

論文

Non-Standard FDTD 法における数値分散特性及び安定条件について

工藤 祥典[†] 柏 達也^{† a)} 大谷 忠生^{††}

Numerical Dispersion and Stability Condition of the Non-Standard FDTD Method

Hironori KUDO[†], Tatsuya KASHIWA^{† a)}, and Tadao OHTANI^{††}

あらまし FDTD 解析における位相誤差を縮小するために Cole は NS-FDTD 法を考案した。しかし、Cole の論文では数値分散特性及び正確な安定条件が示されていなかった。また、等方格子のみでの定義しか行われていなかった。本論文では、NS-FDTD 法を非等方格子に拡張し数値分散特性及び安定条件を求めた。安定条件の解析より、本手法の安定条件は FDTD 法及び FDTD(2,4) 法より大きいことが示された。数値分散特性の解析より、等方格子、非等方格子によらず FDTD 法に比べはるかに高い精度をもっていることを示した。NS-FDTD 法と FDTD 法が混在した導波管モデルの解析も行った。

キーワード NS-FDTD 法, FDTD 法, 数値分散, 安定条件, 非等方格子

1. ま え が き

FDTD 法 [1], [2] を用いた光素子や大型空洞系等の波長に比べて大きな系の解析においては、数値分散による誤差が大きな問題となる。この位相誤差は波の伝搬に伴って蓄積するため、数値計算上問題となる。また、この位相誤差は伝搬方向に対し異方的性質を示す。従来、この問題に対して種々の対策法が考案されている [3]~[9]。その中の一つとして Cole によって時間及び空間について 2 次精度の NS-FDTD (Non-Standard FDTD) 法 [3], [4] が考案された。この手法は、位相誤差特性が異なる複数のラプラシアンを用いて、異方的な誤差を打ち消し合うことにより位相誤差を等方的にしている。更に、本手法においては単周波のみであるが NS-FD 法の修正を加えることにより、位相誤差を少なくしている。しかしながら、Cole の論文では数値特性を理解する上で重要である数値分散特性は示されていなく、更に安定条件は不正確であった。また、この論文では等方格子の場合のみしか考慮されていなかっ

た。しかしながら、等方格子のみを用いた場合には解析できるモデルは限られる。したがって、実際の解析においては非等方格子を用いることがより一般的あるいは実際的であり、NS-FDTD 法を非等方格子でも扱えるようにすることが必要である。また、Cole の論文には具体的な数値例も示されていなかった。Cole の論文における数値的な特性の把握の方法は通常差分法の特性解析に用いられる手法と異なり非常に複雑であり、また一般化するのには困難と考えられる。したがって、その手法では NS-FDTD 法の特性を理解することが難しいと思われる。

最近、我々は NS-FDTD 法を非等方格子においても用いることができるように定式化し、その場合でも位相誤差が小さいことを数値実験で確かめた [10]。しかしながら、数値解析手法の特性を理解する上では数値的だけではなく解析的に調べる必要がある。また、NS-FDTD 法において数値的な特性を理解する上で通常差分法の特性解析で使われる標準的なアプローチを用いることが、NS-FDTD 法の理解の見通しを良くすると考えられる。

本論文では、差分法の特性解析に用いられる標準的な解析アプローチを用いることにより、NS-FDTD 法における数値分散特性を解析的に調べた [11]。また、Cole の安定条件は不正確であることを示し、新たに安

[†] 北見工業大学, 北見市

Kitami Institute of Technology, Kitami-shi, 090-8507 Japan

^{††} 三菱重工株式会社, 名古屋市

Mitsubishi Heavy Industries, LTD., Nagoya-shi, 455-8515 Japan

a) E-mail: KASHIWA-Tatsuya/elec@king.cc.kitami-it.ac.jp

定条件を求めた。更に、本論文では等方格子のみならず、非等方格子についても定式化を行っている。これらの特性について時間的に2次精度、空間的に2次精度であるFDTD法及び時間的に2次精度、空間的に4次精度であるFDTD(2,4)法[7]との比較も行った。その結果、NS-FDTD法は等方格子、非等方格子いずれの場合でもFDTD法に比べて位相誤差はるかに小さいことが示された。また、安定条件についてもFDTD法及びFDTD(2,4)法より大きくとることができることも示された。なお、本解析では2次元を仮定しているが、3次元でも特性は同様である。

2. NS-FD(Non-Standard Finite Difference) 法

ここでは、NS-FDTD法において位相誤差の除去のために導入されたMickensのNS-FD法[12]について説明する。時間域の差分法では、時間離散間隔 Δt と空間離散間隔 h が十分細かくないと数値的解が理論解に一致しない。NS-FD法は $h \rightarrow s_k(h)$, $\Delta t \rightarrow s_\omega(\Delta t)$ と空間離散間隔と時間離散間隔を修正関数で置き換えて計算することにより、 h と Δt が比較的粗くても理論解が得られるようにする手法である。ただし、 k は波数、 ω は角周波数である。NS-FD法の定義式は

$$d_\xi^{nsfd} f(\xi) = \frac{\tilde{d}_\xi f(\xi)}{s_a(\Delta\xi)} \quad (1)$$

ただし、 \tilde{d}_ξ は差分演算子であり

$$\tilde{d}_\xi f(\xi) = f\left(\xi + \frac{\Delta\xi}{2}\right) - f\left(\xi - \frac{\Delta\xi}{2}\right) \quad (2)$$

修正関数は空間軸及び時間軸について書くと[3],[4]

$$s_k(h) = \frac{2 \sin\left(\frac{kh}{2}\right)}{k} \quad (3)$$

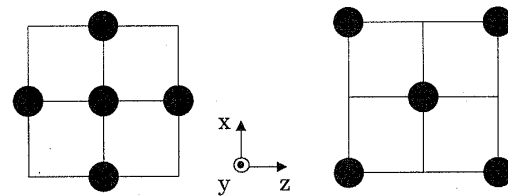
$$s_\omega(\Delta t) = \frac{2 \sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)}{\omega} \quad (4)$$

