

節腹連続河道の形成に関する線形安定解析

Linear Stability Analysis on Channel with Periodic Width Variations

渡邊康玄¹・長谷川和義²・吉川泰弘³・早川博¹

Yasuharu WATANABE, Kazuyoshi HASEGAWA, Yasuhiro YOSHIKAWA
and Hiroshi HAYAKAWA

¹ 正会員 博(工) 北見工業大学教授 工学部社会環境工学科 (〒090-8507 北見市公園町 165)

² フェロー会員 工博 北開水工コンサルタント 先端技術開発センター (〒060-0005 札幌市中央区北 5 西 6)

³ 正会員 博(工) 北見工業大学助教 工学部社会環境工学科 (〒090-8507 北見市公園町 165)

In rivers which formed multi-row bars or braided rivers, riverbanks often have wavy shape on a scale of several times of river width. In such rivers, a wide width part (anti-node) and a narrow part (node) appear by turns in the longitudinal direction. The elucidation of this phenomenon accompanied by bank erosion is very important on river management works. However, the formation mechanism of a gourd type channel has not been clarified. This research conducts a linear stability analysis as the first step which clarifies the formation mechanism of such channels. As a result, it became clear that a gourd type wavelength is changed with hydraulic conditions.

Key Words: *Gourd shaped channel, stability analysis, channel shape, braided river*

1. はじめに

河道の平面形状の形成機構を理解することは、河道の維持を考えるうえで不可欠な事項であり、治水や河川環境の基本事項となっている。河道の平面形状には、一般に考えられているものとして蛇行流路や網状流路が挙げられ、これらの形成機構の解明や河道内での諸現象についての研究が進められている。また、改修後の河道における現象の解明のため、直線流路における研究も進められてきている。

湾曲河道の形成機構に関する研究では、河道内に形成される交互砂州による流れの蛇行により形成されることを木下¹⁾が指摘している。また、Blondeaux & Seminara²⁾は、河道の平面不安定により蛇行が形成されるとの観点から、直線河道に微小振幅を持つ蛇行形状を与え、安定解析手法を用いて蛇行の発達現象を論じている。島田・清水・長谷川³⁾は、木下の交互砂州の形成に伴う蛇行の発達に着目し、Blondox & Seminara らの理論において砂州形成の影響を過小に見積もっている可能性があることを指摘し、砂州の形成に伴う流れと河床の攪乱から蛇行の発達について河岸浸食を取り込んだ安定解析を行っている。また、Uddin, Izumi & Hasegawa⁴⁾は、河岸浸食を考慮した交互砂州の安定解析を実施し、河岸浸食により交互砂州が発生しやすくなることを明らかにしている。さらに、清水⁵⁾は数値シミュレーションを用いて蛇行の発達に関する現象の再現について、1996 年以降系統的な研究を進めている。このように、蛇行流路の形成過程については、様々な角度から研究が進められ、現象の解明が確実に進んでいる。

一方、網状流路に関しては、藤田ら⁶⁾が複列砂州と網状流路との関係を実験的に明らかにしている。また、網状流路の中に形成されている蛇行流路については、竹林ら⁷⁾が自己形成流路として水理実験や数値計算により現象を解明している。また、島・渡邊⁸⁾は、網状流路における砂州と平面不安定の関係について水理実験結果と理論解析結果との比較から論じてきており、網状流路の形成機構についても研究が進められてきている。

しかしながら、図-1 に示されるような網状河川にみられる川幅が連続して変化する節腹連続河道に関しては、形成機構を踏まえた十分な現象解明が行われていない。このような河川の平面形状をみると、流路が収束し川幅が狭くなっている箇所(節)と流路が分散し河原が広く存在している箇所(腹)が交互に存在し、流路と植生が分布する河岸の縦断形状が波状になっていることが特徴となっている。扇状地河川にみられる網状あるいは多列砂州が形成された河川では、近年特に樹林化が顕著になっており、流水阻害や自然環境の変化に対して早急な対策が求められており、河道の形状や移動に関する知見が求められている。また、川幅の狭い部分を持つことから、河道内の貯留効果も存在する。このように、網状流路における節腹連続河道の形成機構の解明は、治水上も環境上も重要な事項となっている。本研究では、節腹連続河道の形成機構を解明する第一歩として、河岸浸食を伴う交互砂州の発生を議論している島田・清水・長谷川³⁾および Uddin, Izumi & Hasegawa⁴⁾の研究の成果も踏まえ、その発生機構に関し線形安定解析を実施し、側岸が浸食することがも

