論文

## 3次元Non-Standard FDTD法における数値分散特性及び安定条件

工藤 祥典<sup>†</sup>      柏 達也<sup>† a)</sup>      大谷 忠生<sup>††</sup>

## Numerical Dispersion and Stability Condition of the Three Dimensional Non-standard FDTD Method

Hironori KUDO<sup>†</sup>, Tatsuya KASHIWA<sup>† a)</sup>, and Tadao OHTANI<sup>††</sup>

あらまし FDTD解析における位相誤差を縮小するためにNS-FDTD法がColeによって考案された。しかし、Coleの論文では数値分散特性及び正確な安定条件が示されていなかった。また、等方格子のみでの定義しか行われていなかった。本論文では、3次元NS-FDTD法を非等方格子に拡張し数値分散特性及び安定条件を求めた。安定条件の解析より、本手法の安定条件はFDTD法よりも大きいことが示された。数値分散特性の解析より、等方格子、非等方格子いずれの場合においてもFDTD法に比べてはるかに高い精度をもつことを示した。

キーワード NS-FDTD法, FDTD法, 数値分散, 安定条件, 非等方格子

## 1. ま え が き

近年の計算機の高速度大容量化によりFDTD法[1], [2]を用いた光素子や大型空洞系及び室内電波伝搬等の電磁場の大規模計算が可能となってきている。特に、スーパーコンピュータにおいては並列処理技術の発展により数千CPU, 数TB(Tera Byte)での計算が可能となっている。しかしながら、上述のような波長に比べて大きな系のFDTD解析においては数値分散により大きな位相誤差が生じる。この位相誤差は波の伝搬に伴って蓄積するため、数値計算上非常に大きな問題となる。具体的には空間分割が $\lambda/10$ で約1.2[%]である。この場合、50波長の伝搬では理論に比べて位相が反転する。また、この誤差は伝搬方向に対し異方的性質を示す。従来、この問題に対して種々の対策法が考案されている[3]~[12]。その中の一つとしてColeにより所望の周波数において位相誤差を縮小できるNS-FDTD(Non-Standard FDTD)法[3], [4]が考案された。本手法は時間及び空間に対し2次の精度である。しかしながら、Coleの論文では手法の特性を理解する上で重要であ

る数値分散特性は示されておらず、更に安定条件は不正確であった。また、この論文では等方格子の場合のみしか考慮されておらず、解析できるモデルが限られていた。実際の解析においては非等方格子を用いることがより一般的あるいは実際的であり、したがってNS-FDTD法を非等方格子でも扱えるようにすることが必要である。Coleの論文における手法特性の把握の方法は通常の数値分散特性解析に用いられる手法とは異なり非常に複雑であり、また一般化するのは困難と考えられる。したがって、その手法ではNS-FDTD法の特性を理解することが難しいと思われる。そのため、NS-FDTD法において手法の特性を理解する上で通常の数値分散特性解析で使われる標準的なアプローチを用いることが、NS-FDTD法の特性理解の見通しをよくすると考えられる。

本論文では3次元NS-FDTD法における数値分散特性及び安定条件を求めた。また、等方格子で定義されていたColeの3次元NS-FDTD法を非等方格子でも用いることができるように定義式を一般化した。これらの特性についてFDTD法との比較も行った。その結果、NS-FDTD法は等方格子、非等方格子いずれの場合においてもFDTD法に比べて位相誤差はるかに小さいことが示された。安定条件式より最大時間離散間隔はFDTD法よりも大きくとれることが示された。実際に伝搬シミュレーションを行い、その数値的検討

<sup>†</sup> 北見工業大学, 北見市

Kitami Institute of Technology, Kitami-shi, 090-8507 Japan

<sup>††</sup> 三菱重工業株式会社, 名古屋市

Mitsubishi Heavy Industries, LTD., Nagoya-shi, 455-8515 Japan

a) E-mail: KASHIWA-Tatsuya@elec@king.cc.kitami-it.ac.jp

から本論文で示した理論の妥当性を確認している。

## 2. 3次元 NS-FDTD 式

ここでは、従来等方格子のみで定義されていた3次元 NS-FDTD 式を非等方格子においても用いることが可能なように拡張する。

NS-FDTD 法で用いられる空間差分演算子は位相誤差特性の異なる三つの演算子  $\tilde{d}_x^{(1)}$ ,  $\tilde{d}_x^{(2)}$  及び  $\tilde{d}_x^{(3)}$  を用いて定義される。ただし,  $\xi = x, y, z$  である。  $x$  軸方向に対する1階差分演算子  $\tilde{d}_x^{(1)}$ ,  $\tilde{d}_x^{(2)}$ , 及び  $\tilde{d}_x^{(3)}$  を次式に示す。

$$\tilde{d}_x^{(1)} f(x, y, z) = f\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) - f\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} 4\tilde{d}_x^{(2)} f(x, y, z) &= f\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \Delta y, z + \Delta z\right) \\ &+ f\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y - \Delta y, z + \Delta z\right) \\ &+ f\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \Delta y, z - \Delta z\right) \\ &+ f\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y - \Delta y, z - \Delta z\right) \\ &- f\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y + \Delta y, z + \Delta z\right) \\ &- f\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y - \Delta y, z + \Delta z\right) \\ &- f\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y + \Delta y, z - \Delta z\right) \\ &- f\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y - \Delta y, z - \Delta z\right) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} 4\tilde{d}_x^{(3)} f(x, y, z) &= f\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \Delta y, z\right) \\ &+ f\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y - \Delta y, z\right) + f\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z + \Delta z\right) \\ &+ f\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z - \Delta z\right) - f\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y + \Delta y, z\right) \\ &- f\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y - \Delta y, z\right) - f\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z + \Delta z\right) \\ &- f\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z - \Delta z\right) \end{aligned} \quad (3)$$

なお, 式(1),(2),(3)における節点の位置関係を図1に示す。また,  $\xi = y, z$  についても同様である。

次に, NS-FDTD 法は空間離散間隔  $\Delta\xi$  及び時間離散間隔  $\Delta t$  を式(4),(5)に示す数値分散修正関数  $s_k(\Delta\xi)$ ,  $s_\omega(\Delta t)$  に置き換えることにより [13], 単周波のみではあるが位相誤差を物理的光速度と一致させている。

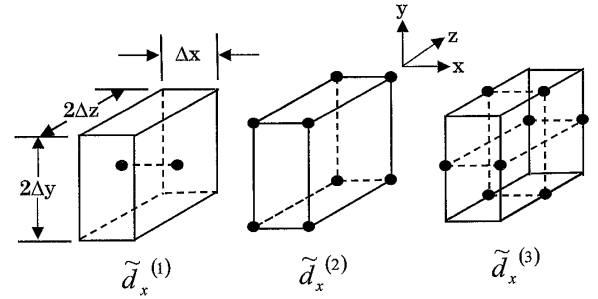


図1 1階空間差分演算子の節点配置

Fig.1 Position of nodes of first order spatial difference operators.

$$s_k(\Delta\xi) = \frac{2 \sin\left(\frac{k\Delta\xi}{2}\right)}{k} \quad (4)$$

$$s_\omega(\Delta t) = \frac{2 \sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)}{\omega} \quad (5)$$