となる。

FDTD法においては数値的位相速度が光速よりも遅くなる。このことを修正するためにNS-FD法は、 h , Δt を式(3),(4)で置き換えることにより数値的位相速度を上昇させ、特定の周波数に対して本手法における数値的位相速度を物理的光速度に一致させている。

3. 等方性差分演算子

ここではNS-FDTD法において伝搬特性を等方化



(a) $h^2 D_{(1)}^2$

(b) $2h^2 D_{(2)}^2$

図1 差分ラプラシアン $h^2 D_{(1)}^2$ と $2h^2 D_{(2)}^2$ の節点配置
Fig.1 Position of nodes in the FD Laplacian $h^2 D_{(1)}^2$ and $2h^2 D_{(2)}^2$.

するために用いられる等方性差分演算子について説明する[3],[4],[13]。なお、ここでは等方格子について考える。FDTD法には位相速度に異方性が存在する。NS-FDTD法においてはこの異方的伝搬誤差を少なくするために、式(5)で示される2階の等方性差分ラプラシアン $D_{(0)}^2$ を導入する。

$$s_k(h)^2 D_{(0)}^2 = \gamma_0 h^2 D_{(1)}^2 + (1 - \gamma_0) h^2 D_{(2)}^2 \quad (5)$$

$D_{(0)}^2$ は図1に示す二つの差分演算子 $D_{(1)}^2$, $D_{(2)}^2$ によって構成される。ただし、 γ_0 は $D_{(1)}^2$, $D_{(2)}^2$ の重み係数であり、 $\gamma_0 = 1$ のとき修正関数の影響を無視すると $D_{(0)}^2$ はFDTD法に対応する。また、 $\gamma_0 = 0$ のとき $D_{(0)}^2$ は $D_{(1)}^2$ を45°回転させ格子間距離を $\sqrt{2}$ 倍にしたものに対応する。 $D_{(1)}^2$, $D_{(2)}^2$ の位相誤差は角度に対して逆の特性をもっているため、 $D_{(0)}^2$ は最適な γ_0 の値を用いることにより異方的な誤差を打ち消し合い伝搬特性が等方的になる。

NS-FDTD法に便利なように2階等方性差分演算子を1階差分演算子に分解する。

$$s_k(h)^2 D_{(0)}^2 = \tilde{d}_x^{(1)} \tilde{d}_x^{(0)} + \tilde{d}_z^{(1)} \tilde{d}_z^{(0)} \quad (6)$$

$$\tilde{d}_\xi^{(0)} = \alpha_0 \tilde{d}_\xi^{(1)} + (1 - \alpha_0) \tilde{d}_\xi^{(2)} \quad (7)$$

ただし $\xi = x, z$, $\alpha_0 = (1 + \gamma_0)/2$ である。ここで、

$$\tilde{d}_\xi^{(1)} = \tilde{d}_\xi \quad (8)$$

である。また、 $\tilde{d}_\xi^{(2)}$ は、

$$\begin{aligned} 2\tilde{d}_x^{(2)} f(x, z) &= f\left(x + \frac{h}{2}, z + h\right) + f\left(x + \frac{h}{2}, z - h\right) \\ &\quad - f\left(x - \frac{h}{2}, z + h\right) - f\left(x - \frac{h}{2}, z - h\right) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
& 2\tilde{d}_z^{(2)}f(x, z) \\
& = f\left(x+h, z+\frac{h}{2}\right) + f\left(x-h, z+\frac{h}{2}\right) \\
& \quad - f\left(x+h, z-\frac{h}{2}\right) - f\left(x-h, z-\frac{h}{2}\right)
\end{aligned} \tag{10}$$

である。なお、式(8)~(10)における節点の位置関係は後述の図2に示す。

4. NS-FDTD 式

以上説明した x, z 空間軸及び時間軸方向での数値分散修正関数 $s_k(\Delta x)$, $s_k(\Delta z)$, $s_\omega(\Delta t)$ と等方性差分演算子 $\tilde{d}_x^{(0)}$, $\tilde{d}_z^{(0)}$ 及び時間差分演算子 \tilde{d}_t を用いて非等方格子に拡張された NS-FDTD 演算子 d_x^{nsfddd} , d_z^{nsfddd} , d_t^{nsfddd} を以下のように定義する。

$$d_x^{nsfddd} = \frac{1}{s_k(\Delta x)} \tilde{d}_x^{(0)} \tag{11}$$

$$d_z^{nsfddd} = \frac{1}{s_k(\Delta z)} \tilde{d}_z^{(0)} \tag{12}$$

$$d_t^{nsfddd} = \frac{1}{s_\omega(\Delta t)} \tilde{d}_t \tag{13}$$

NS-FDTD 法は、FDTD 法の \tilde{d}_x , \tilde{d}_z , \tilde{d}_t をそれぞれ d_x^{nsfddd} , d_z^{nsfddd} , d_t^{nsfddd} に置き換えたものに対応している。これらの演算子を用いると、NS-FDTD 式は次式で定義される。

$$\begin{aligned}
& \tilde{d}_t H_x\left(x, z - \frac{\Delta z}{2}, t\right) \\
& = \frac{s_\omega(\Delta t)}{\mu s_k(\Delta z)} \tilde{d}_z^{(0)} E_y\left(x, z - \frac{\Delta z}{2}, t\right)
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
& \tilde{d}_t H_z\left(x - \frac{\Delta x}{2}, z, t\right) \\
& = -\frac{s_\omega(\Delta t)}{\mu s_k(\Delta x)} \tilde{d}_x^{(0)} E_y\left(x - \frac{\Delta x}{2}, z, t\right)
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
& \tilde{d}_t E_y\left(x, z, t + \frac{\Delta t}{2}\right) \\
& = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{s_\omega(\Delta t)}{s_k(\Delta z)} \tilde{d}_z^{(1)} H_x\left(x, z, t + \frac{\Delta t}{2}\right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{s_\omega(\Delta t)}{s_k(\Delta x)} \tilde{d}_x^{(1)} H_z\left(x, z, t + \frac{\Delta t}{2}\right) \right]
\end{aligned} \tag{16}$$

