

## ショートノート

### 有限要素法による誘電体リング共振器のリーキー波解析

平山 浩一<sup>†a)</sup>(正員) 鈴木康一郎<sup>†</sup>(学生員)  
林 義男<sup>†</sup>(正員)

Finite Element Analysis of Leaky Wave in a Dielectric Ring Resonator

Koichi HIRAYAMA<sup>†a)</sup>, Regular Member,  
Koichiro SUZUKI<sup>†</sup>, Student Member, and  
Yoshio HAYASHI<sup>†</sup>, Regular Member

<sup>†</sup> 北見工業大学電気電子工学科, 北見市

Department of Electrical and Electronic Engineering, Kitami  
Institute of Technology, Kitami-shi, 090-8507 Japan

a) E-mail: hirakc@mail.kitami-it.ac.jp

あらまし 2次元誘電体リング共振器に対して, その外部にPMLを装荷し, 有限要素法を用いて周方向におけるリーキー波の次数及び減衰定数を算出する方法を提案している.

キーワード 誘電体リング共振器, チャネルドロップリングフィルタ, リーキー波, 有限要素法

#### 1. まえがき

波長分割多重通信において, 誘電体微小リング共振器を用いたチャネルドロップリングフィルタが提案されている[1]~[3]が, その設計をする上で, 誘電体リングのリーキー波の共振波長及び放射損を調べておく必要がある.

開放型導波路のリーキーモード解析として, 有限要素法を用いて遮へい型導波路の電磁界分布を調べて振動的に減衰定数を決定する方法[4], 導波路から遠方の電磁界に対して漸近展開に基づく近似を有限要素法に導入して非線形固有値問題を反復解法で解く方法[5]があり, これらはARROWに適用されている. 一方, 開放型導波路を完全整合層(PML)で終端してモードを解析する方法も提案されている. 固有値問題としては, スラブ導波路型のARROWに対して差分法[6], マイクロストリップ線路リーキー波アンテナに対して有限要素法[7]が適用されている. また, PMLで囲んだ導波路を励振してリーキー波の複素伝搬定数を決定する方法として, ARROWなどに対して虚軸ビーム伝搬法[8], NRD線路リーキー波アンテナに対して有限要素法[9], 誘電体ディスクに対してFDTD法[10]が適用されている.

ここでは有限要素法を用いて誘電体リング共振器のリーキー波を2次元問題で解析している. 開放型の導

波路構造であるため, PMLで囲んで有限要素法を適用する. 具体的に, 誘電体リングの周方向におけるリーキー波の次数と減衰定数を算出しているが, 円筒座標系の半径方向をPMLで終端して固有値問題として解析する方法はこれまで報告されていない. なお, この場合には厳密解が存在するが, 複素数次のベッセル関数, ノイマン関数を精度良く計算する必要がある[11]. また, PMLの位置と幅を変えても周方向次数, 減衰定数及びPML外部での電界分布はほとんど変わらないことを確認して, 本手法の有効性を示している.

#### 2. 有限要素法に基づく定式化

図1に示すような誘電体リング共振器を考え,  $z$ 軸方向には界が一様な2次元問題とする. ここで,  $n_1$ はリングの屈折率,  $n_0$ はリングの内側及び外側の屈折率,  $a, d$ はそれぞれリングの内半径, 幅であり,  $r_0, d_r$ はそれぞれPMLの内半径, 幅である. PMLは電気壁で終端されているとする. このような2次元軸対称構造に円筒座標系 $(r, \theta, z)$ を用いて, TEモードの電界を $\mathbf{E} = \hat{z}\phi(r) \exp(-j\nu\theta)$  ( $\hat{z}$ は $z$ 軸方向の単位ベクトル)と表す. 周方向における界の変化を表す $\nu$ は零ではない定数として,  $\phi(0) = 0$ とする. このとき汎関数は次式で与えられる.

$$F(\phi) = 2\pi \int_0^{r_0+d_r} \left[ \frac{s_r}{s_\theta} \left( \frac{\nu\phi}{r} \right)^2 + \frac{s_\theta}{s_r} \left( \frac{\partial\phi}{\partial r} \right)^2 - k_0^2 n^2 s_r s_\theta \phi^2 \right] r dr \quad (1)$$

ここに $n$ は媒質の屈折率,  $k_0$ は自由空間波数を表す. また $s_r, s_\theta$ はPML外部では1, PML内部では次式で与えられる[12].