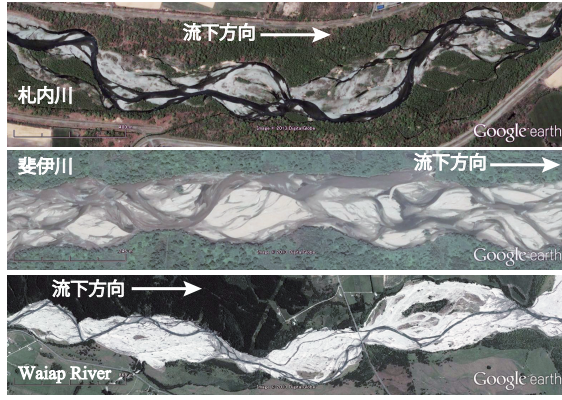


図-1 河川における節腹連続河道の状況

たらず効果を固定壁水路の場合との違いから，河岸浸食による平面形状変化への移行過程に焦点を当てて考察を行ったものである．

2. 線形安定解析

線形安定解析では，非線形効果を含む実現象を十分に表現できないものの，現象の初期変動がどのように生じるかといった現象の基本的理解が可能となる．このことから，節腹連続河道の形成に対する河岸浸食の影響を把握する目的で線形安定解析を実施する．

(1) 基礎式と河岸浸食モデル

河床や河岸の時間変化が流れの時間変化に比べて極めて遅いものとして扱い，流れについては定常の浅水方程式で表されるものとする．川幅 $2\bar{B}$ の直線水路における拡散項を省略した定常 2 次元浅水流式と連続の式および掃流砂を対象とした流砂連続式は， \bar{x} 軸を流下方向に \bar{y} 軸を横断方向にとる直交座標系において，式 (1)～(4) で表される．

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \bar{g} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{x}} + \frac{\bar{\tau}_x}{\bar{\rho} \bar{D}} = 0 \quad (1)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \bar{g} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{y}} + \frac{\bar{\tau}_y}{\bar{\rho} \bar{D}} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial (\bar{u} \bar{D})}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial (\bar{v} \bar{D})}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial (\bar{H} - \bar{D})}{\partial \bar{t}} + \frac{1}{1-p} \left(\frac{\partial \bar{q}_{bx}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{q}_{by}}{\partial \bar{y}} \right) = 0 \quad (4)$$

ここで， \bar{t} ；時間， \bar{u} および \bar{v} ；それぞれ \bar{x} 軸方向および \bar{y} 軸方向の流速， \bar{H} ；水位， \bar{D} ；水深， $\bar{H} - \bar{D}$ ；河床高， \bar{q}_{bx} および \bar{q}_{by} ；それぞれ \bar{x} 軸方向および \bar{y} 軸方向の掃流砂量， $\bar{\rho}$ ；水の密度， \bar{g} ；重力加速度， p ；河床の空隙率である．また， $\bar{\tau}_x$ および $\bar{\tau}_y$ は，それぞれ \bar{x} 軸方向および \bar{y} 軸方向の河床剪断力であり，式 (5) で表される．なお，各記号に付されている \sim は次元を有していることを表す記号である．

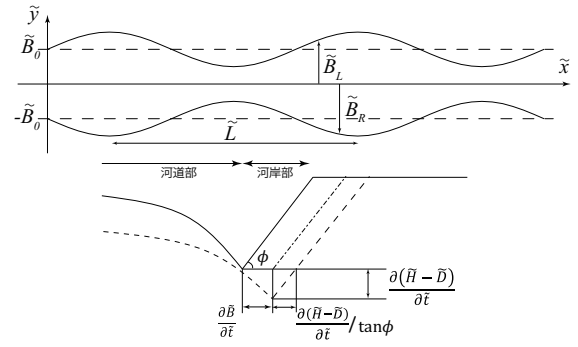


図-2 座標系と河岸浸食模式図

$$\bar{\tau}_x = \rho C_f \bar{u} \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}, \quad \bar{\tau}_y = \rho C_f \bar{v} \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2} \quad (5)$$

ここで， C_f ；摩擦係数であり，次式で定義される．

$$C_f = \frac{\bar{\tau}_x}{\bar{\rho} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2)}$$

河岸が流水の作用により浸食される現象を扱うためには，河岸の移動と水理量との関係を導入することとなる．また，河岸における河床低下によっても河岸が崩落することとなる．図-2 は，本論文における河道形状と河岸浸食の考え方を示したものである．河岸の移動は，図における河床部と河岸部の境界として定義することとする．すなわち，河床の低下に伴う河岸の崩落は，河岸の移動には寄与せず，河岸からの土砂の供給源として働くこととなる．