ここで、式(7),(8)より

$$\tilde{d}_x^{(0)} = \alpha_{x0} \tilde{d}_x^{(1)} + (1 - \alpha_{x0}) \tilde{d}_x^{(2)} \tag{17}$$

$$\tilde{d}_z^{(0)} = \alpha_{z0} \tilde{d}_z^{(1)} + (1 - \alpha_{z0}) \tilde{d}_z^{(2)} \tag{18}$$

$$\tilde{d}_x^{(1)} = \tilde{d}_x \tag{19}$$

$$\tilde{d}_z^{(1)} = \tilde{d}_z \tag{20}$$

である。これらの式を離散化すると次式で示される NS-FDTD 差分式が得られる。

$$\begin{aligned}
H_x^n(I, K) & = H_x^{n-1}(I, K) + \left[E_y^{n-\frac{1}{2}}\left(I, K + \frac{1}{2}\right) \right. \\
& \quad \left. - E_y^{n-\frac{1}{2}}\left(I, K - \frac{1}{2}\right) \right] \times \frac{\alpha_{z0} s_\omega(\Delta t)}{\mu(I, K) s_k(\Delta z)} \\
& + \left[E_y^{n-\frac{1}{2}}\left(I+1, K + \frac{1}{2}\right) - E_y^{n-\frac{1}{2}}\left(I+1, K - \frac{1}{2}\right) \right] \\
& + E_y^{n-\frac{1}{2}}\left(I-1, K + \frac{1}{2}\right) - E_y^{n-\frac{1}{2}}\left(I-1, K - \frac{1}{2}\right) \Big] \\
& \times \frac{(1 - \alpha_{z0}) s_\omega(\Delta t)}{2\mu(I, K) s_k(\Delta z)}
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
H_z^n(I, K) & = H_z^{n-1}(I, K) - \left[E_y^{n-\frac{1}{2}}\left(I + \frac{1}{2}, K\right) \right. \\
& \quad \left. - E_y^{n-\frac{1}{2}}\left(I - \frac{1}{2}, K\right) \right] \times \frac{\alpha_{x0} s_\omega(\Delta t)}{\mu(I, K) s_k(\Delta x)} \\
& - \left[E_y^{n-\frac{1}{2}}\left(I + \frac{1}{2}, K+1\right) - E_y^{n-\frac{1}{2}}\left(I - \frac{1}{2}, K+1\right) \right] \\
& + E_y^{n-\frac{1}{2}}\left(I + \frac{1}{2}, K-1\right) - E_y^{n-\frac{1}{2}}\left(I - \frac{1}{2}, K-1\right) \Big] \\
& \times \frac{(1 - \alpha_{x0}) s_\omega(\Delta t)}{2\mu(I, K) s_k(\Delta x)}
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
E_y^{n+\frac{1}{2}}(I, K) & = E_y^{n-\frac{1}{2}}(I, K) + \left[H_x^n\left(I, K + \frac{1}{2}\right) \right. \\
& \quad \left. - H_x^n\left(I, K - \frac{1}{2}\right) \right] \times \frac{s_\omega(\Delta t)}{\varepsilon(I, K) s_k(\Delta z)} \\
& - \left[H_z^n\left(I + \frac{1}{2}, K\right) - H_z^n\left(I - \frac{1}{2}, K\right) \right] \\
& \times \frac{s_\omega(\Delta t)}{\varepsilon(I, K) s_k(\Delta x)}
\end{aligned} \tag{23}$$

なお、式(21)~(23)の計算で用いられる節点の配置を図2に示す。ここで、 $\alpha_{x0} = \alpha_{z0} = 1$ とし、 $s_k(h) \rightarrow h$, $s_\omega(\Delta t) \rightarrow \Delta t$ と置き換えた場合、または $\alpha_{x0} = \alpha_{z0} = 1$ とし h と Δt が十分小さい場合、式(21)~(23)は FDTD 式に対応する。

なお、本手順における NS-FDTD 式は電界のスカラー波動方程式をもとに導出しているため電界は正しく計算できるが、磁界は必ずしも正しく計算できるとは限

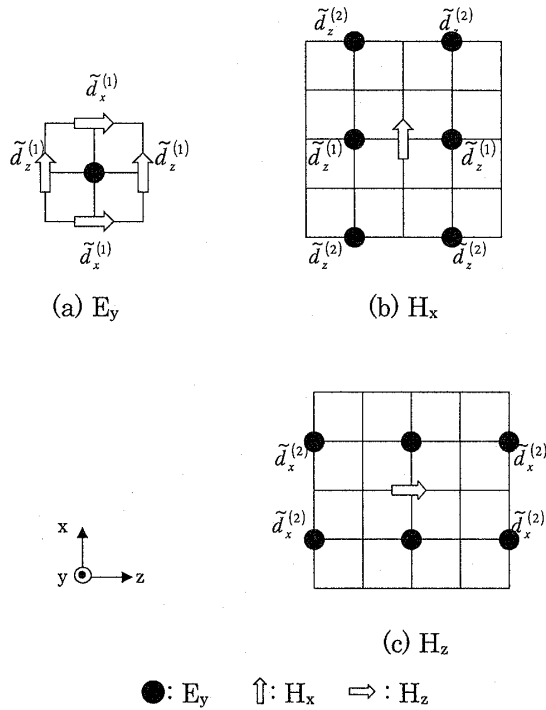


図2 NS-FDTD法における E_y , H_x , H_z の計算に用いる節点配置

Fig.2 Position of nodes used in the E_y , H_x and H_z calculation in the NS-FDTD method.