以上説明した空間差分演算子  $\tilde{d}_x^{(1)}$ ,  $\tilde{d}_x^{(2)}$ ,  $\tilde{d}_x^{(3)}$ , 数値分散修正関数  $s_k(\Delta\xi)$ ,  $s_\omega(\Delta t)$ , 及び通常の FDTD 時間差分演算子  $\tilde{d}_t$  を用いて非等方格子まで拡張された NS-FDTD 式を次式のように定義する。

$$\begin{aligned} \tilde{d}_t H_x \left( x, y - \frac{\Delta y}{2}, z - \frac{\Delta z}{2}, t \right) &= -\frac{s_\omega(\Delta t)}{\mu} \left[ \frac{\tilde{d}_y^{(0)}}{s_k(\Delta y)} E_z \left( x, y - \frac{\Delta y}{2}, z - \frac{\Delta z}{2}, t \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\tilde{d}_z^{(0)}}{s_k(\Delta z)} E_y \left( x, y - \frac{\Delta y}{2}, z - \frac{\Delta z}{2}, t \right) \right] \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \tilde{d}_t H_y \left( x - \frac{\Delta x}{2}, y, z - \frac{\Delta z}{2}, t \right) &= -\frac{s_\omega(\Delta t)}{\mu} \left[ \frac{\tilde{d}_z^{(0)}}{s_k(\Delta z)} E_x \left( x - \frac{\Delta x}{2}, y, z - \frac{\Delta z}{2}, t \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\tilde{d}_x^{(0)}}{s_k(\Delta x)} E_z \left( x - \frac{\Delta x}{2}, y, z - \frac{\Delta z}{2}, t \right) \right] \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \tilde{d}_t H_z \left( x - \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, z, t \right) &= -\frac{s_\omega(\Delta t)}{\mu} \left[ \frac{\tilde{d}_x^{(0)}}{s_k(\Delta x)} E_y \left( x - \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, z, t \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\tilde{d}_y^{(0)}}{s_k(\Delta y)} E_x \left( x - \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, z, t \right) \right] \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \tilde{d}_t E_x \left( x - \frac{\Delta x}{2}, y, z, t + \frac{\Delta t}{2} \right) \\ = \frac{s_\omega(\Delta t)}{\varepsilon} \left[ \frac{\tilde{d}_y^{(1)}}{s_k(\Delta y)} H_z \left( x - \frac{\Delta x}{2}, y, z, t + \frac{\Delta t}{2} \right) \right. \\ \left. - \frac{\tilde{d}_z^{(1)}}{s_k(\Delta z)} H_y \left( x - \frac{\Delta x}{2}, y, z, t + \frac{\Delta t}{2} \right) \right] \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{d}_t E_y \left( x, y - \frac{\Delta y}{2}, z, t + \frac{\Delta t}{2} \right) \\ = \frac{s_\omega(\Delta t)}{\varepsilon} \left[ \frac{\tilde{d}_x^{(1)}}{s_k(\Delta x)} H_z \left( x, y - \frac{\Delta y}{2}, z, t + \frac{\Delta t}{2} \right) \right. \\ \left. - \frac{\tilde{d}_z^{(1)}}{s_k(\Delta z)} H_x \left( x, y - \frac{\Delta y}{2}, z, t + \frac{\Delta t}{2} \right) \right] \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{d}_t E_z \left( x, y, z - \frac{\Delta z}{2}, t + \frac{\Delta t}{2} \right) \\ = \frac{s_\omega(\Delta t)}{\varepsilon} \left[ \frac{\tilde{d}_x^{(1)}}{s_k(\Delta x)} H_y \left( x, y, z - \frac{\Delta z}{2}, t + \frac{\Delta t}{2} \right) \right. \\ \left. - \frac{\tilde{d}_y^{(1)}}{s_k(\Delta y)} H_x \left( x, y, z - \frac{\Delta z}{2}, t + \frac{\Delta t}{2} \right) \right] \quad (11) \end{aligned}$$

ただし、 $\tilde{d}_\xi^{(0)}$  は次式で表される。

$$\tilde{d}_\xi^{(0)} = \alpha_{\xi 1} \tilde{d}_\xi^{(1)} + \alpha_{\xi 2} \tilde{d}_\xi^{(2)} + \alpha_{\xi 3} \tilde{d}_\xi^{(3)} \quad (12)$$

ここで、 $\alpha_{\xi 1}$ 、 $\alpha_{\xi 2}$  及び  $\alpha_{\xi 3}$  は  $\tilde{d}_\xi^{(1)}$ 、 $\tilde{d}_\xi^{(2)}$ 、 $\tilde{d}_\xi^{(3)}$  に対する重み係数であり、 $\alpha_{\xi 1} + \alpha_{\xi 2} + \alpha_{\xi 3} = 1$  である。

### 3. 差分方程式のスカラー化

ベクトル形式の差分方程式では数値分散特性式及び安定条件式の導出が困難である。したがって、スカラー形式の差分方程式を導出する必要がある。ここでは、3次元NS-FDTD法の差分方程式のスカラー化を行う。まず、簡単のために修正関数は用いないものとして考える。式(9)の両辺を時間微分し式(7),(8)を代入すると次式を得ることができる。

$$\begin{aligned} \tilde{d}_t^2 E_x^n(I, J, K) = c_0^2 \Delta t^2 \left[ -\frac{\tilde{d}_y^{(1)} \tilde{d}_x^{(0)}}{\Delta y \Delta x} E_y^n(I, J, K) \right. \\ \left. + \frac{\tilde{d}_y^{(1)} \tilde{d}_y^{(0)}}{\Delta y^2} E_x^n(I, J, K) + \frac{\tilde{d}_z^{(1)} \tilde{d}_z^{(0)}}{\Delta z^2} E_x^n(I, J, K) \right. \\ \left. - \frac{\tilde{d}_z^{(1)} \tilde{d}_x^{(0)}}{\Delta z \Delta x} E_z^n(I, J, K) \right] \quad (13) \end{aligned}$$

ただし、 $c_0$  は物理的光速度を示す。ここで、式(13)の右辺第1項目及び第4項目について着目すると式(14)

のように表すことができる。

$$\begin{aligned} -\frac{\tilde{d}_x^{(0)}}{\Delta x} \left[ \frac{\tilde{d}_y^{(1)}}{\Delta y} E_y^n(I, J, K) + \frac{\tilde{d}_z^{(1)}}{\Delta z} E_z^n(I, J, K) \right] \\ = -\frac{\tilde{d}_x^{(0)}}{\Delta x} \left[ \frac{E_y^n(I, J + \frac{1}{2}, K) - E_y^n(I, J - \frac{1}{2}, K)}{\Delta y} \right. \\ \left. + \frac{E_z^n(I, J, K + \frac{1}{2}) - E_z^n(I, J, K - \frac{1}{2})}{\Delta z} \right] \quad (14) \end{aligned}$$

ただし、微分演算子  $\tilde{d}_y^{(1)} \tilde{d}_x^{(0)} \rightarrow \tilde{d}_x^{(0)} \tilde{d}_y^{(1)}$ 、 $\tilde{d}_z^{(1)} \tilde{d}_x^{(0)} \rightarrow \tilde{d}_x^{(0)} \tilde{d}_z^{(1)}$  と置き換えている(ここでは示さないが微分演算子  $\tilde{d}_y^{(1)} \tilde{d}_x^{(0)}$ 、 $\tilde{d}_z^{(1)} \tilde{d}_x^{(0)}$  が交換性をもつことを確認している)。

ところで、マイクロ波回路では一般的に電荷密度  $\rho = 0$  であるので、 $\rho = 0$  と仮定すると式(15)

$$\begin{aligned} \text{div} \mathbf{E} = \frac{E_x^n(I + \frac{1}{2}, J, K) - E_x^n(I - \frac{1}{2}, J, K)}{\Delta x} \\ + \frac{E_y^n(I, J + \frac{1}{2}, K) - E_y^n(I, J - \frac{1}{2}, K)}{\Delta y} \\ + \frac{E_z^n(I, J, K + \frac{1}{2}) - E_z^n(I, J, K - \frac{1}{2})}{\Delta z} \\ = 0 \quad (15) \end{aligned}$$