河岸の移動に関して，河岸斜面上の掃流による Parker ら¹⁰⁾ のモデルが存在する．Uddin, Izumi & Hasegawa⁴⁾ は，単純化して河岸浸食が河岸における河床剪断力に比例するとして検討を行っている．一方，長谷川⁹⁾ は河岸の移動に関して，石狩川の過去の河道の移動を分析し，河岸近傍の偏倚流速と河道の移動速度との間に比例関係がありその比例定数は 10^{-4} オーダーであることを示している．なお，偏倚流速とは，平均流速からの偏差である．ここでは単純ではあるが，河川データによって裏付けされた，偏倚流速に河岸の移動が比例するという式 (6) を採用することとした．

$$\frac{\partial \bar{B}_L}{\partial \bar{t}} = \alpha (\bar{u}_L - \bar{u}_0), \quad \frac{\partial \bar{B}_R}{\partial \bar{t}} = -\alpha (\bar{u}_R - \bar{u}_0) \quad (6)$$

ここで， \bar{B}_L および \bar{B}_R ；それぞれ左岸および右岸の \bar{y} 軸に関する位置， α ；河岸横断方向移動速度と偏倚流速を結びつける比例定数， \bar{u}_L および \bar{u}_R ；それぞれ左岸および右岸における \bar{x} 軸方向の流速， \bar{u}_0 ；平均流速である．

本論文では掃流砂のみを扱うこととし， \bar{x} 軸方向の流砂量式には Meyer-Peter & Müller の式 (7) を， \bar{y} 軸方向流砂量式には長谷川の式に流線の曲りの影響を組み込んだ式 (8) で表される Mosselman の式¹¹⁾ をそれぞれ用いることとした．

$$\bar{q}_{bx} = 8 (\theta - \theta_c)^{3/2} \sqrt{sg \bar{d}_s^3} \quad (7)$$

$$\widetilde{q}_{by} = \widetilde{q}_{bx} \left\{ \frac{\widetilde{v}}{\widetilde{u}} + N \frac{\widetilde{D}}{\widetilde{u}} \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial \widetilde{x}} - \frac{r}{\theta^{1/2}} \frac{1}{\beta} \frac{\partial (\widetilde{H} - \widetilde{D})}{\partial \widetilde{y}} \right\} \quad (8)$$

ここで,

$$r = \sqrt{\frac{\theta_c}{\mu_s \mu_k}}$$

また, θ ; 無次元掃流力, θ_c ; 限界無次元掃流力, s ; 河床材料の水中比重, \widetilde{d}_s ; 河床材料の粒径, N ; 2次流の強さを表すパラメータ, μ_s ; 静止摩擦係数, μ_k ; 動摩擦係数である. 一方, 抵抗則としては, 平坦河床からの河道変化を扱うことから平坦河床を対象とした Engelund の式 (9) を採用する.

$$C_f = \frac{1}{\left(6.0 + 2.5 \ln \frac{\widetilde{D}}{2.5 \widetilde{d}_s}\right)^2} \quad (9)$$

基礎式を解くにあたって用いる境界条件は, 河岸の移動に伴う横断方向の流速に関する式 (10) で表される運動学的条件と, 式 (11) で表される河岸の移動に伴って生じる土砂供給量が河岸の横断方向流砂量に等しいとする条件である.

$$\frac{\partial \widetilde{B}_L}{\partial t} + \widetilde{u}_L \frac{\partial \widetilde{B}_L}{\partial \widetilde{x}} = \widetilde{v}_L, \quad \frac{\partial \widetilde{B}_R}{\partial t} + \widetilde{u}_R \frac{\partial \widetilde{B}_R}{\partial \widetilde{x}} = \widetilde{v}_R \quad (10)$$

$$-\frac{\widetilde{q}_{sL}}{1-p} = \left\{ \frac{\partial \widetilde{B}_L}{\partial t} - \frac{1}{\tan \phi} \frac{\partial (\widetilde{H} - \widetilde{D})}{\partial t} \right\} \left\{ \widetilde{K} - (\widetilde{H} - \widetilde{D}) \right\},$$

$$\frac{\widetilde{q}_{sR}}{1-p} = \left\{ -\frac{\partial \widetilde{B}_R}{\partial t} - \frac{1}{\tan \phi} \frac{\partial (\widetilde{H} - \widetilde{D})}{\partial t} \right\} \left\{ \widetilde{K} - (\widetilde{H} - \widetilde{D}) \right\} \quad (11)$$

ここで, \widetilde{q}_{sL} および \widetilde{q}_{sR} ; それぞれ左岸および右岸からの \widetilde{y} 軸方向の土砂供給量, ϕ ; 河岸斜面の水平面からの角度, \widetilde{K} ; 氾濫原の高さである.