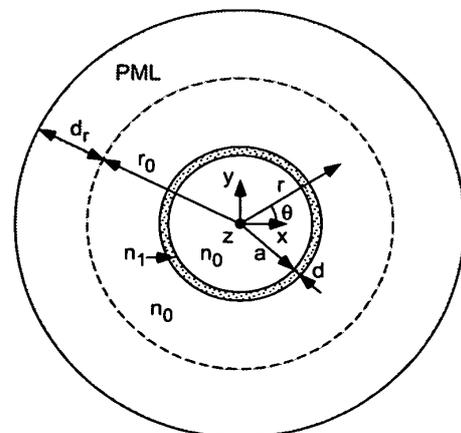


図1 誘電体リング共振器  
Fig. 1 Dielectric ring resonator.

$$s_r = 1 + j \frac{3 \ln |R|}{2k_0 n_0 d_r^3} (r - r_0)^2 \quad (2)$$

$$s_\theta = 1 + j \frac{3 \ln |R|}{2k_0 n_0 d_r^3} \frac{(r - r_0)^3}{3r} \quad (3)$$

ここで  $|R|$  は PML に垂直入射した平面波の反射係数の絶対値で、十分小さな値に設定する。

軸対称 2 次環状要素 [13] を用いて、 $0 \leq r \leq r_0 + d_r$  を分割して離散化し、それをすべての要素について重ね合わせて停留条件を用いると、次のような  $\nu^2$  を固有値とする一般固有値問題に帰着する。

$$[A]\{\phi\} = \nu^2[B]\{\phi\} \quad (4)$$

ここに  $\{\phi\}$  は  $r = 0, r_0 + d_r$  を除くすべての節点での  $\phi$  の値からなるベクトルである。また、 $[A], [B]$  は有限要素法による行列でともに疎であるので、サブスペース法 [14] を用いることで計算に要するメモリを大幅に節約できる。

### 3. 数値計算例

本手法の妥当性を確認するため、厳密解が算出されているマイクロ波帯での誘電体リングの解析を行う。ここで屈折率は  $n_1 = \sqrt{1.56}$ ,  $n_0 = 1$ , 誘電体リングの寸法は  $a = 9.8$  cm,  $d = 1.2$  cm であり、PML の位置及び幅は  $r_0 = 16$  cm,  $d_r = 5$  cm とする。図 2 に、規格化周波数  $V = k_0 d \sqrt{n_1^2 - n_0^2}/2$  に対する  $\nu$  の値を示す。ここで  $b$  は誘電体リングの外半径 ( $b = a + d$ ) であり、本手法による結果 (実線) は厳密解 (黒丸) [11] に非常によく一致することがわかる。

$V = 1.1$  で、PML の位置及び幅を変えたときの半径方向の電界分布  $|\phi(r)|$  を図 3 に示す。PML の位置や幅を変えても PML に至るまでの電界分布はほぼ同じで、図中では区別できない。電界は PML に至る位置でまだある程度の大きさをもっているが、PML が十分に機能して PML 内で急速に減衰する様子が見られる。なお、この 3 通りの計算で周方向次数 ( $\text{Re}(\nu)$ ) 及び減衰定数 ( $-\text{Im}(\nu)/b$ ) が有効数字 6 けた以上で一致することを確認している。また図 3 には、PML を装荷しないときに得られる電界分布も示しているが、電気壁に向かって振動している。このときの周方向次数の値は 2 けた程度の精度であること、当然のことながら減衰定数はゼロと評価されることを確認しており、PML なしでリーキー波を解析することは適当でないことがわかる。

次に、光波帯での誘電体リングについて、自由空

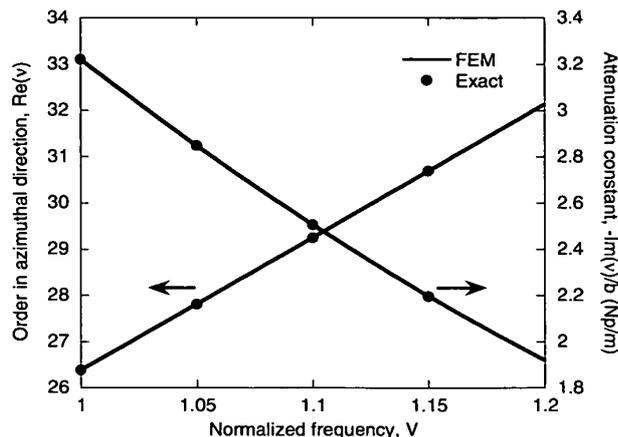


図 2 マイクロ波帯誘電体リング共振器の周方向次数と減衰定数

Fig. 2 Order and attenuation constant in azimuthal direction for a dielectric ring resonator in the microwave regime.