が成立する。式(14),(15)より式(16)が得られる。

$$\begin{aligned} -\frac{\tilde{d}_x^{(0)}}{\Delta x} \left[ \frac{\tilde{d}_y^{(1)}}{\Delta y} E_y^n(I, J, K) + \frac{\tilde{d}_z^{(1)}}{\Delta z} E_z^n(I, J, K) \right] \\ = \frac{\tilde{d}_x^{(0)}}{\Delta x} \times \frac{E_x^n(I + \frac{1}{2}, J, K) - E_x^n(I - \frac{1}{2}, J, K)}{\Delta x} \\ = \frac{\tilde{d}_x^{(0)} \tilde{d}_x^{(1)}}{\Delta x^2} E_x^n(I, J, K) \quad (16) \end{aligned}$$

式(13),(16)及び修正関数を考慮すると最終的に電界成分  $E_x$  に関するスカラー形式で表される式(17)が得られる。

$$\begin{aligned} \tilde{d}_t^2 E_x^n(I, J, K) = c_0^2 s_\omega^2(\Delta t) \left[ \frac{\tilde{d}_x^{(1)} \tilde{d}_x^{(0)}}{s_k^2(\Delta x)} E_x^n(I, J, K) \right. \\ \left. + \frac{\tilde{d}_y^{(1)} \tilde{d}_y^{(0)}}{s_k^2(\Delta y)} E_x^n(I, J, K) \right. \\ \left. + \frac{\tilde{d}_z^{(1)} \tilde{d}_z^{(0)}}{s_k^2(\Delta z)} E_x^n(I, J, K) \right] \quad (17) \end{aligned}$$

式(17)がNS-FDTD法の数値分散特性及び安定条件を求めるための基本式となる。

#### 4. 数値分散特性

ここでは、NS-FDTD 法の数値分散特性を解析的に求める。ここでは、差分法の特性解析に一般に用いられる平面波代入の方法を用いる。式 (17) に平面波を表す式 (18) を代入する。

$$E_x^n(I, J, K) = E_{x0} e^{j\omega\Delta t} \times e^{j(k_x I \Delta x + k_y J \Delta y + k_z K \Delta z)} \quad (18)$$

最終的に NS-FDTD 法の数値分散式は式 (19) となる。

$$\begin{aligned} c_n^2 = c_0^2 & \left[ \eta'_{x1} \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) + \eta'_{y1} \sin^2\left(\frac{k_y \Delta y}{2}\right) + \eta'_{z1} \sin^2\left(\frac{k_z \Delta z}{2}\right) \right. \\ & + \eta'_2 \left\{ \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x + k_y \Delta y + k_z \Delta z}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x - k_y \Delta y + k_z \Delta z}{2}\right) \right. \\ & + \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x + k_y \Delta y - k_z \Delta z}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x - k_y \Delta y - k_z \Delta z}{2}\right) \Big\} \\ & + \eta'_{x3} \left\{ \sin^2\left(\frac{k_y \Delta y + k_z \Delta z}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{k_y \Delta y - k_z \Delta z}{2}\right) \right\} \\ & + \eta'_{y3} \left\{ \sin^2\left(\frac{k_z \Delta z + k_x \Delta x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{k_z \Delta z - k_x \Delta x}{2}\right) \right\} \\ & + \eta'_{z3} \left\{ \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x + k_y \Delta y}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x - k_y \Delta y}{2}\right) \right\} \Big] \quad (19) \end{aligned}$$

ただし、 $c_n$  は数値的位相速度であり、係数  $\eta'_{x1}$ ,  $\eta'_{y1}$ ,  $\eta'_{z1}$ ,  $\eta'_2$ ,  $\eta'_{x3}$ ,  $\eta'_{y3}$ ,  $\eta'_{z3}$  は次式で表される。

$$\eta'_{x1} = \frac{12\eta_{x1} + 4\eta_{x2} + 6\eta_{x3}}{12 \sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)} - \frac{2\eta_{y2} + 3\eta_{y3}}{12 \sin^2\left(\frac{k\Delta y}{2}\right)} - \frac{2\eta_{z2} + 3\eta_{z3}}{12 \sin^2\left(\frac{k\Delta z}{2}\right)} \quad (20)$$

$$\eta'_{y1} = -\frac{2\eta_{x2} + 3\eta_{x3}}{12 \sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)} + \frac{12\eta_{y1} + 4\eta_{y2} + 6\eta_{y3}}{12 \sin^2\left(\frac{k\Delta y}{2}\right)} - \frac{2\eta_{z2} + 3\eta_{z3}}{12 \sin^2\left(\frac{k\Delta z}{2}\right)} \quad (21)$$

$$\eta'_{z1} = -\frac{2\eta_{x2} + 3\eta_{x3}}{12 \sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)} - \frac{2\eta_{y2} + 3\eta_{y3}}{12 \sin^2\left(\frac{k\Delta y}{2}\right)} + \frac{12\eta_{z1} + 4\eta_{z2} + 6\eta_{z3}}{12 \sin^2\left(\frac{k\Delta z}{2}\right)} \quad (22)$$

$$\eta'_2 = \frac{\eta_{x2}}{12 \sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)} + \frac{\eta_{y2}}{12 \sin^2\left(\frac{k\Delta y}{2}\right)} + \frac{\eta_{z2}}{12 \sin^2\left(\frac{k\Delta z}{2}\right)} \quad (23)$$

$$\eta'_{x3} = -\frac{4\eta_{x2}}{24 \sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)} + \frac{2\eta_{y2} + 3\eta_{y3}}{24 \sin^2\left(\frac{k\Delta y}{2}\right)} + \frac{2\eta_{z2} + 3\eta_{z3}}{24 \sin^2\left(\frac{k\Delta z}{2}\right)} \quad (24)$$

$$\eta'_{y3} = \frac{2\eta_{x2} + 3\eta_{x3}}{24 \sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)} - \frac{4\eta_{y2}}{24 \sin^2\left(\frac{k\Delta y}{2}\right)} + \frac{2\eta_{z2} + 3\eta_{z3}}{24 \sin^2\left(\frac{k\Delta z}{2}\right)} \quad (25)$$

$$\eta'_{z3} = \frac{2\eta_{x2} + 3\eta_{x3}}{24 \sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)} + \frac{2\eta_{y2} + 3\eta_{y3}}{24 \sin^2\left(\frac{k\Delta y}{2}\right)} - \frac{4\eta_{z2}}{24 \sin^2\left(\frac{k\Delta z}{2}\right)} \quad (26)$$

ここで  $k_x = k \sin \theta \cos \phi$ ,  $k_y = k \sin \theta \sin \phi$ ,  $k_z = k \cos \theta$ ,  $k$  は物理的な波数であり、 $\theta$ ,  $\phi$  は球座標の変数である。ただし、ここでは位相誤差特性が異なる三つの差分ラプラシアン [3], [4] の重み係数であり、物理的意味が明確な  $\eta_{\xi 1}$ ,  $\eta_{\xi 2}$  及び  $\eta_{\xi 3}$  を用いた。ただし、 $\eta_{\xi 1} = \alpha_{\xi 1} - \alpha_{\xi 3}$ ,  $\eta_{\xi 2} = 3\alpha_{\xi 2}$ ,  $\eta_{\xi 3} = 2(\alpha_{\xi 3} - \alpha_{\xi 2})$  である。なお、式 (19) において係数  $\eta_{\xi 1} = 1$ ,  $\eta_{\xi 2} = 0$ ,  $\eta_{\xi 3} = 0$  とすると、修正関数を考慮した FDTD 法の数値分散特性となる。FDTD 法における数値分散式は時間離散間隔  $\Delta t$  に関する項が存在し、 $\Delta t$  により数値分散特性が異なる。しかしながら、NS-FDTD 法においては  $\Delta t$  の項が存在しないため、数値分散特性は  $\Delta t$  に依存しない。したがって、NS-FDTD 法の数値分散特性は格子分割のみに依存する。