さらに, 式 (12) で表される河岸が移動して川幅が変化しても流量 \widetilde{Q} は変化しない条件も存在する.

$$\int_{\widetilde{B}_R}^{\widetilde{B}_L} (\widetilde{u} \widetilde{D}) d\widetilde{y} = \widetilde{Q} \quad (12)$$

(2) 無次元化と微小攪乱の時間増幅率の導出

基礎式である式 (1) ~ (4) は, 川幅が変化しない平坦河床上の等流の諸元を基に, $(u, v) = (\widetilde{u}, \widetilde{v}) / \widetilde{u}_0$, $D = \widetilde{D} / \widetilde{D}_0$, $H = \widetilde{H} / (F_0^2 \widetilde{D}_0)$, $(q_{bx}, q_{by}) = (\widetilde{q}_{bx}, \widetilde{q}_{by}) / (\widetilde{s} \widetilde{g} \widetilde{d}_0^3)^{1/2}$, $(\tau_x, \tau_y) = (\widetilde{\tau}_x, \widetilde{\tau}_y) / (\rho \widetilde{u}_0^2)$, $(x, y) = (\widetilde{x}, \widetilde{y}) / \widetilde{B}_0$, $t = \widetilde{t} / (\widetilde{B}_0 / \widetilde{u}_0)$ で無次元化を行うと, 式 (13) ~ (16) となる. ここで, \widetilde{B}_0 は初期の川幅の 1/2 であり, その他の記号の添え字 $_0$ は等流時の値を示している.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} + \beta \frac{\tau_x}{D} = 0 \quad (13)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial y} + \beta \frac{\tau_y}{D} = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial (uD)}{\partial x} + \frac{\partial (vD)}{\partial y} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial (F_0^2 H - D)}{\partial t} + M \left(\frac{\partial q_{bx}}{\partial x} + \frac{\partial q_{by}}{\partial y} \right) = 0 \quad (16)$$

ここで,

$$\beta = \frac{\widetilde{B}_0}{\widetilde{D}_0}, \quad F_0 = \frac{\widetilde{u}_0}{\sqrt{\widetilde{s} \widetilde{g} \widetilde{D}_0}}, \quad M = \sqrt{\frac{\widetilde{d}_s^3 s}{F_0^2}} \frac{1}{1-p}$$

である. さらに $(B_L, B_R) = (\widetilde{B}_L, \widetilde{B}_R) / \widetilde{B}_0$, $(u_L, u_R) = (\widetilde{u}_L, \widetilde{u}_R) / \widetilde{u}_0$, $(v_L, v_R) = (\widetilde{v}_L, \widetilde{v}_R) / \widetilde{u}_0$, $(q_{sL}, q_{sR}) = (\widetilde{q}_{sL}, \widetilde{q}_{sR}) / \sqrt{\widetilde{s} \widetilde{g} \widetilde{d}_s^3}$, $K = \widetilde{K} / (F_0^2 \widetilde{D}_0)$ を用いると, 河岸の浸食モデルおよび境界条件の各式は式 (17) および式 (18) ~ (20) のように無次元化される.

$$\frac{\partial B_L}{\partial t} = \alpha (u_L - 1), \quad \frac{\partial B_R}{\partial t} = -\alpha (u_R - 1) \quad (17)$$

$$\frac{\partial B_L}{\partial t} + u_L \frac{\partial B_L}{\partial x} = v_L, \quad \frac{\partial B_R}{\partial t} + u_R \frac{\partial B_R}{\partial x} = v_R \quad (18)$$

$$-M q_{sL} = \left\{ \frac{\partial B_L}{\partial t} - \frac{1}{\beta \tan \phi} \frac{\partial (F_0^2 H - D)}{\partial t} \right\} \left\{ F_0^2 K - (F_0^2 H - D) \right\},$$

$$M q_{sR} = \left\{ -\frac{\partial B_R}{\partial t} - \frac{1}{\beta \tan \phi} \frac{\partial (F_0^2 H - D)}{\partial t} \right\} \left\{ F_0^2 K - (F_0^2 H - D) \right\} \quad (19)$$

$$\int_{B_R}^{B_L} u D = 1 \quad (20)$$

また, 横断方向流砂量式は, 式 (21) となる.

$$q_{by} = \frac{v}{u} + \frac{N D}{\beta u} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{r}{\beta \theta^{1/2}} \frac{\partial (F_0^2 H - D)}{\partial y} \quad (21)$$

u, v, D, H に関して, 式 (22) の様に等流時の値と摂動量に分けて検討を行う.

$$(u, v, H, D) = (1, 0, H_0, 1) + \varepsilon (u_1, v_1, H_1, D_1) \quad (22)$$

ここで, ε は, 摂動パラメータである. 式 (22) を基礎式に代入し整理すると, ε の 1 次のオーダーに関する基礎式が式 (23) ~ (26) として得られる.