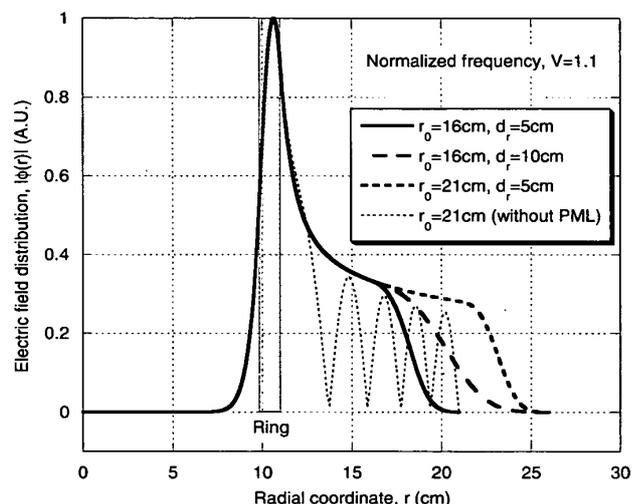


図 3 マイクロ波帯誘電体リング共振器の半径方向電界分布  
Fig. 3 Electric field distribution in radial direction for a dielectric ring resonator in the microwave regime.

間波長  $\lambda$  に対する  $\nu$  の値を図 4 に示す。ここで屈折率は  $n_1 = 3$ ,  $n_0 = 1$ , 誘電体リングの寸法は  $a = 1.6 \mu\text{m}$ ,  $d = 0.2 \mu\text{m}$  であり [1], PML の位置及び幅は  $r_0 = 2a + d$ ,  $d_r = a$  としている。図 4 の結果において、周方向次数が整数になるとき誘電体リングが共振し、チャネルドロップングフィルタで出力ポートに電力を伝送する波長 [1] に一致することを確認している。それらの中で周方向次数がほぼ 19 になる、 $\lambda = 1.335 \mu\text{m}$  での半径方向の電界分布を図 5 に示す。リング近傍に電界が集中している様子が見られる。

### 4. むすび

誘電体リング共振器に対して、その外部に PML を

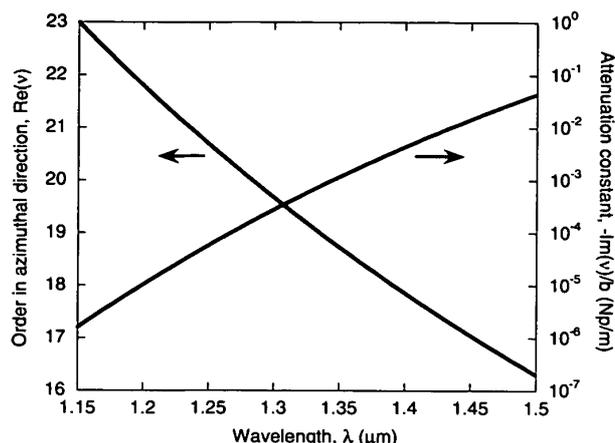


図4 光波帯誘電体リング共振器の周方向次数と減衰定数  
Fig. 4 Order and attenuation constant in azimuthal direction for a dielectric ring resonator in the optical-wave regime.

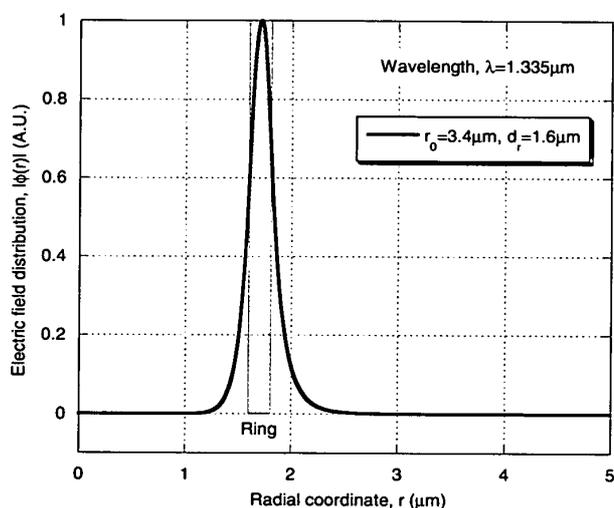


図5 光波帯誘電体リング共振器の半径方向電界分布  
Fig. 5 Electric field distribution in radial direction for a dielectric ring resonator in the optical-wave regime.