らない。したがって、磁界を求める場合は電界の値を用いて計算する必要がある [3], [4]。

5. 数値分散特性

ここでは、NS-FDTD法の数値分散特性を解析的に求める。まず、簡単のために修正関数は用いないものとして考える。ここでは、差分法の特性解析に一般に用いられる von-Neumann の方法を用いた。式 (23) においてタイムステップ $n+1$ と n の式の差をとり、その式に式 (21), (22) を代入すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{E_y^{n+1}(I, K) - 2E_y^n(I, K) + E_y^{n-1}(I, K)}{c^2 \Delta t^2} \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1 + \gamma_{z0}}{\Delta z^2} - \frac{1 - \gamma_{x0}}{\Delta x^2} \right) \times \{E_y^n(I, K + 1) \right. \\ & \quad \left. + E_y^n(I, K - 1)\} + \left(\frac{1 + \gamma_{x0}}{\Delta x^2} - \frac{1 - \gamma_{z0}}{\Delta z^2} \right) \right. \\ & \quad \left. \times \{E_y^n(I + 1, K) + E_y^n(I - 1, K)\} \right. \\ & \quad \left. - \left(\frac{4\gamma_{x0}}{\Delta x^2} + \frac{4\gamma_{z0}}{\Delta z^2} \right) \times E_y^n(I, K) \right] \end{aligned}$$

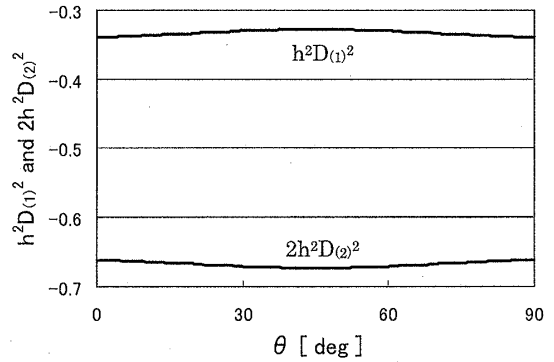


図3 $h^2 D_{(1)}^2$ と $2h^2 D_{(2)}^2$ の数値分散特性 ($\gamma_{x0} = \gamma_{z0} = 0.6622$)

Fig.3 Numerical dispersion of $h^2 D_{(1)}^2$ and $2h^2 D_{(2)}^2$ ($\gamma_{x0} = \gamma_{z0} = 0.6622$).

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{4} \left(\frac{1 - \gamma_{x0}}{\Delta x^2} + \frac{1 - \gamma_{z0}}{\Delta z^2} \right) \times [E_y^n(I + 1, K + 1) \\ & \quad + E_y^n(I + 1, K - 1) + E_y^n(I - 1, K + 1) \\ & \quad + E_y^n(I - 1, K - 1) - 4E_y^n(I, K)] \quad (24) \end{aligned}$$

式 (24) において、右辺第 1 項目及び第 2 項目はそれぞれ等方格子の場合、図 1(a), (b) の $D_{(1)}^2$, $D_{(2)}^2$ に対応している。式 (24) に平面波を表す式 (25) を代入する。

$$E_y^n(I, K) = E_{y0} e^{j(k_x I \Delta x + k_z K \Delta z)} e^{j\omega \Delta t} \quad (25)$$

修正関数を考慮すると、最終的に NS-FDTD 法の数値分散式は式 (26) となる。

$$\begin{aligned} c_n^2 = c_0^2 & \left[\frac{1}{2} \left\{ \frac{1 + \gamma_{z0}}{\sin^2(\frac{k \Delta z}{2})} - \frac{1 - \gamma_{x0}}{\sin^2(\frac{k \Delta x}{2})} \right\} \right. \\ & \quad \times \sin^2\left(\frac{k_z \Delta z}{2}\right) \\ & \quad + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1 + \gamma_{x0}}{\sin^2(\frac{k \Delta x}{2})} - \frac{1 - \gamma_{z0}}{\sin^2(\frac{k \Delta z}{2})} \right\} \\ & \quad \times \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) \\ & \quad + \frac{1}{4} \left\{ \frac{1 - \gamma_{x0}}{\sin^2(\frac{k \Delta x}{2})} + \frac{1 - \gamma_{z0}}{\sin^2(\frac{k \Delta z}{2})} \right\} \\ & \quad \times \left\{ \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x + k_z \Delta z}{2}\right) \right. \\ & \quad \left. + \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x - k_z \Delta z}{2}\right) \right\} \left. \right] \quad (26) \end{aligned}$$

ここで k は物理的な波数であり、 c_n は数値的位相速度、 c_0 は物理的光速度である。この式において第 1 項目と第 2 項目が等方格子の場合、図 1(a) に示す差分ラプラ

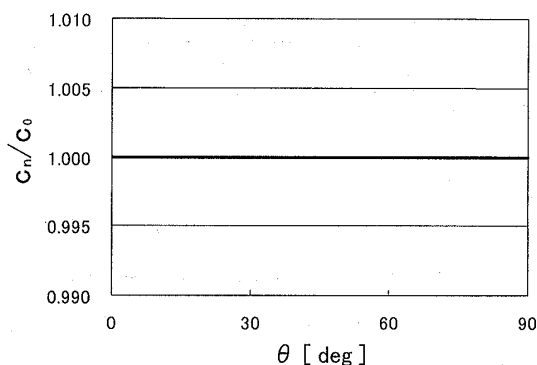


図4 $D_{(0)}^2$ の数値分散特性 ($\gamma_{x0} = \gamma_{z0} = 0.6622$)

Fig.4 Numerical dispersion of $D_{(0)}^2$ ($\gamma_{x0} = \gamma_{z0} = 0.6622$).