ここでは  $\eta_{\xi 1}$ ,  $\eta_{\xi 2}$  及び  $\eta_{\xi 3}$  を用いて数値分散式を求めたが、 $\alpha_{\xi 1}$ ,  $\alpha_{\xi 2}$  及び  $\alpha_{\xi 3}$  を用いて求めると付録 1. に示す簡便な式 (A・4) が得られる。このとき、式の導出法が異なる両者の数値解の比較により解析式の妥当性を示すことができる。実際、数値的解析を行った結果同様の結果が得られた。

## 5. 安定条件

ここでは、3次元NS-FDTD法の安定条件式を解析的に求める。ここでは、差分法の特性解析に一般に用いられる von Neumann の方法を用いている [14]。式 (17) に平面波を示す式 (27)

$$E_x^n(I, J, K) = Z^n e^{j(k_x I \Delta x + k_y J \Delta y + k_z K \Delta z)} \quad (27)$$

を代入すると、式 (A・5) を得ることができる。ただし、 $Z$  は平面波の振幅、 $n$  はタイムステップである。式 (A・5) に示される 2 次方程式  $Z^2 - 2b'Z + 1 = 0$  において判別式  $b'^2 - 1 \leq 0$  のとき、 $|Z| \leq 1$  となり、解は発散せず安定となる。つまり、安定条件は式 (28)

$$-1 \leq b' \leq 1 \quad (28)$$

が成立する  $\Delta t$  の範囲を求めることで得られる。したがって、 $b'$  の最大値  $b'_{max}$ 、及び最小値  $b'_{min}$  が式 (28) で表される範囲の中に収まる必要がある。ここで、 $b'_{max}$ 、 $b'_{min}$  は次式で表される。

$$b'_{max} = 1 \quad (29)$$

$$b'_{min} = 1 - 2c_0^2 s_\omega^2(\Delta t) \left[ \frac{1}{s_k^2(\Delta x)} + \frac{1}{s_k^2(\Delta y)} + \frac{1}{s_k^2(\Delta z)} \right] \quad (30)$$

式 (29)、(30) が式 (28) を満足するためには、 $b'_{min} \geq -1$  でなければならない。したがって、NS-FDTD 法の安定条件は式 (31) のようになる。

$$s_\omega(\Delta t) \leq \frac{1}{c_0 \sqrt{\frac{1}{s_k^2(\Delta x)} + \frac{1}{s_k^2(\Delta y)} + \frac{1}{s_k^2(\Delta z)}}} \quad (31)$$

式 (31) より、修正関数の部分を無視すると NS-FDTD 法においてはいかなる格子を用いても少なくとも FDTD 法と同等の最大時間離散間隔  $\Delta t_{max}$  をとれることがわかる。

以上説明した式の導出法は式 (17) において各項を  $\eta_{\xi 1}$ 、 $\eta_{\xi 2}$  及び  $\eta_{\xi 3}$  でまとめた式を用いた方法であった。しかしながら、各項を  $\tilde{d}_\xi^{(1)}$ 、 $\tilde{d}_\xi^{(2)}$ 、及び  $\tilde{d}_\xi^{(3)}$  でまとめると等方格子に近い場合には異なった結果を得ることができる。以下、この方法について説明する。式 (17) の各項を  $\tilde{d}_\xi^{(1)}$ 、 $\tilde{d}_\xi^{(2)}$ 、及び  $\tilde{d}_\xi^{(3)}$  でまとめ、その式に平面波を示す式 (27) を代入すると、式 (A・6) を得ることができる。式 (A・6) において、 $b'$  の最大値  $b'_{max}$ 、及び最小値  $b'_{min}$  を求める。ここで、格子が等方格子に近

い場合 ( $\eta'_{\xi 1} \geq 0$ ,  $\eta'_{\xi 3} \geq 0$  の条件を満足する格子) では  $b'_{max}$ 、 $b'_{min}$  は次式で表される。

$$b'_{max} = 1 \quad (32)$$

$$b'_{min} = 1 - c_0^2 s_\omega^2(\Delta t) \left[ \frac{6\eta_{x1} + 2\eta_{x2} + 3\eta_{x3}}{3s_k^2(\Delta x)} + \frac{6\eta_{y1} + 2\eta_{y2} + 3\eta_{y3}}{3s_k^2(\Delta y)} + \frac{6\eta_{z1} + 2\eta_{z2} + 3\eta_{z3}}{3s_k^2(\Delta z)} \right] \quad (33)$$

したがって、NS-FDTD 法の安定条件は式 (34) のようになる。

$$s_\omega(\Delta t) \leq \frac{1}{c_0} \left[ \frac{6\eta_{x1} + 2\eta_{x2} + 3\eta_{x3}}{6} \frac{1}{s_k^2(\Delta x)} + \frac{6\eta_{y1} + 2\eta_{y2} + 3\eta_{y3}}{6} \frac{1}{s_k^2(\Delta y)} + \frac{6\eta_{z1} + 2\eta_{z2} + 3\eta_{z3}}{6} \frac{1}{s_k^2(\Delta z)} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (34)$$

## 6. 結果

### 6.1 数値分散

ここでは、NS-FDTD 法の数値分散特性について調べる。図 2、図 3 に (10:10:10) 等方分割格子、及び (20:15:10) 非等方分割格子の数値分散特性をそれぞれ示す。ここで、( ) 内は  $x, y, z$  方向の波長分割数をそれぞれ示す。なお、 $\eta_{\xi 1}$ 、 $\eta_{\xi 2}$ 、 $\eta_{\xi 3}$  の値は文献 [3]、[4] に従って求め、それぞれの方向の分割数に対応した値を用いている。なお、図 4、図 5 に FDTD 法における

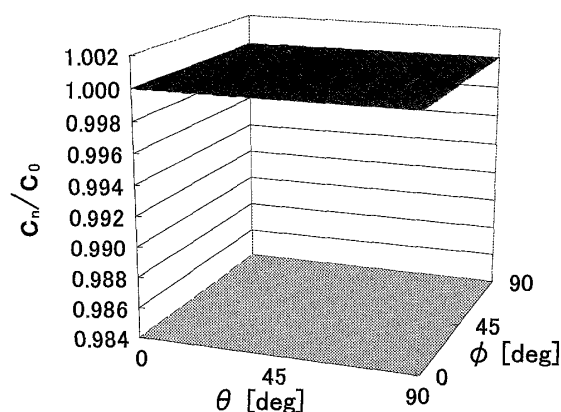


図2 NS-FDTD 法の数値分散特性 ((10:10:10) 分割,  $\eta_{\xi 1}=0.461$ ,  $\eta_{\xi 2}=0.137$ ,  $\eta_{\xi 3}=0.402$ )

Fig.2 Numerical dispersion of the NS-FDTD method ((10:10:10) division,  $\eta_{\xi 1}=0.461$ ,  $\eta_{\xi 2}=0.137$ ,  $\eta_{\xi 3}=0.402$ ).