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial H_1}{\partial x} + \beta (\tau_{x1} - \tau_{x0} D_1) = 0 \quad (23)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial H_1}{\partial y} + \beta \tau_{y1} = 0 \quad (24)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \quad (25)$$

$$\frac{\partial (F_0^2 H_1 - D_1)}{\partial t} + M \left(\frac{\partial q_{bx1}}{\partial x} + \frac{\partial q_{by1}}{\partial y} \right) = 0 \quad (26)$$

また, C_f に関しては, 式 (9) で与えているが, ここでは抵抗則の変更も可能となるよう一般的な表現として θ と D の関数形で表されるものとして摂動展開しておくことにする.

$$C_f = C_{f0} + \varepsilon C_{f0} \left(\frac{2C_{fT}}{1 - C_{fT}} u_1 + \frac{C_{fD}}{1 - C_{fT}} D_1 \right) \quad (27)$$

ここで,

$$C_{fT} = \frac{\theta_0}{C_{f0}} \frac{\partial C_f}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0}, \quad C_{fD} = \frac{1}{C_{f0}} \frac{\partial C_f}{\partial D} \Big|_{D=1}$$

式 (27) を用いると, τ_x および τ_y は式 (28) および (29) となる.

$$\tau_x = C_{f0} + \varepsilon C_{f0} \left(\frac{2}{1 - C_{fT}} u_1 + \frac{C_{fD}}{1 - C_{fT}} D_1 \right) \quad (28)$$

$$\tau_y = \varepsilon C_{f0} v_1 \quad (29)$$

流砂量式に関しても q_{bx} を一般的な表現として θ と D の関数形で表されるものとして式 (30) のように摂動展開する.

$$q_{bx} = q_{b0} + \varepsilon q_{b0} \left\{ \frac{2q_{bT}}{1 - C_{fT}} u_1 + \left(\frac{C_{fD} q_{bT}}{1 - C_{fT}} + q_{bD} \right) D_1 \right\} \quad (30)$$

ここで,

$$q_{bT} = \frac{\theta_0}{q_{b0}} \frac{\partial q_b}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0}, \quad q_{bD} = \frac{1}{q_{b0}} \frac{\partial q_b}{\partial D} \Big|_{D=1}$$

同様に, q_{by} は, 式 (31) となる.

$$q_{by} = \varepsilon q_{b0} \left\{ v_1 + \frac{N}{\beta} \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{r}{\beta} \frac{1}{\theta_0^{1/2}} \frac{\partial (F_0^2 H_1 - D_1)}{\partial y} \right\} \quad (31)$$

なお, 等流時の状態から変化する流れを扱っていることから θ も式 (32) となる.

$$\theta = \theta_0 + \varepsilon \left(\frac{2}{1 - C_{fT}} u_1 + \frac{C_{fD}}{1 - C_{fT}} D_1 \right) \quad (32)$$

浸食モデルおよび境界条件は, それぞれ式 (33) および式 (34) ~ (36) となる.

$$\frac{\partial B_{L1}}{\partial t} = \alpha u_{L1}, \quad \frac{\partial B_{R1}}{\partial t} = -\alpha u_{R1} \quad (33)$$

$$\frac{\partial B_{L1}}{\partial t} + \frac{\partial B_{L1}}{\partial x} = v_{L1}, \quad \frac{\partial B_{R1}}{\partial t} + \frac{\partial B_{R1}}{\partial x} = v_{R1} \quad (34)$$

$$-Mq_{sL1} = \left\{ \frac{\partial B_{L1}}{\partial t} - \frac{1}{\beta \tan \phi} \frac{\partial (F_0^2 H_1 - D_1)}{\partial t} \right\} \left\{ F_0^2 K - (F_0^2 H_0 - 1) \right\},$$

$$Mq_{sR1} = \left\{ -\frac{\partial B_{L1}}{\partial t} - \frac{1}{\beta \tan \phi} \frac{\partial (F_0^2 H_1 - D_1)}{\partial t} \right\} \left\{ F_0^2 K - (F_0^2 H_0 - 1) \right\} \quad (35)$$

$$\int_{-1}^1 (u_1 D_1) dy + B_{L1} - B_{R1} = 0 \quad (36)$$

(3) 安定解析

ε の 1 次のオーダーに関する摂動量として, x 軸方向に波長 \tilde{L} の周期をもつ式 (37) を考える.