シアン $h^2 D_{(1)}^2$ での数値分散特性に対応している。つまり、FDTD法の数値分散特性を示す。また、第3項目は等方格子の場合、図1(b)に示す差分ラプラシアン $2h^2 D_{(2)}^2$ での数値分散特性に対応している。図3に $h^2 D_{(1)}^2$ 及び $2h^2 D_{(2)}^2$ に対応する数値分散特性を示す。これらを加え合わせている式(26)の数値分散特性を図4に示す。図3、図4より本手法においては位相誤差特性が異なる二つのラプラシアンを用いて、異方的な誤差を打ち消し合うことにより位相誤差を等方的にしていることがわかる。

6. 安定条件

ここでは、NS-FDTD法の安定条件について説明する。式(24)に平面波を表す式(27)を代入する。

$$E_y^n(I, K) = Z^n e^{j(k_x I \Delta x + k_z K \Delta z)} \quad (27)$$

ただし、 Z は平面波の振幅、 n はタイムステップである。整理すると式(28)を得る。

$$\begin{aligned} & Z^2 - 2Z \left[1 - c^2 \Delta t^2 \right. \\ & \times \left\{ \left(\frac{1 + \gamma_{z0}}{\Delta z^2} - \frac{1 - \gamma_{x0}}{\Delta x^2} \right) \sin^2 \left(\frac{k_z \Delta z}{2} \right) \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{1 + \gamma_{x0}}{\Delta x^2} - \frac{1 - \gamma_{z0}}{\Delta z^2} \right) \sin^2 \left(\frac{k_x \Delta x}{2} \right) \right\} \right. \\ & \left. - c^2 \Delta t^2 \left(\frac{1 - \gamma_{x0}}{2\Delta x^2} + \frac{1 - \gamma_{z0}}{2\Delta z^2} \right) \right. \\ & \times \left\{ \sin^2 \left(\frac{k_x \Delta x + k_z \Delta z}{2} \right) \right. \\ & \left. \left. + \sin^2 \left(\frac{k_x \Delta x - k_z \Delta z}{2} \right) \right\} \right] + 1 = 0 \quad (28) \end{aligned}$$

ただし、 $k_x = k \cos \theta$ 、 $k_z = k \sin \theta$ である。また、 θ は波の伝搬方向を示す。ここで、式(28)に示される

$Z^2 + 2b'Z + 1 = 0$ において判別式 $b'^2 - 1 \leq 0$ のとき、 $|Z| \leq 1$ となり、解は発散せず安定となる(付録1)。つまり、安定条件は式(29)が成立する Δt の範囲を求めることで得られる。

$$-1 \leq b' \leq 1 \quad (29)$$

したがって、 b' の最大値 b'_{max} 、及び最小値 b'_{min} が式(29)で表される範囲の中に収まる必要がある。ここで、格子が等方格子に近い場合(格子軸比が2.2以下)では b'_{max} 、 b'_{min} は次式で表される(付録2)。

$$b'_{max} = 1 \quad (30)$$

$$b'_{min} = 1 - c^2 \Delta t^2 \left(\frac{1 + \gamma_{x0}}{\Delta x^2} + \frac{1 + \gamma_{z0}}{\Delta z^2} \right) \quad (31)$$

式(30)、(31)が式(29)を満足するためには、 $b'_{min} \geq -1$ でなければならない。次に修正関数の影響について考慮すると、式(30)については修正関数の影響は出てこない。式(31)については Δt 、 Δx 、 Δz がそれぞれの修正関数に置き換わる。したがって、NS-FDTD法の安定条件は式(32)のようになる。

$$s_\omega(\Delta t) = \frac{1}{c_0 \sqrt{\frac{1 + \gamma_{x0}}{2} \frac{1}{s_k^2(\Delta x)} + \frac{1 + \gamma_{z0}}{2} \frac{1}{s_k^2(\Delta z)}}} \quad (32)$$

ただし、 c_0 は光速、 γ_{x0} 、 γ_{z0} は次式で与えられる。

$$\gamma_{x0} = 2\alpha_{x0} - 1 \quad (33)$$

$$\gamma_{z0} = 2\alpha_{z0} - 1 \quad (34)$$

また、ここでは示さないがいかなる格子の長短軸の比においても、少なくともFDTD法と同じ安定条件すなわち最大離散時間間隔が得られることを確認している。

7. 結果

7.1 数値分散

ここでは、NS-FDTD法の数値分散特性についてFDTD法と比較する。なお、後述するようにFDTD(2,4)法は安定条件が小さいので、必ずしも実用的であるとは限らないためここでは比較対象とはしていない。図5にNS-FDTD法の数値分散特性を示す。ここで、図中の()内は x 方向、 z 方向の波長分割数を示す。ただし、NS-FDTD法においてはいずれの分割においても誤差が極めて小さいので、それぞれまとめて示している。図6に(10:10)、(20:20)、(10:20)、(20:10)分割のときの位相誤差特性の拡大図を示す。なお、 γ_{x0} 、 γ_{z0} の値はそれぞれの方向の分割数に対応した値を用いる。ただし、 γ_{x0} 、 γ_{z0} の求め方はColeの論文[3]、[4]に従つ

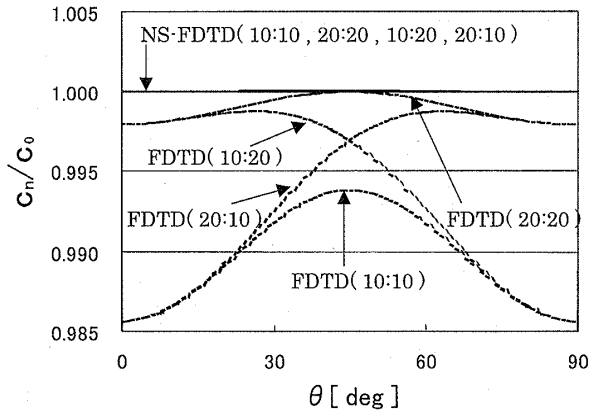


図5 NS-FDTD 法と FDTD 法の数値分散特性
Fig.5 Numerical dispersion of the NS-FDTD method and the FDTD method.