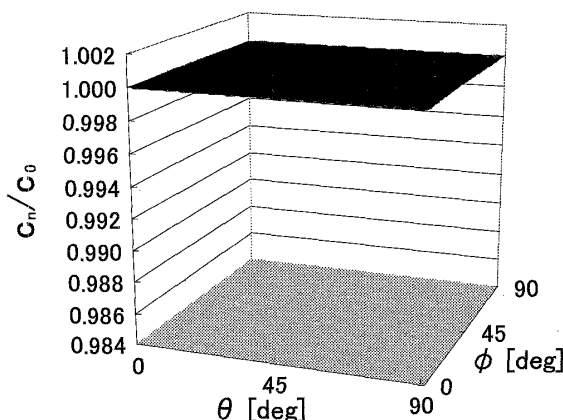


図3 NS-FDTD法の数値分散特性((20:15:10)分割,  $\eta_{x1}=0.465, \eta_{x2}=0.134, \eta_{x3}=0.401, \eta_{y1}=0.464, \eta_{y2}=0.135, \eta_{y3}=0.401, \eta_{z1}=0.461, \eta_{z2}=0.137, \eta_{z3}=0.402$ )

Fig. 3 Numerical dispersion of the NS-FDTD method ((20:15:10) division,  $\eta_{x1}=0.465, \eta_{x2}=0.134, \eta_{x3}=0.401, \eta_{y1}=0.464, \eta_{y2}=0.135, \eta_{y3}=0.401, \eta_{z1}=0.461, \eta_{z2}=0.137, \eta_{z3}=0.402$ ).

(10:10:10)分割格子, 及び(20:15:10)分割格子の数値分散特性をそれぞれ示す. なお, FDTD法の数値分散特性で用いた時間離散間隔 $\Delta t$ は $\Delta t = \Delta t_{max}$ としている. ただし,  $\Delta t_{max}$ はFDTD法におけるそれぞれの格子分割時のとり得る最大離散時間間隔である. 図2, 図4の比較により本手法は等方格子の場合, 角度にかかわらず誤差のオーダーが $10^{-5}[\%]$ 以下となっており位相誤差が極めて小さくなっている. また, 図3, 図5の比較により本手法は非等方格子の場合, 最大誤差が $7.3 \times 10^{-3}[\%]$ 以下と等方格子の場合に比べると誤差は大きいもののFDTD法と比べ誤差が非常に小さくかつ等方的であることがわかる. なお, 本手法における位相誤差の角度特性は従来のFDTD法とは異なり, 格子軸比が大きくなるに連れ最大位相誤差が大きくなる.

なお, 例えばFDTD法においてNS-FDTD法の(20:15:10)の場合と同様の位相誤差を実現するためには, 波長分割数 $\lambda/\Delta x, \lambda/\Delta y, \lambda/\Delta z$ はともに少なくとも100以上が必要となる. 逆にNS-FDTD法では(10:10:100)分割においても誤差のオーダーが $10^{-2}[\%]$ 以下とFDTD法の(10:10:n)分割( $n$ は10以上)の最大位相誤差に比べ1/100以下であり, FDTD法よりも位相誤差ははるかに小さいことがわかる. 以上のことにより, NS-FDTD法においては等方格子, 非等方格子いずれの場合においても, FDTD法と比べ位相速度誤差ははるかに小さく, かつ等方的であることが示さ

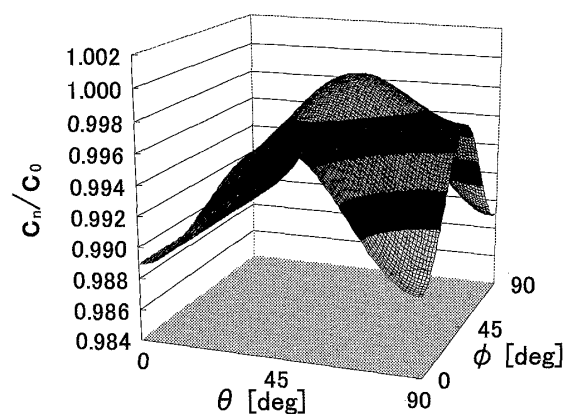


図4 FDTD法の数値分散特性((10:10:10)分割)  
Fig. 4 Numerical dispersion of the FDTD method ((10:10:10)division).

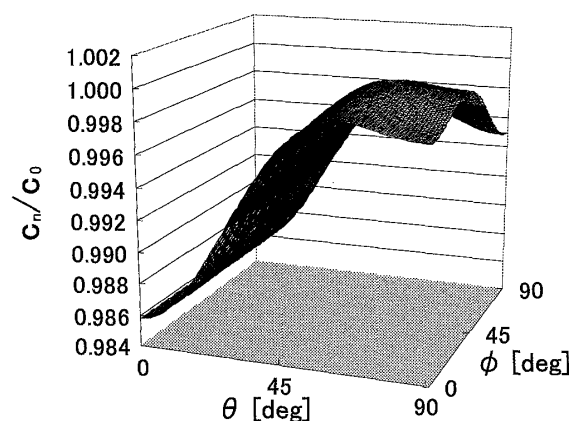


図5 FDTD法の数値分散特性((20:15:10)分割)  
Fig. 5 Numerical dispersion of the FDTD method ((20:15:10)division).

れた.

## 6.2 安定条件

ここでは, NS-FDTD法の安定条件について調べる. 式(31)に示されるNS-FDTD法の安定条件式は修正関数の影響を無視するとFDTD法の安定条件と一致する. 式(34)に示されるNS-FDTD法の安定条件式は $\eta_{\xi 1} = 1, \eta_{\xi 2} = 0$ 及び $\eta_{\xi 3} = 0$ の場合, 修正関数の影響を無視するとFDTD法の安定条件に対応する. また,  $\eta_{\xi 1} = 1, \eta_{\xi 2} = 0$ 及び $\eta_{\xi 3} = 0$ の場合を基準とすると $\eta_{\xi 1} = 0, \eta_{\xi 2} = 1, \eta_{\xi 3} = 0$ の場合, 及び $\eta_{\xi 1} = 0, \eta_{\xi 2} = 0, \eta_{\xi 3} = 1$ の場合はそれぞれの差分ラプラシアン対角線の長さが $\sqrt{3}$ 倍,  $\sqrt{2}$ 倍になっているので, 修正関数の項を無視すると安定条件も $\sqrt{3}$ 倍,  $\sqrt{2}$ 倍になっていることがわかる. 修正関数による補正の値はたかだか数%であるので, NS-FDTD法はFDTD法に比べ約1~ $\sqrt{3}$ 倍の範囲で $\Delta t$ を大きくとれること

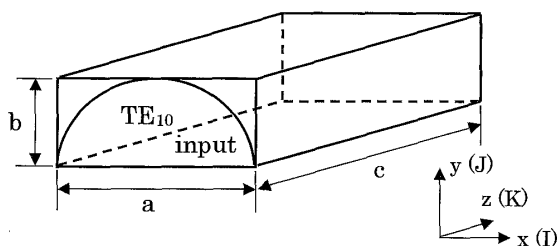


図6 導波管 ( $a = 1.45\lambda$ ,  $b = 0.73\lambda$ ,  $c = 100\lambda$ )  
Fig. 6 Waveguide ( $a = 1.45\lambda$ ,  $b = 0.73\lambda$ ,  $c = 100\lambda$ ).

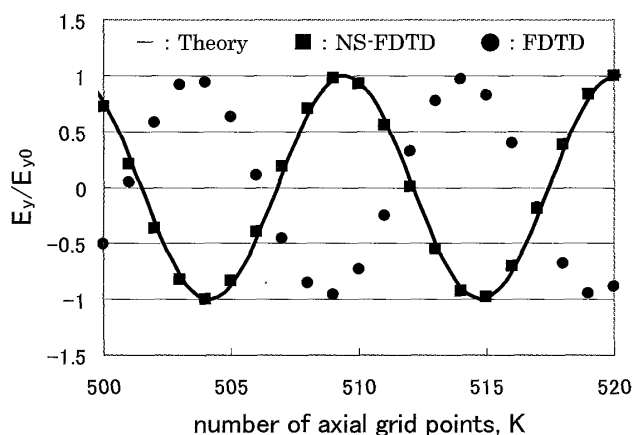


図7 導波管軸上の伝搬波形  
Fig. 7 Propagation waveforms on the waveguide axis.