$$(u_1, v_1, D_1, H_1) = (\bar{u}_1, \bar{v}_1, \bar{D}_1, \bar{H}_1) \exp[i(\lambda x - \omega t)] + c.c. \quad (37)$$

ここで, $\bar{u}_1, \bar{v}_1, \bar{D}_1$ および \bar{H}_1 は, y 軸方向の関数である. また, i ; 虚数単位, λ ; 縦断方向の波数 ($= 2\pi \tilde{B}_0 / \tilde{L}$),

ω ; 角速度, $c.c.$; 直前の項の共役複素数である. 式 (37) を, 式 (23) ~ (26) に式 (28) ~ (31) の関係を用いて代入し整理すると, ε の 1 次のオーダーに関する式 (38) が得られる.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ a_{31} & \frac{\partial}{\partial y} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} \frac{\partial}{\partial y} & a_{431} + a_{432} \frac{\partial^2}{\partial y^2} & a_{441} + a_{442} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{H}_1 \\ \bar{D}_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (38)$$

ここで, $a_{11} = i\lambda + \beta C_{f0} \frac{2}{1 - C_{fT}}$, $a_{13} = \beta C_{f0} \left(\frac{C_{fD}}{1 - C_{fT}} - 1 \right)$, $a_{14} = i\lambda$, $a_{22} = i\lambda + \beta C_{f0}$, $a_{31} = i\lambda$, $a_{33} = i\lambda$, $a_{41} = i\lambda M q_{b0} \frac{2q_{bT}}{1 - C_{fT}}$, $a_{42} = M q_{b0} \left(1 + i\lambda \frac{N}{\beta} \right)$, $a_{431} = i\omega + M q_{b0} \left\{ i\lambda \left(\frac{C_{fD} q_{bT}}{1 - C_{fT}} + q_{bD} \right) \right\}$, $a_{432} = M q_{b0} \frac{r}{\beta \theta_0^{1/2}}$, $a_{441} = -i\omega F_0^2$, $a_{442} = -M q_{b0} \frac{r}{\beta \theta_0^{1/2}} F_0^2$ である.

式 (38) を \bar{v}_1 で整理すると, 式 (39) の 4 階の微分方程式が得られる.

$$\frac{\partial^4}{\partial y^4} \bar{v}_1 + A_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \bar{v}_1 + A_2 \bar{v}_1 = 0 \quad (39)$$

ここで, A_1 および A_2 は, 次式で表される.

$$A_1 = \frac{1}{a_{11} a_{432}} \{ a_{14} a_{22} a_{31} a_{432} - a_{13} (a_{41} - a_{31} a_{42} + a_{22} a_{31} a_{442}) + a_{11} (-a_{33} a_{42} + a_{431} + a_{22} a_{33} a_{442}) \}$$

$$A_2 = \frac{a_{22}}{a_{11} a_{432}} (-a_{14} a_{33} a_{41} + a_{14} a_{31} a_{431} - a_{13} a_{31} a_{441} + a_{11} a_{33} a_{441})$$

式 (39) の一般解として, 4 つの積分定数 C_1, C_2, C_3 および C_4 を持つ式 (40) を得る.

$$\bar{v}_1 = C_1 \exp(J_1 y) + C_2 \exp(-J_1 y) + C_3 \exp(J_2 y) + C_4 \exp(-J_2 y) \quad (40)$$

ここで,

$$J_1 = \sqrt{\frac{-A_1 - \sqrt{A_1^2 - 4A_2}}{2}}, \quad J_2 = \sqrt{\frac{-A_1 + \sqrt{A_1^2 - 4A_2}}{2}}$$

本論文で扱う節腹連続河道は, x 軸に対して対称の現象を考えていることから, 4 つの積分定数の間には, 次の関係が存在する.

$$C_2 = -C_1, \quad C_4 = C_3$$

したがって, 式 (40) は, 式 (41) で表される.