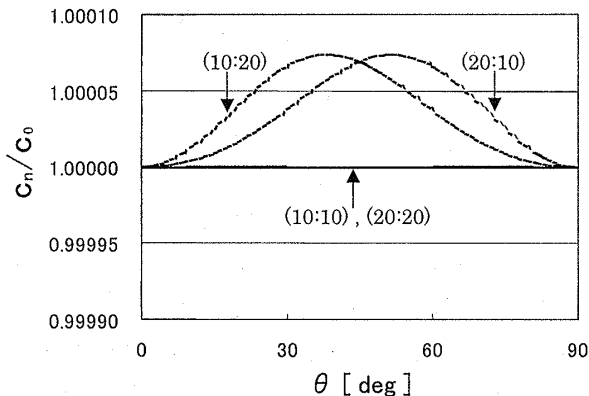


図6 NS-FDTD 法の数値分散特性拡大図
Fig.6 Expanded figure of the numerical dispersion of the NS-FDTD method.

た。ここでは10分割方向については $\gamma_{\xi 0} = 0.6622$, 20分割方向については $\gamma_{\xi 0} = 0.6656$ を用いている。なお、図5の中にFDTD法の数値分散特性も合わせて示してある。なお、 $\Delta t = \Delta t_{max}/2$ としている。ただし、 Δt_{max} はFDTD法における(10:10)分割のときのとり得る最大離散時間間隔である。図5より本手法は等方格子の場合、角度にかかわらず最大誤差が $1.1 \times 10^{-5}[\%]$ 以下となっており位相誤差が極めて小さいことがわかる。以上のことから、Coleの論文が理論的に示しているように等方格子においては位相誤差特性が非常に良好である。非等方格子の場合、最大誤差が $7.3 \times 10^{-3}[\%]$ 以下と等方格子の場合に比べると誤差は大きいもののFDTD法と比べ誤差が非常に小さくかつ等方的であることがわかる。

なお、FDTD法において非等方格子NS-FDTD法、例えば(10,20)の場合と同様の位相誤差を実現するためには、波長分割数 $\lambda/\Delta x$, $\lambda/\Delta z$ はともに少なくとも100以上が必要となる。逆にNS-FDTD法では

(10:100)分割においても最大位相誤差は $1.3 \times 10^{-2}[\%]$ とFDTD法の(10:n)分割(n は10以上)の最大位相誤差に比べ1/100以下であり、FDTD法よりも位相誤差がはるかに小さいことがわかる。以上のことにより、NS-FDTD法においては等方格子、非等方格子いずれの場合においても、FDTD法と比べ位相速度誤差がはるかに小さく、かつ等方的であることが示された。

7.2 安定条件

ここでは、NS-FDTD法の安定条件をFDTD法及びFDTD(2,4)法と比較する。式(32)に示されるNS-FDTD法の安定条件式は $\gamma_{x0} = \gamma_{z0} = 1$ のとき、修正関数の影響を無視すると図1(a)に示す $h^2 D_{(1)}^2$ に対応した安定条件、つまりFDTD法の安定条件に対応する。また、 $\gamma_{x0} = \gamma_{z0} = 0$ のとき、図1(b)に示す $2h^2 D_{(2)}^2$ に対応した安定条件を得ることができる。 $\gamma_{x0} = \gamma_{z0} = 1$ のときと比べると対角線の長さが $\sqrt{2}$ 倍になっているので、修正関数の項を無視すると安定条件も $1 \sim \sqrt{2}$ 倍になっていることがわかる。修正関数による補正の値は、たかだか数%であるのでNS-FDTD法はFDTD法に比べ約 $1 \sim \sqrt{2}$ 倍の範囲で Δt を大きくとれることがわかる。この結果は数値実験でも確認済みである。これらの条件は、Coleの安定条件式からは出てこないものであるためColeの安定条件は不正確であることがわかる。また、FDTD(2,4)法の安定条件[2],[7]は式(35)で与えられる。

$$\Delta t \leq \frac{6}{7} \frac{1}{c_0 \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta z^2}}} \quad (35)$$

式(35)からFDTD(2,4)法の安定条件はFDTD法に比べて小さいことがわかる。以上のことから、NS-FDTD法はFDTD法及びFDTD(2,4)法よりも時間離散間隔 Δt を大きくとれることがわかる。

7.3 伝搬シミュレーション

NS-FDTD法を用いた解析としては、1) 解析する系すべてをNS-FDTD法で解析する方法、2) 一樣な空間はNS-FDTD法、形状境界付近は境界条件の設定が容易なFDTD法を用いて解析する方法が考えられる。ここでは2)の方法について考える。このことを模擬するために図7に示される導波管モデルを考える。図中の入力面において振幅 E_{y0} の TE_{10} モードの強制入力を行い、伝搬波のシミュレーションを行った。導波管右側終端からの反射波の影響をなくすために終端からの反射がない時刻で観測を終えている。また、必要とする計算メモリを少なくするため、より粗い格子で

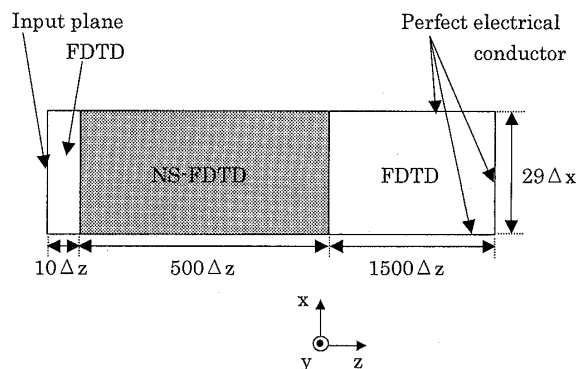


図7 NS-FDTD領域とFDTD領域で構成された導波管
Fig. 7 Waveguide consist of the NS-FDTD and the FDTD regions.

