

## Applying Markov Decision Processes with an Outer Environment to Managing Credit Lines<sup>\*</sup>

Yasunari Maeda,<sup>a,†</sup> Masakiyo Suzuki,<sup>a</sup> Atsushi Nakagaki,<sup>a</sup> Koji Katsura,<sup>b</sup> Toshiki Kadoi<sup>b</sup> and Yoshiharu Kamuro<sup>b</sup>

<sup>a</sup>*Dept. of Computer Science, Kitami Institute of Technology*

<sup>b</sup>*KANTEC CORPORATION*

**Abstract:** In previous research Markov decision processes has been applied to managing credit lines. And an expected total discounted reward was maximized. But an outer environment (e.g. economic growth) was not represented in the model. So in this research we apply Markov decision processes with the outer environment to managing credit lines. And we propose a new managing credit lines method which maximizes expected total discounted reward in the Markov decision processes with the outer environment.

**Keywords:** Managing credit lines; Markov decision processes; outer environment; dynamic programming; expected total discounted reward

---

\* Received: July 8, 2009; Accepted: January 28, 2010.

† Corresponding author. Address: 165 Koen-cho, Kitami-shi, Hokkaido 090-8507, Japan; Phone: +81-157-26-9328; E-mail: maeda@cs.kitami-it.ac.jp

## 外部要因を考慮したマルコフ決定過程の個人融資における限度額の設定戦略への適用

前田 康成<sup>a</sup>, 鈴木 正清<sup>a</sup>, 中垣 淳<sup>a</sup>, 桂 耕史<sup>b</sup>, 門井 俊機<sup>b</sup>, 加室 吉晴<sup>b</sup>

<sup>a</sup> 北見工業大学 情報システム工学科

<sup>b</sup> 株式会社カンテック

### 1 はじめに

本研究では、個人の顧客に対して融資を行って、個人の顧客から融資に対する返済を受けることにより収益を得る個人融資業務の中から、特に個人融資における融資限度額の設定戦略を研究対象とする。個人融資業務は長く収益性の高い業務であったが、近年は各種規制により以前よりも収益性は下がってきており、なるべく高い収益を得ることが個人融資業務における重要な課題の一つである。

個人融資業務においては個人の顧客に対して返済状況等に応じた格付けが行われている (So and Thomas [2, 3], Trench et al. [4])。金融機関における顧客に対するこのような格付けはもともと融資を受けようとする企業や国債等に対して行われており (McNeil et al. [1], 小野[5], 木島ら[6])、同様の考え方で個人の顧客に対しても格付けが行われている。

個人融資における融資限度額の設定戦略に関する研究もいろいろと行われており、マルコフ決定過程を用いて収益を最大化する融資限度額の設定戦略が提案されている (So and Thomas [2, 3], Trench et al. [4])。しかし、So and Thomas [2, 3]や Trench et al. [4]では経済状況等の外部要因が変動することを想定していないため、常に固定の環境下における融資限度額の設定戦略しか検討できない。近年の経済状況の急激な変化に代表されるように経済状況に応じた融資限度額の設定戦略も重要な課題の一つである。

そこで、本研究では外部要因を考慮したマルコフ決定過程を用いて融資限度額の設定問題を定式化することによって、経済状況等の外部要因も加味した上で収益を最大化する融資限度額の設定戦略を提案する。

### 2 マルコフ決定過程の概要

ここでは、マルコフ決定過程 (森村・高橋[8]) の概要について説明する。最初にいくつかの定義を行う。

$s_i, s_j \in S$  はマルコフ決定過程における有限個の状態を示し,  $S, S = \{s_1, s_2, \dots, s_{|S|}\}$  は状態集合である ( $|S|$  は集合  $S$  の要素数を示す).  $a_i, a_j \in A$  は各状態において選択できるマルコフ決定過程の有限個の行動を示し,  $A, A = \{a_1, a_2, \dots, a_{|A|}\}$  は行動集合である.  $r(s_i, a_j)$  は状態  $s_i$  において行動  $a_j$  を選択した場合に得られるマルコフ決定過程における1期間の期待利得を示し,  $-\infty < r(s_i, a_j) < \infty$  である. マルコフ決定過程における利得の別の定義の仕方として, 状態  $s_i$  において行動  $a_j$  を選択して状態  $s_k$  へ遷移した場合に確定的に得られる利得  $r(s_i, a_j, s_k)$  を用いることもある. しかし, 本研究では対象とする融資限度額の設定問題の性質を考慮してTrench et al. [4]と同様に状態  $s_i$  において行動  $a_j$  を選択した場合の1期間の期待利得である  $r(s_i, a_j)$  が既知の場合(状態  $s_i$  において行動  $a_j$  を選択した場合の利得の期待値が既知の場合)を考える.  $p(s_k | s_i, a_j, \theta^*)$  はマルコフ決定過程における状態遷移確率を示し, 状態  $s_i$  において行動  $a_j$  を選択した条件のもとで状態  $s_k$  へ遷移する確率でパラメータ  $\theta^*$  によって支配されている. 図1に状態数および行動数が2のマルコフ決定過程の例を示す.