$$\bar{v}_1 = C_1 \mathbf{E}_{m1} + C_3 \mathbf{E}_{m2} \quad (41)$$

ここで,

$$\mathbf{E}_{mj} = \exp(J_j y) - \exp(-J_j y)$$

式 (38) に式 (41) を代入することにより, $\bar{H}_1, \bar{u}_1, \bar{D}_1$ が

表-1 水理実験条件と形成された複列砂州の波数

実験名	β	d_s	θ	λ
S-20	39.1	0.066	0.109	1.05
S-40	27.4	0.045	0.156	0.99

式 (42) ~ (44) として得られる．

$$\bar{H}_1 = C_{H1}C_1E_{p1} + C_{H2}C_3E_{p2} + C_5 \quad (42)$$

$$\bar{u}_1 = C_{u1}C_1E_{p1} + C_{u2}C_3E_{p2} + C_uC_5 \quad (43)$$

$$\bar{D}_1 = C_{D1}C_1E_{p1} + C_{D2}C_3E_{p2} + C_DC_5 \quad (44)$$

ここで，

$$E_{pj} = \exp(J_j y) + \exp(-J_j y) \quad , \quad C_{Hj} = -\frac{a_{22}}{J_j}$$

$$C_{uj} = \frac{a_{13}J_j a_{14} a_{33} C_{Hj}}{a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}} \quad , \quad C_u = -\frac{a_{14}a_{33}}{a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}}$$

$$C_{Dj} = -\frac{1}{a_{33}}(a_{31}C_{u1} + J_j) \quad , \quad C_D = -\frac{1}{a_{33}}a_{31}C_{u1}$$

左右岸で x 軸に関して対称であることを踏まえ，式 (33) の浸食モデルと式 (41) ~ (44) を境界条件である式 (34)，(35) および (36) に代入し整理すると式 (45) を得る．

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_3 \\ C_5 \end{bmatrix} = 0 \quad (45)$$

ここで，

$$f_{11} = \left(1 - \frac{\lambda}{\omega}\right) \alpha C_{u1} E_{p11} - E_{m11}$$

$$f_{12} = \left(1 - \frac{\lambda}{\omega}\right) \alpha C_{u2} E_{p21} - E_{m21}$$

$$f_{13} = \left(1 - \frac{\lambda}{\omega}\right) \alpha E_{p11}$$

$$f_{21} = \left\{ F_0^2 (K - H_0) + 1 \right\} \left\{ \alpha C_{u1} + \frac{i\omega}{\beta \tan \phi} (F_0^2 C_{H1} - C_{D1}) \right\} E_{p11}$$

$$f_{22} = \left\{ F_0^2 (K - H_0) + 1 \right\} \left\{ \alpha C_{u2} + \frac{i\omega}{\beta \tan \phi} (F_0^2 C_{H2} - C_{D2}) \right\} E_{p21}$$

$$f_{23} = \left\{ F_0^2 (K - H_0) + 1 \right\} \left\{ \alpha C_u + \frac{i\omega}{\beta \tan \phi} (F_0^2 - C_D) \right\}$$

$$f_{31} = \frac{1}{J_1} (C_{u1} + C_{D1}) E_{m11} - \frac{\alpha}{i\omega} C_{u1} E_{p11}$$

$$f_{32} = \frac{1}{J_2} (C_{u2} + C_{D2}) E_{m21} - \frac{\alpha}{i\omega} C_{u2} E_{p21}$$

$$f_{33} = \left(1 - \frac{\alpha}{i\omega}\right) C_u + C_D$$

式 (45) において，0 以外の C_1 ， C_3 および C_5 が存在するためには，式 (46) が成り立つ必要がある．

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} = 0 \quad (46)$$

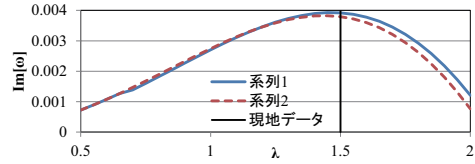


図-3 札内川 KP25 ~ 30 の節腹河道の波長

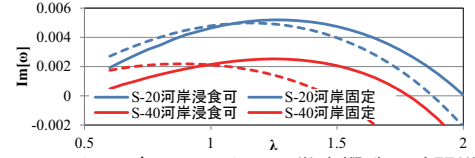


図-4 S-20 および S-40 における微小攪乱の時間増幅率

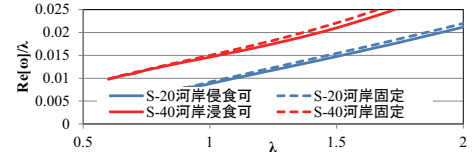


図-5 S-20 および S-40 における微小攪乱の移動速度

式 (46) から λ と ω の関係を得ることができる．微小攪乱の時間増幅率が ω の虚部であることから， ω の虚部を調べることで，節腹連続河道の波長を求めることが可能となる．