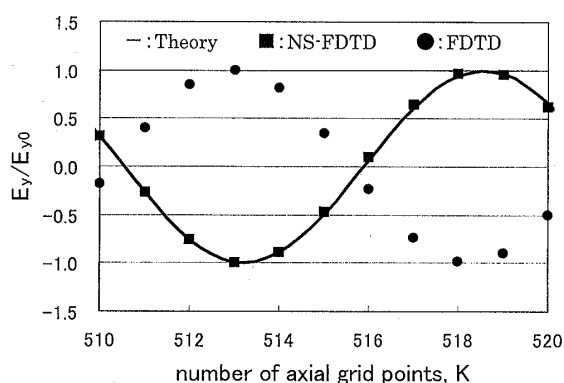


図8 導波管軸上の伝搬波形
Fig. 8 Propagation waveforms on the waveguide axis.

解析することを考え、 $\Delta x = \lambda/20$, $\Delta z = \lambda/10$ の非等方格子を用いている。安定条件はクーラン条件の小さいFDTD法に合わせ、 $\Delta t = \Delta z \sqrt{4/5}/c_0$ とした。なお、両手法領域の境界面では特別な処理は必要としない。図8に図7のモデルにおける伝搬波形を示す。また、FDTD解析における伝搬波形、及び理論値も合わせて示す。図8よりNS-FDTD法はFDTD法に比べ理論値によく一致しており、NS-FDTD特性の精度の良さが示されている。

一般に、差分式の異なる媒質の境界面では数値的位相速度のずれにより等価的に媒質が異なるように見え反射が起こる。また、この境界面ではしばしば解が発散することも起こる。そこで、次にNS-FDTD/FDTD境界面の影響を調べた。ここでは示さないが、図7モデルの解析においてエンベロップの観測を行い、反射係数は0.5%以内であり、反射はほとんど無視できることを確認している。また、この境界付近で発散が起こらないことも確認した。以上のことにより、本研究の範囲においてはNS-FDTD法とFDTD法を混在して用いることが可能なことが示された。しかしなが

ら、厳密にはNS-FDTD法においては磁界が必ずしも正しく計算されているとは限らないため、そのことがNS-FDTD/FDTD混在系においてどの程度影響を及ぼすかについては更に調べる必要がある。

8. むすび

本論文では、NS-FDTD法における数値分散特性及び安定条件を求めた。また、等方格子で定義されたColeのNS-FDTD法を非等方格子でも解析できるように定義式を一般化した。NS-FDTD法においては比較的粗い格子においても等方格子、非等方格子にかかわらず位相誤差が極めて小さくかつ等方的であることを示した。位相誤差は $\Delta = \lambda/10$ の等方格子において $1.1 \times 10^{-5}[\%]$ 以下、 $\Delta = \lambda/10, \lambda/20$ の非等方格子においても $7.3 \times 10^{-3}[\%]$ 以下でありFDTD法に比べ位相誤差が格段に小さいことを示した。また、本手法がFDTD法と混在して用いることができることも示した。

本研究において γ_{x0}, γ_{z0} はColeの論文に従って求めたが、より一般的には γ_{x0}, γ_{z0} の最適化については数値分散曲線を調べ誤差が最も小さくなる γ_{x0}, γ_{z0} を選ぶ必要がある。また、本手法は単周波での位相速度の補正法であるが実際にはある程度の帯域において用いることが可能である[3], [4]。今後は帯域特性について調べる必要がある。なお、本論文では2次元での定式化を行ったが3次元でも同様に定式化が行える。

謝辞 日ごろより様々な面でお世話になる旭川工業高等専門学校教授鏡慎氏及び関係各位に深く感謝致します。また、TeX入力に御協力頂きました北見工大修士1年打矢匡氏に深く感謝致します。

文 献

- [1] K. S. Yee, "Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media," IEEE Trans. Antennas & Propag., vol.AP-14, no.3, pp.302-307, May 1966.
- [2] A. Taflove, Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method, Artech House, 1995.
- [3] J. B. Cole, "A high-accuracy FDTD algorithm to solve microwave propagation and scattering problems on a coarse grid," IEEE Trans. Microwave Theory & Tech., vol.43, no.9, pp.2053-2058, Sept. 1995.
- [4] J. B. Cole, "A high-accuracy realization of the yee algorithm using non-standard finite differences," IEEE Trans. Microwave Theory & Tech., vol.45, no.6, pp.991-996, June 1997.
- [5] T. Hirono, W.W. Lui, K. Yokoyama, and S. Seki, "Stability and numerical dispersion of symplectic fourth-order

- time-domain schemes for optical field simulation," J. Lightwave Technol., vol.16, no.10, pp.1915-1920, Oct. 1998.
- [6] M. F. Hadi and M. Picket-May, "A modified FDTD (2,4) scheme for modeling electrically large structures with high-phase accuracy," IEEE Trans. Antennas & Propag., vol.45, no.2, pp.254-264, Feb. 1997.
- [7] K. Lan, Y. Liu, and W. Lin, "A higher order (2,4) scheme for reducing dispersion in FDTD algorithm," IEEE Trans. Electromagn. Compat., vol.41, no.2, pp.160-165, May 1999.
- [8] P. G. Petropoulos, "Phase error control for FD-TD methods of second and fourth order accuracy," IEEE Trans. Antennas & Propag., vol.42, no.6, pp.859-862, June 1994.
- [9] J. W. Nehrbass, J. O. Jevtic, and R. Lee, "Reducing the phase error for finite-difference methods without increasing the order," IEEE Trans. Antennas & Propag., vol.46, no.8, pp.1194-1201, Aug. 1998.
- [10] 工藤祥典, 柏 達也, 大谷忠生, "NS-FDTD法を用いた電磁界解析," 電学電磁界理論研資, EMT-99-89, Nov. 1999.
- [11] 工藤祥典, 柏 達也, 大谷忠生, "NS-FDTD法の数値分散特性," 平12信学総大, C-1-6, 2000.
- [12] R. E. Mickens, Nonstandard finite difference models of differential equations, World Scientific, Singapore, 1994.
- [13] 土木学会(編), 土木工学における数値解析, 基礎編, サイエンスライブラリー情報電算機シリーズ27, サイエンス社, 1975.