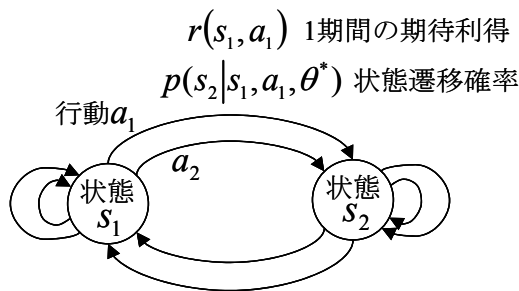


図1: マルコフ決定過程の例

マルコフ決定過程では行動選択, 利得獲得, 状態遷移を繰り返しながらなるべく多くの利得を得ることを目的とする. 繰り返す期間の長さ(回数)や総利得の計算の仕方によりマルコフ決定過程の問題はいくつかに分類されている. Trench et al. [4]および本研究では繰り返す期間が有限で得られる利得を割引総利得  $\sum_{i=1}^T \beta^{i-1} r(x_i, y_i)$  の期待値である期待割引総利得で評価するタイプのマルコフ決定過程問題を扱っている. ただし,  $\beta, 0 < \beta < 1$  は割引率,  $x_t, x_t \in S$  は  $t$  期の状態,  $y_t, y_t \in A$  は  $t$  期の行動,  $T$  は有限期間の長さを示す. So and Thomas [2, 3]では無限期間の場合を扱っている. また, So and Thomas [2, 3], Trench et al. [4]および本研究では状態遷移確率を支配する真のパラメータ  $\theta^*$ , 初期状態  $x_1$  および1期間の期待利得は既知, 2期以降の各期の状態  $x_t$  は観測可能という仮定を置いている. (So and Thomas [2, 3]およびTrench et al. [4]では実際の履歴データから真のパラメータ  $\theta^*$  を推定することについても言及しているが, 融資限度額の設定戦略の定式化の際には暗に真のパラメータ  $\theta^*$  既知と仮定して定式化している) なお, ここで説明しているマルコフ決定過程は外部要因を考慮していない場合であり, So and Thomas [2, 3]およびTrench et al. [4]で利用されているモデルである. 本研究

で利用する外部要因を考慮したマルコフ決定過程は真のパラメータ  $\theta^*$  が複数存在する場合に相当するが詳細は4.1項で説明する。

### 3 従来研究

#### 3.1 マルコフ決定過程と個人融資における融資限度額の設定問題の対応

従来研究としてTrench et al. [4]の研究について説明するにあたり最初にマルコフ決定過程と個人融資における融資限度額の設定問題の対応について説明する。

マルコフ決定過程における有限個の状態  $s_i$ ,  $s_i \in S$  が個人の顧客の格付けを示し、各状態において選択できるマルコフ決定過程の有限個の行動  $a_i$ ,  $a_i \in A$  が設定可能な融資限度額を選択肢を示し、マルコフ決定過程における1期間の期待利得  $r(s_i, a_j)$  は格付け  $s_i$  の個人の顧客に対して融資限度額を  $a_j$  に設定した場合の金融機関の1期間の収益の期待値を示し、状態遷移確率  $p(s_k | s_i, a_j, \theta^*)$  は格付け  $s_i$  の個人の顧客に対して融資限度額を  $a_j$  に設定した条件のもとで次の期に当該顧客が格付け  $s_k$  へ遷移する確率を示す。マルコフ決定過程における割引総利得  $\sum_{i=1}^T \beta^{i-1} r(x_i, y_i)$  は単に総収益を考えるのではなく、将来の収益を割引率  $\beta$  によって割引いて評価する総収益を考えることに相当する。なお、Trench et al. [4]でも本研究でも期待割引総利得の最大化を行っているが、割引率  $\beta$  を1に設定する（あるいは割引率  $\beta$  を削除する）ことによって将来の収益を割引かずに評価する総収益を最大化することもできる。

#### 3.2 従来研究で提案されている融資限度額の設定戦略

Trench et al. [4]では前項での定義のもとで  $T$  期間の期待割引総利得（将来の収益を割引いて評価する総収益の期待値）を最大にする融資限度額の設定戦略が動的計画法を用いて提案されている。なお、有限の  $T$  期間は金融機関と個人の顧客との間の契約期間を示すものではなく、あくまでも金融機関が期待割引総利得の最大化を検討したい期間である。一般的なクレジットカードのように、顧客への融資は  $T$  期間とは関係なく継続されるものである。提案されている設定戦略は次式のとおりである。

$$V(x_t, t) = \max_{y_t \in A} \left( r(x_t, y_t) + \beta \sum_{x_{t+1} \in S} p(x_{t+1} | x_t, y_t, \theta^*) V(x_{t+1}, t+1) \right). \quad (1)$$

式(1)は  $t$  期の格付けが  $x_t$  である個人の顧客に対して設定すべき限度額  $y_t$  を求めるために利用する式で、 $V(x_t, t)$  は  $t$  期に個人の顧客の格付けが  $x_t$  という条件のもとでの  $t$  期以降の期待割引総利得の最大値である。

式(1)は外部要因を考慮していないマルコフ決定過程における期待割引総利得の最大化を行っており、経済状況等の外部要因による影響は加味されていない。しかし、現実問題としては、経済状況が良好な場合には個人の顧客の格付けが良好な状態に遷移する傾向にあったり、経済

状況が悪い場合には個人の顧客の格付けが悪い状態に遷移する傾向が高まったりするなど外部要因の影響も重要な判断材料の一つである。

そこで、本研究では次の4節で外部要因を考慮したマルコフ決定過程を用いて融資限度額の設定問題を定式化することによって、経済状況等の外部要因も加味した上で収益を最大化する融資限度額の設定戦略を提案する。