がわかる。これらの条件は、Coleの安定条件式からは出てこないものである。

以上のことから、NS-FDTD法の安定条件はいかなる格子においても少なくともFDTD法と同様であることがわかる。特に等方格子に近い場合にはFDTD法よりも最大時間離散間隔 $\Delta t_{max}$ を大きくとれることがわかる。

### 6.3 数値的検証

ここでは解析的に求めた位相誤差特性及び安定条件を数値的に検証する。まず、図6に示す導波管モデルを用いて伝搬波のNS-FDTDシミュレーションを行った。入力図中の入力面において振幅 $E_{y0}$ の $TE_{10}$ モードの強制入力を行った。導波管終端からの反射波の影響をなくするために終端からの反射波が届かない時刻で観測を終えている。また、ここでは $\Delta x = \lambda/20$ ,  $\Delta y = \lambda/15$ ,  $\Delta z = \lambda/10$ の非等方格子を用いている。なお、 $\eta_{\xi 1}$ ,  $\eta_{\xi 2}$ ,  $\eta_{\xi 3}$ の値は図3で用いた値を用いている。このとき、本手法のとり得ることができる最大時間離散間隔は式(34)よりFDTD法の1.2倍である。したがって、本解析では、 $\Delta t = \Delta t_{max} \times 1.2$ とした。

ただし、 $\Delta t_{max}$ はFDTD法の最大時間離散間隔である。図7に伝搬波形を示す。また、FDTD解析値及び理論値も併せて示す。なお、FDTD解析の場合は $\Delta t = \Delta t_{max}$ とした。NS-FDTD解析値は理論値によく一致しており、位相誤差は $5.87 \times 10^{-3}[\%]$ であった。また、FDTD解析値は理論値と大きくずれており、位相誤差は1.25[%]である。これらの位相誤差は本論文で示した数値分散式より得られる結論と良好に一致している。以上のことから、解析的に求めた位相誤差特性及び安定条件の妥当性を確認することができた。

## 7. む す び

本論文では、3次元NS-FDTD法における数値分散特性及び安定条件を求めた。また、等方格子で定義されたColeの3次元NS-FDTD法を非等方格子でも解析できるように定義式を一般化した。NS-FDTD法の安定条件については、いかなる格子においても少なくともFDTD法と同様であることを示した。特に等方格子に近い場合にはFDTD法よりも最大時間離散間隔 $\Delta t_{max}$ を大きくとれることを示した。また、数値分散特性は等方格子、非等方格子にかかわらずFDTD法と比べ位相誤差が1/100以下と極めて小さくかつ等方的であることを示した。また、数値的検証により理論の妥当性を確認した。

従来、波長に比べて大きな系の解析には高周波近似法を用いるのが主流であった。しかしながら、近年の計算機の高速度化及び大容量化に伴い、3次元形状及び多媒質問題を容易に扱える差分系の手法でも十分解析可能となってきた。

現状の問題点は本手法が単周波のみでの位相速度補正法を用いている点である。実際にはある程度の帯域があるが[3], [4], 時間域解析の特徴を生かすためには更なる広帯域化を計る必要がある。

今後は本手法をFDTD法では解析が困難である大規模な室内電波伝搬解析等に適用していく予定である。

謝辞  $\text{\TeX}$ 入力に御協力頂き、またスーパーコンピュータについて御助言頂きました北見工大修士1年打矢匡氏に深く感謝致します。

## 文 献

- [1] K. S. Yee, "Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media," IEEE Trans. Antennas & Propag., vol.AP-14, no.3, pp.302-307, May 1966.
- [2] A. Taflov, Computational Electrodynamics: The Finite - Difference Time-Domain Method, Artech House, 1995.

- [3] J. B. Cole, "A high-accuracy FDTD algorithm to solve microwave propagation and scattering problems on a coarse grid," IEEE Trans. Microwave Theory & Tech., vol.43, no.9, pp.2053-2058, Sept. 1995.
- [4] J. B. Cole, "A high-accuracy realization of the Yee algorithm using non-standard finite differences," IEEE Trans. Microwave Theory & Tech., vol.45, no.6, pp.991-996, June 1997.
- [5] T. Hirono, W.W. Lui, K. Yokoyama, and S. Seki, "Stability and numerical dispersion of symplectic fourth-order time-domain schemes for optical field simulation," J. Lightwave Technol., vol.16, no.10, pp.1915-1920, Oct. 1998.
- [6] M. F. Hadi and M. Piket-May, "A modified FDTD (2,4) scheme for modeling electrically large structures with high-phase accuracy," IEEE Trans. Antennas & Propag., vol.45, no.2, pp.254-264, Feb. 1997.
- [7] K. Lan, Y. Liu, and W. Lin, "A higher order (2,4) scheme for reducing dispersion in FDTD algorithm," IEEE Trans. Electromagn. Compat., vol.41, no.2, pp.160-165, May 1999.
- [8] P. G. Petropoulos, "Phase error control for FD-TD methods of second and fourth order accuracy," IEEE Trans. Antennas & Propag., vol.42, no.6, pp.859-862, June 1994.
- [9] J. W. Nehrass, J. O. Jevtic, and R. Lee, "Reducing the phase error for finite-difference methods without increasing the order," IEEE Trans. Antennas & Propag., vol.46, no.8, pp.1194-1201, Aug. 1998.
- [10] 鈴木康介, 柏 達也, 細矢良雄, "FDTD解析における異方的光速補正を用いた数値分散補正," 信学論(C), vol.J83-C, no.5, pp.389-396, May 2000.
- [11] J. S. Juntunen and T. D. Tsiboukis, "Reduction of numerical dispersion in FDTD method through artificial anisotropy," IEEE Trans. Microwave Theory & Tech., vol.48, no.4, pp.582-588, April 2000.
- [12] 土木学会(編), 土木工学における数値解析, 基礎編, サイエンスライブラリー情報電算機シリーズ 27, サイエンス社, 1975.
- [13] R. E. Mickens, Nonstandard finite difference models of differential equations, World Scientific, Singapore, 1994.
- [14] R. D. Richtmyer and K. W. Morton, Difference Methods for Initial-Value Problems, John Wiley Sons, 1967.

## 付 録

### 1. 簡便な数値分散式の導出

式(9),(10),(11)においてそれぞれタイムステップ  $n+1$  と  $n$  の式の差をとる. それらの式に式(6),(7),(8)を代入し, 平面波を表す式(18)を代入すると次式に示す電界成分  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$  で構成される3本の式が得られる.

$$E_{x0} \left[ \frac{\sin^2(\frac{\omega \Delta t}{2})}{c_0^2 s_\omega^2(\Delta t)} - \frac{\sin^2(\frac{k_y \Delta y}{2})}{s_k^2(\Delta y)} \right]$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \alpha_{y1} + \alpha_{y2} \cos(k_z \Delta z) \cos(k_x \Delta x) \right. \\ & \left. + \frac{\alpha_{y3}}{2} (\cos(k_z \Delta z) + \cos(k_x \Delta x)) \right\} \\ & - \frac{\sin^2(\frac{k_z \Delta z}{2})}{s_k^2(\Delta z)} \left\{ \alpha_{z1} + \alpha_{z2} \cos(k_x \Delta x) \cos(k_y \Delta y) \right. \\ & \left. + \frac{\alpha_{z3}}{2} (\cos(k_x \Delta x) + \cos(k_y \Delta y)) \right\} \\ & + E_{y0} \left[ \frac{\sin(\frac{k_x \Delta x}{2}) \sin(\frac{k_y \Delta y}{2})}{s_k(\Delta x) s_k(\Delta y)} \right. \\ & \left\{ \alpha_{x1} + \alpha_{x2} \cos(k_y \Delta y) \cos(k_z \Delta z) \right. \\ & \left. + \frac{\alpha_{x3}}{2} (\cos(k_y \Delta y) + \cos(k_z \Delta z)) \right\} \\ & + E_{z0} \left[ \frac{\sin(\frac{k_z \Delta z}{2}) \sin(\frac{k_x \Delta x}{2})}{s_k(\Delta z) s_k(\Delta x)} \right. \\ & \left\{ \alpha_{x1} + \alpha_{x2} \cos(k_y \Delta y) \cos(k_z \Delta z) \right. \\ & \left. + \frac{\alpha_{x3}}{2} (\cos(k_y \Delta y) + \cos(k_z \Delta z)) \right\} \Big] = 0 \end{aligned} \quad (\text{A} \cdot 1)$$