付 録

1. 安定条件を満足する b' の条件

ここでは式 $Z^2 + 2b'Z + 1 = 0$ において, 解が発散せず安定するための条件が判別式 $b'^2 - 1 \leq 0$ であることを説明する. もし $|Z| > 1$ のとき, Z は式 (27) に示す平面波の振幅を表すため時間ステップが大きくなると解が発散してしまう. もし $|Z| \leq 1$ のとき, 時間ステップが大きくなっても解は発散することはなく安定する. つまり, 安定条件は $|Z| \leq 1$ を満足するとき得られる.

まず, 式 $Z^2 + 2b'Z + 1 = 0$ の解を次式に示す.

$$Z = -b' \pm \sqrt{b'^2 - 1} \quad (\text{A} \cdot 1)$$

ここで, 上式における判別式が0以下となる次式を仮定する.

$$b'^2 - 1 \leq 0 \quad (\text{A} \cdot 2)$$

式 (A・2) の条件が成立するとき式 (A・1) より,

$$|Z|^2 = Z \times Z^* = b'^2 - (b'^2 - 1) = 1 \quad (\text{A} \cdot 3)$$

となり $|Z| \leq 1$ が満足される. したがって, 少なくとも

も式 (A・2) を満足するとき, 安定条件の十分条件を求めることができる.

2. b' の最大値 b'_{max} 及び最小値 b'_{min} の求め方

ここでは b' の最大値 b'_{max} 及び最小値 b'_{min} を求める. まず, b' は式 (28) より次式で表される.

$$\begin{aligned} b' = & 1 - c^2 \Delta t^2 \left\{ \left(\frac{1 + \gamma_{z0}}{\Delta z^2} - \frac{1 - \gamma_{x0}}{\Delta x^2} \right) \sin^2 \left(\frac{k_z \Delta z}{2} \right) \right. \\ & + \left. \left(\frac{1 + \gamma_{x0}}{\Delta x^2} - \frac{1 - \gamma_{z0}}{\Delta z^2} \right) \sin^2 \left(\frac{k_x \Delta x}{2} \right) \right\} \\ & - c^2 \Delta t^2 \left(\frac{1 - \gamma_{x0}}{2\Delta x^2} + \frac{1 - \gamma_{z0}}{2\Delta z^2} \right) \\ & \times \left\{ \sin^2 \left(\frac{k_x \Delta x + k_z \Delta z}{2} \right) \right. \\ & + \left. \sin^2 \left(\frac{k_x \Delta x - k_z \Delta z}{2} \right) \right\} \quad (\text{A} \cdot 4) \end{aligned}$$

格子が等方格子に近い場合 (格子軸比が2.2以下), 式 (A・4) 中の右辺のはじめの二つの $\sin^2()$ の項の係数が一般には正になる. この場合には安定条件を容易に求めることができる. 本論文では格子が等方格子に近い場合についての安定条件を求める.

はじめに b' の最大値 b'_{max} を求める. b' が最大になるためには, 式 (A・4) において右辺第2項目及び第3項目が最小になればよい. したがって, 次式の条件のとき, 最大値 b'_{max} が得られ式 (30) が得られる.

$$\sin^2 \left(\frac{k_x \Delta x}{2} \right) = 0 \quad (\text{A} \cdot 5)$$

$$\sin^2 \left(\frac{k_z \Delta z}{2} \right) = 0 \quad (\text{A} \cdot 6)$$

$$\sin^2 \left(\frac{k_x \Delta x + k_z \Delta z}{2} \right) = 0 \quad (\text{A} \cdot 7)$$

$$\sin^2 \left(\frac{k_x \Delta x - k_z \Delta z}{2} \right) = 0 \quad (\text{A} \cdot 8)$$

次に, 同様に b' の最小値 b'_{min} を求める. b' が最小になるためには, 右辺第2項目及び第3項目が最大になればよい. したがって, 次式の条件のとき式 (31) に示される最小値 b'_{min} が得られる.

$$\sin^2 \left(\frac{k_x \Delta x}{2} \right) = 1 \quad (\text{A} \cdot 9)$$

$$\sin^2 \left(\frac{k_z \Delta z}{2} \right) = 1 \quad (\text{A} \cdot 10)$$

$$\sin^2 \left(\frac{k_x \Delta x + k_z \Delta z}{2} \right) = 1 \quad (\text{A} \cdot 11)$$

$$\sin^2 \left(\frac{k_x \Delta x - k_z \Delta z}{2} \right) = 1 \quad (\text{A} \cdot 12)$$

(平成12年3月2日受付, 6月28日再受付)



工藤 祥典 (学生員)

平11北見工大・電気電子卒。同年同大学院入学。以来、電磁界解析に従事。



柏 達也 (正員)

昭59北大・工・電気卒。昭61同大学院修士課程了。昭63同博士課程中退。同年同大・工・電気・助手。平8北見工大・電気電子・助教授。電磁界解析に従事。工博。平4IEEE AP-S Tokyo Chapter Young Engineer Award。共著「Handbook of Microwave Technology」(Academic Press)、「Antennas and Associated Systems for Mobile Satellite Communications」(Research Signpost)等。IEEE MTT 査読委員。IEEE 会員。



大谷 忠生

昭58豊橋技科大・工・電気電子卒。昭60同大学院修士課程了。同年三菱重工業(株)入社。現在に至る。主に電磁波の散乱解析に従事。