## 4 外部要因を考慮したマルコフ決定過程を用いた融資限度額の設定戦略

### 4.1 外部要因を考慮したマルコフ決定過程と融資限度額の設定問題の対応

本研究でもマルコフ決定過程を用いるので基本的にはTrench et al. [4]での定義と同じだが、経済状況等の外部要因を加味するために本研究では特に外部要因を考慮したマルコフ決定過程を用いる。以下、Trench et al. [4]と重複する部分も多いがいくつかの定義を行う。

本研究でも  $T$  期間の期待割引総利得の最大化を目的とする。個人の顧客の格付けに相当するマルコフ決定過程の状態  $s_i$ ,  $s_i \in S$  および融資限度額の選択肢に相当するマルコフ決定過程の行動  $a_i$ ,  $a_i \in A$  はTrench et al. [4]と同様である。経済状況等を示す外部要因の有限個の状態を

$\theta_i^*$ ,  $\theta_i^* \in \Theta^*$  で表現し,  $\Theta^*$ ,  $\Theta^* = \left\{ \theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_{|\Theta^*|}^* \right\}$  は外部要因の状態集合で、外部要因の

状態は既知（各期で観測可能）である。 $r(s_i, a_j, \theta_k^*)$  は外部要因の状態が  $\theta_k^*$  のもとで格付け  $s_i$  の個人の顧客に対して融資限度額を  $a_j$  に設定した場合の金融機関の1期間の収益の期待値を示す1期間の期待利得である。 $p(s_k | s_i, a_j, \theta_l^*)$  は外部要因の状態が  $\theta_l^*$  のもとで格付け  $s_i$  の個人の顧客に対して融資限度額を  $a_j$  に設定した場合に次の期に当該顧客が格付け  $s_k$  へ遷移する確率を示すマルコフ決定過程における状態遷移確率である。 $p(\theta_j^* | \theta_i^*)$  は外部要因の状態変化を示すマルコフ連鎖の状態遷移確率で、外部要因の状態が  $\theta_i^*$  から次の期に  $\theta_j^*$  へ遷移する確率を表現しており、この確率分布  $p(\theta_j^* | \theta_i^*)$  も既知と仮定する。

### 4.2 本研究で提案する融資限度額の設定戦略

本研究では経済環境等の外部要因を加味するために外部要因を考慮したマルコフ決定過程を利用するが、外部要因を考慮したマルコフ決定過程の期待割引総利得の最大化も Trench et al. [4]における外部要因を考慮していないマルコフ決定過程の場合と同様に動的計画法を用いて  $T$  期から1期まで遡りながら解くことができる。以下では、動的計画法を用いて  $T$  期間の融資限度額の設定戦略を求めるための各期における処理を説明する。各期における処理は処理内容が異なる  $T$  期と  $t$  期 ( $1 \leq t < T$ ) に分けて説明する。

$T$  期には、 $T$  期の個人の顧客の格付けの状態  $x_T$ ,  $x_T \in S$  と  $T$  期の外部要因の状態  $z_T$ ,  $z_T \in \Theta^*$  の全ての組合せについて、 $T$  期の期待利得（最後の期の収益の期待値）の最大値

$V(x_T, z_T, T)$  と  $T$  期の期待利得を最大化するという意味で最適な融資限度額  $d^*(x_T, z_T, T)$  を以下のように求める。

$$V(x_T, z_T, T) = \max_{y_T \in A} r(x_T, y_T, z_T). \quad (2)$$

$$d^*(x_T, z_T, T) = \arg \max_{y_T \in A} r(x_T, y_T, z_T). \quad (3)$$

$t$  期 ( $1 \leq t < T$ ) には、 $t$  期の個人の顧客の格付けの状態  $x_t$ 、 $x_t \in S$  と  $t$  期の外部要因の状態  $z_t$ 、 $z_t \in \Theta^*$  の全ての組合せについて、 $t$  期以降の期待割引総利得（将来の収益を割り引いて評価した場合の  $t$  期以降の総収益の期待値）の最大値  $V(x_t, z_t, t)$  と  $t$  期以降の期待割引総利得を最大化するという意味で最適な融資限度額  $d^*(x_t, z_t, t)$  を以下のように求める。

$$V(x_t, z_t, t) = \max_{y_t \in A} \left( r(x_t, y_t, z_t) + \beta \sum_{x_{t+1} \in S} p(x_{t+1} | x_t, y_t, z_t) \sum_{z_{t+1} \in \Theta^*} p(z_{t+1} | z_t) V(x_{t+1}, z_{t+1}, t+1) \right). \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & d^*(x_t, z_t, t) \\ &= \arg \max_{y_t \in A} \left( r(x_t, y_t, z_t) + \beta \sum_{x_{t+1} \in S} p(x_{t+1} | x_t, y_t, z_t) \sum_{z_{t+1} \in \Theta^*} p(z_{t+1} | z_t) V(x_{t+1}, z_{t+1}, t+1) \right). \quad (5) \end{aligned}$$

上記のように動的計画法を用いて  $T$  期から 1 期まで遡りながら処理を行うことにより、外部要因を考慮した  $T$  期間の期待割引総利得を最大化する融資限度額の設定戦略を求めることができる。なお、数式における Trench et al. [4] との大きな差異は次の期の外部要因の状態について加重平均を計算している部分である。これは本研究では外部要因を考慮したマルコフ決定過程を利用して外部要因の状態遷移を考慮しているためである。