$$\begin{aligned} & E_{x0} \left[ \frac{\sin(\frac{k_x \Delta x}{2}) \sin(\frac{k_y \Delta y}{2})}{s_k(\Delta x) s_k(\Delta y)} \right. \\ & \left\{ \alpha_{y1} + \alpha_{y2} \cos(k_z \Delta z) \cos(k_x \Delta x) \right. \\ & \left. + \frac{\alpha_{y3}}{2} (\cos(k_z \Delta z) + \cos(k_x \Delta x)) \right\} \\ & + E_{y0} \left[ \frac{\sin^2(\frac{\omega \Delta t}{2})}{c_0^2 s_\omega^2(\Delta t)} - \frac{\sin^2(\frac{k_z \Delta z}{2})}{s_k^2(\Delta z)} \right. \\ & \left\{ \alpha_{z1} + \alpha_{z2} \cos(k_x \Delta x) \cos(k_y \Delta y) \right. \\ & \left. + \frac{\alpha_{z3}}{2} (\cos(k_x \Delta x) + \cos(k_y \Delta y)) \right\} \\ & - \frac{\sin^2(\frac{k_x \Delta x}{2})}{s_k^2(\Delta x)} \left\{ \alpha_{x1} + \alpha_{x2} \cos(k_y \Delta y) \cos(k_z \Delta z) \right\} \\ & \left. + \frac{\alpha_{x3}}{2} (\cos(k_y \Delta y) + \cos(k_z \Delta z)) \right\} \\ & + E_{z0} \left[ \frac{\sin(\frac{k_y \Delta y}{2}) \sin(\frac{k_z \Delta z}{2})}{s_k(\Delta y) s_k(\Delta z)} \right. \\ & \left\{ \alpha_{y1} + \alpha_{y2} \cos(k_z \Delta z) \cos(k_x \Delta x) \right. \end{aligned}$$



$$\left. + \frac{\alpha_{y3}}{2} \left( \cos(k_z \Delta z) + \cos(k_x \Delta x) \right) \right\} \Bigg] = 0 \quad (\text{A} \cdot 2)$$

$$\times \frac{\sin^2(\frac{k_x \Delta x}{2})}{\sin^2(\frac{k \Delta z}{2})} \Bigg] \quad (\text{A} \cdot 4)$$

$$\begin{aligned} & E_{x0} \left[ \frac{\sin(\frac{k_z \Delta z}{2}) \sin(\frac{k_x \Delta x}{2})}{s_k(\Delta z) s_k(\Delta x)} \right. \\ & \left\{ \alpha_{z1} + \alpha_{z2} \cos(k_x \Delta x) \cos(k_y \Delta y) \right. \\ & \left. + \frac{\alpha_{z3}}{2} \left( \cos(k_x \Delta x) + \cos(k_y \Delta y) \right) \right\} \Bigg] \\ & + E_{y0} \left[ \frac{\sin(\frac{k_y \Delta y}{2}) \sin(\frac{k_x \Delta x}{2})}{s_k(\Delta y) s_k(\Delta z)} \right. \\ & \left\{ \alpha_{z1} + \alpha_{z2} \cos(k_x \Delta x) \cos(k_y \Delta y) \right. \\ & \left. + \frac{\alpha_{z3}}{2} \left( \cos(k_x \Delta x) + \cos(k_y \Delta y) \right) \right\} \Bigg] \\ & + E_{z0} \left[ \frac{\sin^2(\frac{\omega \Delta t}{2})}{c_0^2 s_\omega^2(\Delta t)} - \frac{\sin^2(\frac{k_x \Delta x}{2})}{s_k^2(\Delta x)} \right. \\ & \left\{ \alpha_{x1} + \alpha_{x2} \cos(k_y \Delta y) \cos(k_z \Delta z) \right. \\ & \left. + \frac{\alpha_{x3}}{2} \left( \cos(k_y \Delta y) + \cos(k_z \Delta z) \right) \right\} \\ & - \frac{\sin^2(\frac{k_y \Delta y}{2})}{s_k^2(\Delta y)} \left\{ \alpha_{y1} + \alpha_{y2} \cos(k_z \Delta z) \cos(k_x \Delta x) \right. \\ & \left. + \frac{\alpha_{y3}}{2} \left( \cos(k_z \Delta z) + \cos(k_x \Delta x) \right) \right\} \Bigg] = 0 \quad (\text{A} \cdot 3) \end{aligned}$$

これらの3本の式より、以下に示す数値分散式を得ることができる。

$$\begin{aligned} c_n^2 = c_0^2 & \left\{ \alpha_{x1} + \alpha_{x2} \cos(k_y \Delta y) \cos(k_z \Delta z) + \frac{\alpha_{x3}}{2} \right. \\ & \times \left( \cos(k_y \Delta y) + \cos(k_z \Delta z) \right) \Bigg\} \frac{\sin^2(\frac{k_x \Delta x}{2})}{\sin^2(\frac{k \Delta x}{2})} \\ & + \left\{ \alpha_{y1} + \alpha_{y2} \cos(k_z \Delta z) \cos(k_x \Delta x) + \frac{\alpha_{y3}}{2} \right. \\ & \times \left( \cos(k_z \Delta z) + \cos(k_x \Delta x) \right) \Bigg\} \frac{\sin^2(\frac{k_y \Delta y}{2})}{\sin^2(\frac{k \Delta y}{2})} \\ & + \left\{ \alpha_{z1} + \alpha_{z2} \cos(k_x \Delta x) \cos(k_y \Delta y) + \frac{\alpha_{z3}}{2} \right. \\ & \times \left( \cos(k_x \Delta x) + \cos(k_y \Delta y) \right) \Bigg\} \end{aligned}$$