装荷し、有限要素法を用いて周方向におけるリーキー波の次数及び減衰定数を算出する方法を提案し、具体的に数値計算を行って厳密解とよく一致することを確認した。また、PMLの位置と幅の設定を変えても周方向次数、減衰定数及びPML外部での電界分布はほとんど変わらないことを確認し、本手法の有効性を示した。リーキー波の周方向次数が整数になるとき誘電体リングが共振し、チャネルドロップングフィルタで出力ポートに電力を伝送する波長に一致することを確認し、リーキー波解析の有用性を示した。有限要素法による3次元の誘電体微小リング共振器及びそれを用いたフィルタに関する解析は今後の課題である。

## 文献

- [1] B.E. Little, S.T. Chu, H.A. Haus, J. Foresi, and J.-P. Laine, "Microring resonator channel dropping filters," *J. Lightwave Technol.*, vol.15, no.6, pp.998-1005, June 1997.
- [2] B.E. Little, H.A. Haus, J.S. Foresi, L.C. Kimerling, E.P. Ippen, and D.J. Ripin, "Wavelength switching and routing using absorption and resonance," *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol.10, no.6, pp.816-818, June 1998.
- [3] B.E. Little, S.T. Chu, W. Pan, D. Ripin, T. Kaneko, Y. Kokubun, and E. Ippen, "Vertically coupled glass microring resonator channel dropping filters," *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol.11, no.2, pp.215-217, Feb. 1999.
- [4] J.C. Grant, J.C. Beal, and N.J.P. Frenette, "Finite element analysis of the ARROW leaky optical waveguide," *IEEE J. Quantum Electron.*, vol.30, no.5, pp.1250-1253, May 1994.
- [5] H.E. Hernández-Figueroa, F.A. Fernández, Y. Lu, and J.B. Davies, "Vectorial finite element modelling of 2D leaky waveguides," *IEEE Trans. Magn.*, vol.31, no.3, pp.1710-1713, May 1995.
- [6] W.P. Huang, C.L. Xu, W. Lui, and K. Yokoyama, "The perfectly matched layer boundary condition for modal analysis of optical waveguides: Leaky mode calculations," *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol.8, no.5, pp.652-654, May 1996.
- [7] T. Tischler and W. Heinrich, "The perfectly matched layer as lateral boundary in finite-difference transmission-line analysis," *IEEE MTT-S Inter. Microwave Symp. Digest*, vol.1, pp.121-124, June 2000.
- [8] Y. Tsuji and M. Koshiba, "Guided-mode and leaky-mode analysis by imaginary distance beam propagation method based on finite element scheme," *J. Lightwave Technol.*, vol.18, no.4, pp.618-623, April 2000.
- [9] X.Q. Sheng and K.N. Yung, "A convenient and general approach for analyzing NRD-guide leaky-wave antennas," *Microwave Opt. Technol. Lett.*, vol.30, no.3, pp.173-175, Aug. 2001.
- [10] S. Shi, L. Yang, and D.W. Prather, "Numerical study of axisymmetric dielectric resonators," *IEEE Trans. Microwave Theory & Tech.*, vol.49, no.9, pp.1614-1619, Sept. 2001.
- [11] 渡辺 実, 苔米地義郎, 松村和仁, "放射を考慮した一様曲がりスラブ導波路の伝送特性," 信学'91春大, SC-2-7.
- [12] F.L. Teixeira and W.C. Chew, "Systematic derivation of anisotropic PML absorbing media in cylindrical and spherical coordinates," *IEEE Microwave Guided Wave Lett.*, vol.7, no.11, pp.371-373, Nov. 1997.
- [13] 小柴正則, 光・波動のための有限要素法の基礎, pp.56-60, 森北出版, 1990.
- [14] F.A. Fernandez, J.B. Davies, S. Zhu, and Y. Lu, "Sparse matrix eigenvalue solver for finite element solution of dielectric waveguides," *Electron. Lett.*, vol.27, no.20, pp.1824-1826, Sept. 1991.

(平成14年3月18日受付, 7月10日再受付)