以上のように、本研究で提案した融資限度額の設定戦略は経済状況等の外部要因の変動を加味した  $T$  期間の期待割引総利得（将来の収益を割り引いて評価した場合の  $T$  期間の総収益の期待値）の最大化が可能な設定戦略である。

## 5 数値計算例

以下では、外部要因の状態遷移確率を増減させた場合にどのように  $T$  期間の期待割引総利得が変化するかについて数値計算例を示す。

数値計算例を計算するにあたって、So and Thomas [2] で公開されているイギリスの銀行のデータを参考にした。格付け状態については So and Thomas [2] で公開されている状態のうち意味付けが特に明確な部分を抜き出して次式のようにした。

$$S = \{S_4, S_3, S_2, S_1, R, D\}, \quad (6)$$

ただし、 $S_4$  から  $R$  までが So and Thomas [2]における状態に準拠し、 $S_4$  が最も良い格付けで  $S_3$ 、 $S_2$ 、 $S_1$  と順に格付けが下がり、さらにその下に危険な状態  $R$  (So and Thomas [2]における状態 *Risk* に相当) がある。  $D$  は返済不能になった後の吸収状態として本研究で追加した状態である。 融資限度額の選択肢 (マルコフ決定過程の行動集合) については So and Thomas [2] で公開されているデータから次式のようにした。

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}, \quad (7)$$

ただし、 $a_1$  は £ 500 以下、 $a_2$  は £ 501 以上 £ 1000 以下、 $a_3$  は £ 1001 以上 £ 1500 以下、 $a_4$  は £ 1501 以上 £ 2500 以下、 $a_5$  は £ 2501 以上 £ 3500 以下、 $a_6$  は £ 3501 以上 £ 4500 以下、 $a_7$  は £ 4501 以上 £ 5500 以下、 $a_8$  は £ 5501 以上を示す。 外部要因の状態集合は本研究で追加するもので、次式のようにした。

$$\Theta^* = \{\theta_1, \theta_2\}, \quad (8)$$

ただし、 $\theta_1$  は外部要因の状態が通常、 $\theta_2$  は外部要因の状態が悪い場合を示す。 格付け状態の遷移確率については、So and Thomas [2]で公開されているデータを外部要因の状態が通常の場合の格付け状態の遷移確率と仮定した。 今回は So and Thomas [2]で公開されている格付け状態集合の一部分を採用しているため、総和が1.0の確率分布になるように調整した。 その際に、So and Thomas [2]で遷移先として返済不能等を示す状態 *Bad* に割り振られている遷移確率を本研究における状態  $D$  に割り振った。 外部要因の状態が通常の場合の格付け状態の遷移確率を表 1 (本論末尾参照) に示す。 外部要因の状態が悪い場合の格付け状態の遷移確率については表 1 の遷移確率を基にして遷移先が  $S_4$  から  $S_1$  の確率を減少 (減少幅の最大が 0.1) させて、遷移先が  $R$  および  $D$  の確率を増加 (増加幅の最大が 0.1) させることによって準備した。 外部要因の状態が悪い場合の準備した格付け状態の遷移確率を表 2 (本論末尾参照) に示す。 1 期間の期待利得については、最初に So and Thomas [2]で公開されている格付け状態と限度額を固定したもとでの平均的な債務額に関する情報と、同じく So and Thomas [2]で公開されている金融機関の 1 期間の収益を算出する計算式を用いて金融機関の 1 期間の収益を計算した。 次に金融機関の 1 期間の収益の期待値を外部要因の状態が通常の場合の格付け状態の遷移確率および外部要因の状態が悪い場合の格付け状態の遷移確率を用いて計算することによって 1 期間の期待利得を計算した。 なお、計算の際には 1 期間を 1 ヶ月間とし、年利を 15% と仮定した。 外部要因の状態が通常の場合の 1 期間の期待利得の計算結果を表 3 (本論末尾参照) に、外部要因の状態が悪い場合の 1 期間の期待利得の計算結果を表 4 (本論末尾参照) に示す。 吸収状態である  $D$  が遷移元の場合の 1 期間の期待利得は 0 に設定してある。 ( $D$  は吸収状態であり、格付け状態が  $D$  の顧客に実際に融資限度額を設定するわけではない。)

上記のモデルについて、期待割引総利得の最大化を行う期間  $T = 60$ 、割引率  $\beta = 0.99$  とい

う条件のもとで外部要因の状態遷移確率  $p(\theta_1|\theta_1)$  および  $p(\theta_2|\theta_2)$  を増減させることによって期待割引総利得の最大値がどのように変化するか数値計算を行った結果を図2（本論末尾参照）から図4（本論末尾参照）に示す。なお、図2から図4中では  $p(\theta_1|\theta_1)$  を外部要因通常の再帰確率、 $p(\theta_2|\theta_2)$  を外部要因悪の再帰確率と記述している。