## 2. 安定条件を導出するための基本式 1

$$\begin{aligned} & Z^2 - 2Z \left[ 1 - c_0^2 s_\omega^2(\Delta t) \left\{ 2 \left( \frac{\eta_{x1} \sin^2(\frac{k_x \Delta x}{2})}{s_k^2(\Delta x)} \right. \right. \right. \\ & \left. + \frac{\eta_{y1} \sin^2(\frac{k_y \Delta y}{2})}{s_k^2(\Delta y)} + \frac{\eta_{z1} \sin^2(\frac{k_z \Delta z}{2})}{s_k^2(\Delta z)} \right) \\ & \left. + \frac{1}{6} \left( \left( \frac{\eta_{x2}}{s_k^2(\Delta x)} + \frac{\eta_{y2}}{s_k^2(\Delta y)} + \frac{\eta_{z2}}{s_k^2(\Delta z)} \right) \right. \right. \\ & \times \left( \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x + k_y \Delta y + k_z \Delta z}{2}\right) \right. \\ & \left. + \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x - k_y \Delta y + k_z \Delta z}{2}\right) \right. \\ & \left. + \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x + k_y \Delta y - k_z \Delta z}{2}\right) \right. \\ & \left. + \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x - k_y \Delta y - k_z \Delta z}{2}\right) \right) \\ & \left. + \frac{\eta_{x2}}{s_k^2(\Delta x)} \left( -\cos(k_x \Delta x) \cos(k_y \Delta y) \right. \right. \\ & \left. + 2 \cos(k_y \Delta y) \cos(k_z \Delta z) - \cos(k_z \Delta z) \cos(k_x \Delta x) \right. \\ & \left. - 2 \cos(k_x \Delta x) + \cos(k_y \Delta y) + \cos(k_z \Delta z) \right) \\ & \left. + \frac{\eta_{y2}}{s_k^2(\Delta y)} \left( -\cos(k_x \Delta x) \cos(k_y \Delta y) \right. \right. \\ & \left. - \cos(k_y \Delta y) \cos(k_z \Delta z) + 2 \cos(k_z \Delta z) \cos(k_x \Delta x) \right. \\ & \left. + \cos(k_x \Delta x) - 2 \cos(k_y \Delta y) + \cos(k_z \Delta z) \right) \\ & \left. + \frac{\eta_{z2}}{s_k^2(\Delta z)} \left( 2 \cos(k_x \Delta x) \cos(k_y \Delta y) \right. \right. \\ & \left. - \cos(k_y \Delta y) \cos(k_z \Delta z) - \cos(k_z \Delta z) \cos(k_x \Delta x) \right. \\ & \left. + \cos(k_x \Delta x) + \cos(k_y \Delta y) - 2 \cos(k_z \Delta z) \right) \Bigg] \\ & + \frac{1}{4} \left( \left( \frac{\eta_{y3}}{s_k^2(\Delta y)} + \frac{\eta_{z3}}{s_k^2(\Delta z)} \right) \right. \\ & \times \left( \sin^2\left(\frac{k_y \Delta y + k_z \Delta z}{2}\right) \right. \\ & \left. + \sin^2\left(\frac{k_y \Delta y - k_z \Delta z}{2}\right) \right) \\ & \left. + \left( \frac{\eta_{z3}}{s_k^2(\Delta z)} + \frac{\eta_{x3}}{s_k^2(\Delta x)} \right) \right. \\ & \times \left( \sin^2\left(\frac{k_z \Delta z + k_x \Delta x}{2}\right) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sin^2\left(\frac{k_z \Delta z - k_x \Delta x}{2}\right) \\
& + \left(\frac{\eta_{x3}}{s_k^2(\Delta x)} + \frac{\eta_{y3}}{s_k^2(\Delta y)}\right) \\
& \times \left(\sin^2\left(\frac{k_x \Delta x + k_y \Delta y}{2}\right)\right. \\
& + \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x - k_y \Delta y}{2}\right) \\
& + \frac{\eta_{x3}}{s_k^2(\Delta x)} \\
& \times \left(-2 \cos(k_x \Delta x) + \cos(k_y \Delta y) + \cos(k_z \Delta z)\right) \\
& + \frac{\eta_{y3}}{s_k^2(\Delta y)} \\
& \times \left(\cos(k_x \Delta x) - 2 \cos(k_y \Delta y) + \cos(k_z \Delta z)\right) \\
& + \frac{\eta_{z3}}{s_k^2(\Delta z)} \\
& \times \left(\cos(k_x \Delta x) + \cos(k_y \Delta y) - 2 \cos(k_z \Delta z)\right) \\
& \left. \right\} + 1 = 0 \quad (\text{A} \cdot 5)
\end{aligned}$$

### 3. 安定条件を導出するための基本式 2

$$\begin{aligned}
& Z^2 - 2Z \left[ 1 - c_0^2 s_\omega^2(\Delta t) \left\{ \left( \frac{12\eta_{x1} + 4\eta_{x2} + 6\eta_{x3}}{6s_k^2(\Delta x)} \right. \right. \right. \\
& - \frac{2\eta_{y2} + 3\eta_{y3}}{6s_k^2(\Delta y)} - \frac{2\eta_{z2} + 3\eta_{z3}}{6s_k^2(\Delta z)} \left. \right\} \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) \\
& + \left( \frac{12\eta_{y1} + 4\eta_{y2} + 6\eta_{y3}}{6s_k^2(\Delta y)} - \frac{2\eta_{x2} + 3\eta_{x3}}{6s_k^2(\Delta x)} \right. \\
& - \frac{2\eta_{z2} + 3\eta_{z3}}{6s_k^2(\Delta z)} \left. \right\} \sin^2\left(\frac{k_y \Delta y}{2}\right) \\
& + \left( \frac{12\eta_{z1} + 4\eta_{z2} + 6\eta_{z3}}{6s_k^2(\Delta z)} \right. \\
& - \frac{2\eta_{x2} + 3\eta_{x3}}{6s_k^2(\Delta x)} - \frac{2\eta_{y2} + 3\eta_{y3}}{6s_k^2(\Delta y)} \left. \right\} \sin^2\left(\frac{k_z \Delta z}{2}\right) \\
& + \left( \frac{\eta_{x2}}{6s_k^2(\Delta x)} + \frac{\eta_{y2}}{6s_k^2(\Delta y)} + \frac{\eta_{z2}}{6s_k^2(\Delta z)} \right) \\
& \times \left( \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x + k_y \Delta y + k_z \Delta z}{2}\right) \right. \\
& + \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x - k_y \Delta y + k_z \Delta z}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x + k_y \Delta y - k_z \Delta z}{2}\right) \\
& + \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x - k_y \Delta y - k_z \Delta z}{2}\right) \\
& + \left( \frac{2\eta_{y2} + 3\eta_{y3}}{12s_k^2(\Delta y)} + \frac{2\eta_{z2} + 3\eta_{z3}}{12s_k^2(\Delta z)} - \frac{4\eta_{x2}}{12s_k^2(\Delta x)} \right) \\
& \times \left( \sin^2\left(\frac{k_y \Delta y + k_z \Delta z}{2}\right) \right. \\
& + \sin^2\left(\frac{k_y \Delta y - k_z \Delta z}{2}\right) \\
& + \left( \frac{2\eta_{z2} + 3\eta_{z3}}{12s_k^2(\Delta z)} + \frac{2\eta_{x2} + 3\eta_{x3}}{12s_k^2(\Delta x)} - \frac{4\eta_{y2}}{12s_k^2(\Delta y)} \right) \\
& \times \left( \sin^2\left(\frac{k_z \Delta z + k_x \Delta x}{2}\right) \right. \\
& + \sin^2\left(\frac{k_z \Delta z - k_x \Delta x}{2}\right) \\
& + \left( \frac{2\eta_{x2} + 3\eta_{x3}}{12s_k^2(\Delta x)} + \frac{2\eta_{y2} + 3\eta_{y3}}{12s_k^2(\Delta y)} - \frac{4\eta_{z2}}{12s_k^2(\Delta z)} \right) \\
& \times \left( \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x + k_y \Delta y}{2}\right) \right. \\
& + \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x - k_y \Delta y}{2}\right) \\
& \left. \left. \right\} + 1 = 0 \quad (\text{A} \cdot 6)
\end{aligned}$$

(平成 12 年 8 月 4 日受付, 11 月 15 日再受付)



工藤 祥典 (学生員)

平 11 北見工大・電気電子卒。同年同大大学院入学。以来、電磁界解析に従事。



柏 達也 (正員)

昭59北大・工・電気卒。昭61同大学院修士課程了。昭63同博士課程中退。同年同大・工・電気・助手。平8北見工大・電気電子・助教授。電磁界解析に従事。工博。平4 IEEE AP-S Tokyo Chapter Young Engineer Award。共著「Handbook of Microwave Technology」(Academic Press), 「Antennas and Associated Systems for Mobile Satellite Communications」(Research Signpost)等。IEEE MTT 査読委員。IEEE 会員。



大谷 忠生

昭58豊橋技科大・工・電気電子卒。昭60同大学院修士課程了。同年三菱重工業(株)入社。現在に至る。主に電磁波の散乱解析に従事。