図2（本論末尾参照）は外部要因の状態遷移確率について  $p(\theta_1|\theta_1) = 0.7$  で固定したもとの、 $p(\theta_2|\theta_2)$  を0.1から0.9まで変化させた場合について格付けと外部要因の初期状態の全組合せ（格付けの吸収状態の  $D$  は除く）の期待割引総利得の変化を示している。 $p(\theta_2|\theta_2)$  の増加に伴い期間中の外部要因の状態が悪の滞在期間が長くなるため、 $p(\theta_2|\theta_2)$  の増加に伴って全ての初期状態の組合せについて期待割引総利得が減少している。期待割引総利得が0より大きい部分が金融機関として儲けが期待できる格付けと外部要因の初期状態の組合せである。逆に期待割引総利得が0以下の部分が金融機関として儲けが期待できない格付けと外部要因の初期状態の組合せである。

図3（本論末尾参照）は外部要因の状態遷移確率について  $p(\theta_2|\theta_2) = 0.5$  で固定したもとの、 $p(\theta_1|\theta_1)$  を0.1から0.9まで変化させた場合について格付けと外部要因の初期状態の全組合せ（格付けの吸収状態の  $D$  は除く）の期待割引総利得の変化を示している。 $p(\theta_1|\theta_1)$  の増加に伴い期間中の外部要因の状態が通常の滞在期間が長くなるため、 $p(\theta_1|\theta_1)$  の増加に伴って全ての初期状態の組合せについて期待割引総利得が増加している。期待割引総利得が0より大きい部分と0以下の部分の解釈は図2の場合と同じである。

図4（本論末尾参照）は外部要因の状態遷移確率について  $p(\theta_1|\theta_1) = p(\theta_2|\theta_2)$  という特殊な条件のもとで、 $p(\theta_1|\theta_1)$  および  $p(\theta_2|\theta_2)$  をともに0.1から0.9まで変化させた場合について格付けと外部要因の初期状態の全組合せ（格付けの吸収状態の  $D$  は除く）の期待割引総利得の変化を示している。この場合は  $p(\theta_1|\theta_1)$  および  $p(\theta_2|\theta_2)$  の増加に伴って、2期以降も外部要因の初期状態と同じ状態に引き続き滞在する期間が長くなる。本研究で扱っている問題は有限期間の割引問題なので、外部要因の初期状態と同じ状態が長く続くと期待割引総利得の値は外部要因の初期状態の影響を大きく受けることになる。そのため、外部要因の初期状態が通常の場合は  $p(\theta_1|\theta_1)$  および  $p(\theta_2|\theta_2)$  の増加に伴って期待割引総利得が増加し、外部要因の初期状態が悪い場合は  $p(\theta_1|\theta_1)$  および  $p(\theta_2|\theta_2)$  の増加に伴って期待割引総利得が減少している。期待割引総利得が0より大きい部分と0以下の部分の解釈は図2の場合と同じである。

## 6 まとめ

個人の顧客に対する融資業務における融資限度額の設定戦略については従来から研究されており、Trench et al. [4]では外部要因を考慮していないマルコフ決定過程を用いて有限期間の期待割引総利得（将来の収益を割引いて評価した場合の有限期間の総収益の期待値）を最大化する設定戦略が提案されている。しかし、外部要因を考慮していないマルコフ決定過程では経済状況等の外部要因による影響を加味することはできない。そこで、本研究では外部要因を考慮したマルコフ決定過程を用いて経済状況等の外部要因も加味した上で有限期間の期待割引総



利得を最大化する融資限度額の設定戦略を提案した。

一例ではあるが数値計算例によって、外部要因の状態遷移確率を増減させた場合の期待割引総利得の変化特性を確認した。今回は提案した融資限度額の設定戦略の基本的な性質を把握するために外部要因が通常と悪という2状態の場合の数値計算を実施したが、今後は経済環境が良好な状況など外部要因の状態が多数の場合についても検証を行いたい。

研究分野は異なるが、外部要因を考慮したマルコフ決定過程における制御問題は佐藤ら[7]でも研究されている。しかし、佐藤ら[7]では各期において状態遷移確率を支配する状態 $\theta_i^*$ を観測できない条件のもとで検討しているため本研究とは条件が異なっている。

本研究では確率分布 $p(s_k | s_i, a_j, \theta_i^*)$ および $p(\theta_j^* | \theta_i^*)$ を既知と仮定した場合を対象としたが、現実問題ではこれらの確率分布は未知である。よって、これらの確率分布が未知の場合についても今後の課題として検討したい。今回は期待効用の最大化のみを目的としたが、より現実的な場合を考えるためには金融機関のリスクを回避するための仕組みも重要である。今後は本研究の内容にリスク回避の仕組みについても加味して検討したい。また、顧客の格付けについて考えると既存の顧客は返済履歴などから格付けが行われているが、新規の顧客は申し込み時の書類審査などによって格付けが行われており、両者には何らかの違いがある可能性がある。そこで、新規の顧客に関する検討についても今後の課題としたい。

## 参考文献

- [1] McNeil, A.J., Frey, R., and Embrechts, P. (2005). *Quantitative Risk Management*, Princeton University Press.
- [2] So, M., and Thomas, L.C. (2007). Optimizing credit limit policies to maximize customer lifetime value. *Discussion Papers in Centre for Operational Research, Management Science and Information Systems*, Southampton, UK, University of Southampton, CORMSIS-07-06.
- [3] So, M., and Thomas, L.C. (2008). Modeling the profitability of credit cards by Markov decision processes. *Discussion Papers in Centre for Operational Research, Management Science and Information Systems*, Southampton, UK, University of Southampton, CORMSIS-09-09.
- [4] Trench, M., Pederson, S., Lau, E., Ma, L. and Nair, S. (2003). Managing Credit Lines and Prices for Bank One Credit Cards. *Interfaces*, **33**, 4-21.
- [5] 小野覚 (2002). 「金融リスクマネジメント」. 東洋経済新報社.
- [6] 木島正明, 小守林克哉, 阿久津なぎさ (2001). “格付け変動を利用した債権ポートフォリオの最適化”. 「オペレーションズ・リサーチ」, **46**, 614-621.
- [7] 佐藤光男, 竹田宏, 岩崎知己 (1989). “周期変動未知確率を含むマルコフ過程の推定と制御”. 「計測自動制御学会論文集」, **25**, 860-866.
- [8] 森村英典, 高橋幸雄 (1979). 「マルコフ解析」. 日科技連.

表 1. 格付け状態の遷移確率（外部要因の状態が通常の場合）（1/2）

限度額	遷移元	遷移先					
		$D$	$R$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$
$a_1$	$D$	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	$R$	0.264706	0.313726	0.421569	0.000000	0.000000	0.000000
	$S_1$	0.002419	0.001456	0.909605	0.079929	0.006315	0.000275
	$S_2$	0.000047	0.000000	0.187562	0.719244	0.085983	0.007165
	$S_3$	0.000000	0.000000	0.049667	0.280225	0.596000	0.074108
	$S_4$	0.000000	0.000000	0.011474	0.090649	0.378084	0.519793
$a_2$	$D$	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	$R$	0.213592	0.621360	0.165048	0.000000	0.000000	0.000000
	$S_1$	0.002891	0.001312	0.884732	0.093836	0.016305	0.000924
	$S_2$	0.000116	0.000000	0.163945	0.654380	0.157471	0.024087
	$S_3$	0.000000	0.000000	0.028568	0.147948	0.668052	0.155432
	$S_4$	0.000000	0.000000	0.009018	0.030421	0.313342	0.647219
$a_3$	$D$	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	$R$	0.231579	0.505263	0.263158	0.000000	0.000000	0.000000
	$S_1$	0.002250	0.001453	0.845464	0.129355	0.020054	0.001425
	$S_2$	0.000136	0.000034	0.140753	0.640837	0.184197	0.034043
	$S_3$	0.000000	0.000000	0.025805	0.136393	0.652452	0.185351
	$S_4$	0.000000	0.000000	0.009131	0.029757	0.274905	0.686207
$a_4$	$D$	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	$R$	0.160551	0.660550	0.178899	0.000000	0.000000	0.000000
	$S_1$	0.001755	0.001395	0.829196	0.145717	0.020033	0.001903
	$S_2$	0.000017	0.000000	0.124975	0.647547	0.195367	0.032094
	$S_3$	0.000000	0.000000	0.024444	0.131403	0.639517	0.204635
	$S_4$	0.000000	0.000000	0.007671	0.020793	0.228675	0.742861

表 1. 格付け状態の遷移確率 (外部要因の状態が通常の場合) (2/2)

限度額	遷移元	遷移先					
		$D$	$R$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$
$a_5$	$D$	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	$R$	0.320000	0.488000	0.192000	0.000000	0.000000	0.000000
	$S_1$	0.001678	0.001372	0.825539	0.150772	0.018715	0.001924
	$S_2$	0.000042	0.000000	0.129568	0.629154	0.207490	0.033747
	$S_3$	0.000014	0.000000	0.024484	0.123132	0.645019	0.207350
	$S_4$	0.000000	0.000000	0.007941	0.017721	0.192817	0.781520
$a_6$	$D$	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	$R$	0.302083	0.489584	0.208334	0.000000	0.000000	0.000000
	$S_1$	0.001529	0.001383	0.819329	0.156092	0.019460	0.002208
	$S_2$	0.000000	0.000000	0.130003	0.645088	0.196963	0.027946
	$S_3$	0.000000	0.000000	0.025812	0.113589	0.655275	0.205324
	$S_4$	0.000000	0.000000	0.008236	0.015531	0.175230	0.801003
$a_7$	$D$	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	$R$	0.213333	0.520000	0.266666	0.000000	0.000000	0.000000
	$S_1$	0.001226	0.001255	0.804602	0.167837	0.022239	0.002840
	$S_2$	0.000055	0.000000	0.124321	0.649260	0.194960	0.031404
	$S_3$	0.000020	0.000000	0.025876	0.111249	0.644839	0.218016
	$S_4$	0.000013	0.000000	0.007306	0.014732	0.157311	0.820637
$a_8$	$D$	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	$R$	0.444444	0.396826	0.158730	0.000000	0.000000	0.000000
	$S_1$	0.001294	0.000671	0.794465	0.179651	0.021186	0.002733
	$S_2$	0.000039	0.000000	0.116516	0.683248	0.176169	0.024029
	$S_3$	0.000010	0.000000	0.024296	0.115505	0.647864	0.212325
	$S_4$	0.000006	0.000000	0.006645	0.013176	0.124674	0.855498

表 2. 格付け状態の遷移確率（外部要因の状態が悪い場合）（1/2）

限度額	遷移元	遷移先					
		$D$	$R$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$
$a_1$	$D$	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	$R$	0.364706	0.313726	0.321569	0.000000	0.000000	0.000000
	$S_1$	0.052419	0.051456	0.859605	0.029929	0.006315	0.000275
	$S_2$	0.050047	0.050000	0.187562	0.669244	0.035983	0.007165
	$S_3$	0.050000	0.050000	0.049667	0.280225	0.546000	0.024108
	$S_4$	0.050000	0.050000	0.011474	0.090649	0.378084	0.419793
$a_2$	$D$	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	$R$	0.313592	0.621360	0.065048	0.000000	0.000000	0.000000
	$S_1$	0.052891	0.051312	0.834732	0.043836	0.016305	0.000924
	$S_2$	0.050116	0.050000	0.163945	0.604380	0.107471	0.024087
	$S_3$	0.050000	0.050000	0.028568	0.147948	0.618052	0.105432
	$S_4$	0.050000	0.050000	0.009018	0.030421	0.313342	0.547219
$a_3$	$D$	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	$R$	0.331579	0.505263	0.163158	0.000000	0.000000	0.000000
	$S_1$	0.052250	0.051453	0.795464	0.079355	0.020054	0.001425
	$S_2$	0.050136	0.050034	0.140753	0.590837	0.134197	0.034043
	$S_3$	0.050000	0.050000	0.025805	0.136393	0.602452	0.135351
	$S_4$	0.050000	0.050000	0.009131	0.029757	0.274905	0.586207
$a_4$	$D$	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	$R$	0.260551	0.660550	0.078899	0.000000	0.000000	0.000000
	$S_1$	0.051755	0.051395	0.779196	0.095717	0.020033	0.001903
	$S_2$	0.050017	0.050000	0.124975	0.597547	0.145367	0.032094
	$S_3$	0.050000	0.050000	0.024444	0.131403	0.589517	0.154635
	$S_4$	0.050000	0.050000	0.007671	0.020793	0.228675	0.642861

表 2. 格付け状態の遷移確率 (外部要因の状態が悪い場合) (2/2)

限度額	遷移元	遷移先					
		$D$	$R$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$
$a_5$	$D$	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	$R$	0.420000	0.488000	0.092000	0.000000	0.000000	0.000000
	$S_1$	0.051678	0.051372	0.775539	0.100772	0.018715	0.001924
	$S_2$	0.050042	0.050000	0.129568	0.579154	0.157490	0.033747
	$S_3$	0.050014	0.050000	0.024484	0.123132	0.595019	0.157350
	$S_4$	0.050000	0.050000	0.007941	0.017721	0.192817	0.681520
$a_6$	$D$	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	$R$	0.402083	0.489584	0.108334	0.000000	0.000000	0.000000
	$S_1$	0.051529	0.051383	0.769329	0.106092	0.019460	0.002208
	$S_2$	0.050000	0.050000	0.130003	0.595088	0.146963	0.027946
	$S_3$	0.050000	0.050000	0.025812	0.113589	0.605275	0.155324
	$S_4$	0.050000	0.050000	0.008236	0.015531	0.175230	0.701003
$a_7$	$D$	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	$R$	0.313333	0.520000	0.166666	0.000000	0.000000	0.000000
	$S_1$	0.051226	0.051255	0.754602	0.117837	0.022239	0.002840
	$S_2$	0.050055	0.050000	0.124321	0.599260	0.144960	0.031404
	$S_3$	0.050020	0.050000	0.025876	0.111249	0.594839	0.168016
	$S_4$	0.050013	0.050000	0.007306	0.014732	0.157311	0.720637
$a_8$	$D$	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	$R$	0.544444	0.396826	0.058730	0.000000	0.000000	0.000000
	$S_1$	0.051294	0.050671	0.744465	0.129651	0.021186	0.002733
	$S_2$	0.050039	0.050000	0.116516	0.633248	0.126169	0.024029
	$S_3$	0.050010	0.050000	0.024296	0.115505	0.597864	0.162325
	$S_4$	0.050006	0.050000	0.006645	0.013176	0.124674	0.755498

表 3. 外部要因の状態が通常の場合の1期間の期待利得 (単位: £)

限度額	遷移元					
	$D$	$R$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$
$a_1$	0.00	-93.01	3.29	1.36	0.91	0.63
$a_2$	0.00	-149.15	5.48	3.12	1.10	0.80
$a_3$	0.00	-239.07	7.53	3.20	1.33	0.99
$a_4$	0.00	-234.24	10.07	4.61	1.99	1.66
$a_5$	0.00	-677.82	14.71	8.32	3.30	2.34
$a_6$	0.00	-803.22	18.25	11.48	4.88	3.39
$a_7$	0.00	-782.25	22.07	14.70	6.28	4.30
$a_8$	0.00	-2502.93	33.76	26.43	12.27	9.10

表 4. 外部要因の状態が悪い場合の1期間の期待利得 (単位: £)

限度額	遷移元					
	$D$	$R$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$
$a_1$	0.00	-129.86	-13.27	-4.16	-2.78	-1.91
$a_2$	0.00	-223.27	-23.48	-9.64	-3.36	-2.44
$a_3$	0.00	-348.11	-29.78	-9.91	-4.04	-3.01
$a_4$	0.00	-392.29	-37.47	-14.07	-6.06	-5.07
$a_5$	0.00	-898.14	-54.24	-25.50	-10.07	-7.13
$a_6$	0.00	-1080.44	-66.10	-35.00	-14.87	-10.33
$a_7$	0.00	-1171.46	-77.16	-45.09	-19.19	-13.12
$a_8$	0.00	-3082.19	-118.98	-80.95	-37.45	-27.76

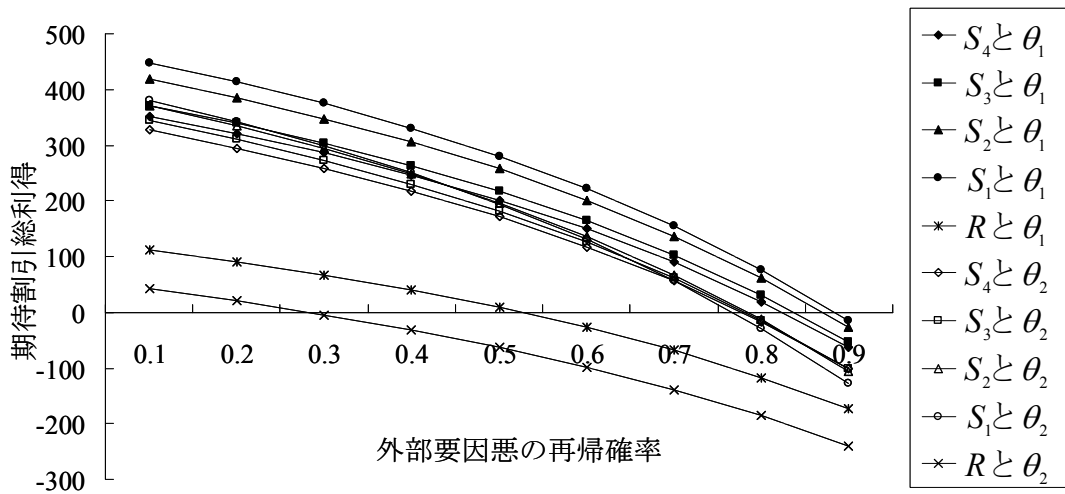


図2: 外部要因通常のリ帰確率を0.7に固定した場合の期待割引総利得の変化

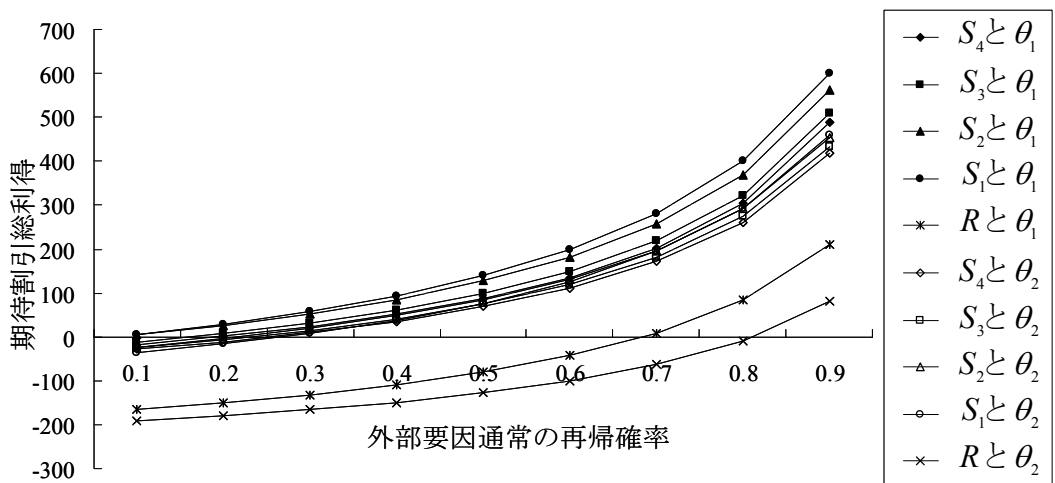


図3: 外部要因悪のリ帰確率を0.5に固定した場合の期待割引総利得の変化

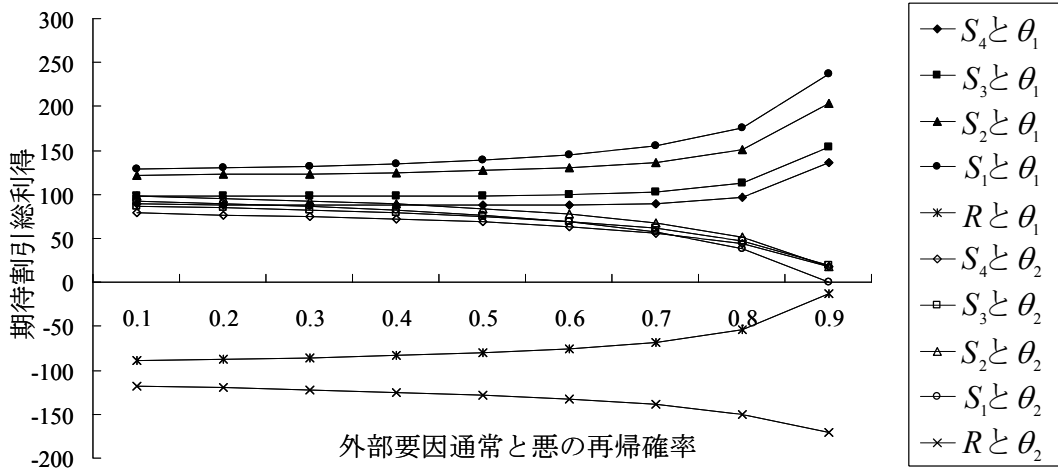


図 4: 外部要因通常と悪の再帰確率を等しく増減させた場合の期待割引総利得の変化