3. 線形安定解析結果

(1) 再現性

現地の現象をどの程度まで表現しているかを把握することとする．図-3 は，図-1 に示した札内川の KP25 ~ KP30 の節腹連続河道の波長を年最大流量時の水理量を用いて再現したものである．時間増幅率の最大値は，現地の形状を再現していることがわかる．なお，河岸を直線で固定し川幅に同区間の平均値を与えた場合の直線水路内に形成される複列砂州に関する時間増幅率も合わせて示している．札内川の再現では，やや波長が短くなることを示しているものの，河岸浸食が伴う場合との大きな違いは見られなかった．

(2) 水理量による変化

これまでの中規模河床形態の特性や形成条件等が水理量によって変化することが知られている．このことを踏まえ，水理量によって直線水路から河岸浸食により形成される節腹連続河道の波長と直線水路における複列砂州の波長との関係を，種々の水理量を用いて比較する．用いる水理条件は，平坦河床から通水初期に明瞭な複列砂州の形成が確認されている渡邊ら¹²⁾の実験のうち，水理条件を表-1 に示す S-20 および S-40 とした．なお，直線水路における砂州の安定解析の結果では，S-20 は複列砂州の時間増幅率が単列砂州の増幅率に比して卓越している実験であり，S-40 は単列砂州と複列砂州の時間増幅率が拮抗している実験である． λ による，微小攪乱の時間増幅率 $\text{Im}[\omega]$ と微小攪乱の流下方向移動速度 $\text{Re}[\omega]/\lambda$ の変化をそれぞれ図-4 および

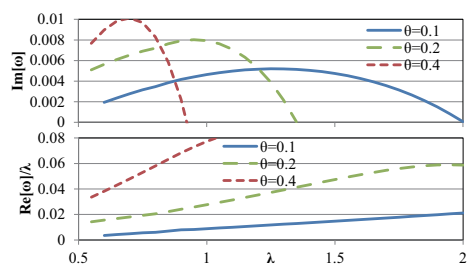


図-6 θ の変化に伴う時間増幅率と移動速度の変化

図-5 に示す．両ケースとも，時間増幅率は河岸浸食により時間増幅率 λ が大きい方にスライドするとともに若干ではあるが大きい値となることが示されている．この結果は，蛇行河道と節腹連続河道との違いはあるが，Uddin, Izumi & Hasegawa⁴⁾ の結果と一致するものである．なお，水理実験では，通水初期に両ケースとも複列砂州が形成されその時の λ はそれぞれ 1.05 および 0.99 であり，固定河岸の解析解の結果とほぼ一致している．一方，移動速度 $\text{Re}[\omega]/\lambda$ に関しては両ケースとも固定河岸の解析結果に比較し小さくなる傾向を示している．河岸浸食による時間増幅率および移動速度の固定河岸からの変化は，両者とも大きくなることがうかがえる．

水理条件によって，時間増幅率および位相速度が異なることから， θ ， d_s および β について，S-20 の水理条件を基本として他の条件を同一にして変化させ，結果がどのように変わるかを調べることにする．結果をそれぞれ，図-6，図-7 および図-8 に示す． θ に関しては， θ が大きくなるにつれて λ が小さくなり移動速度が大きくなる傾向がうかがえる．また， d_s に関しても θ と同様の傾向を示している． θ と d_s との関係を検討すると，河床の勾配が急になるほど λ が小さくなり移動速度が大きくなると判断される．一方， β に関しては， β が大きくなると λ も大きくなるが移動速度は小さくなる傾向を示している．

なお，S-20 の水理条件を用いて河岸浸食の程度を表す α の大きさが結果に与える影響についても検討を行ったが，現実的にとりうる範囲では有意な差は認められなかった．これは，本来河岸において成立する境界条件を近似的に $y = \pm 1$ に与えていることで影響が弱められている可能性があり，この点についてさらに検討を進める必要がある．

4. おわりに

節腹連続河道の形成機構を解明する第一歩として，その発生機構に関し線形安定解析を実施した．その結果，河岸浸食を考慮することによって，固定壁の複列砂州波長よりも短い波長で複列砂州および河岸線の凹凸が形成されることが判明した．また，この河岸線の波長は中規模河床形態に関する既往の知見と同様，水理量によっても変化し，無次元掃流力や無次元粒径が大きくなると長くなり，川幅水深比が大きくなると短くなるという性質を持つことが明らかとなった．

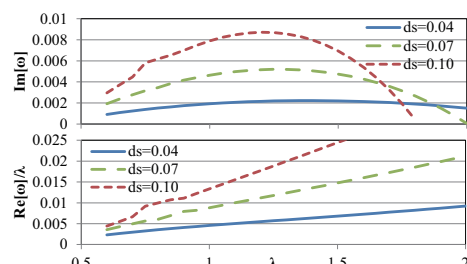


図-7 d_s の変化に伴う時間増幅率と移動速度の変化

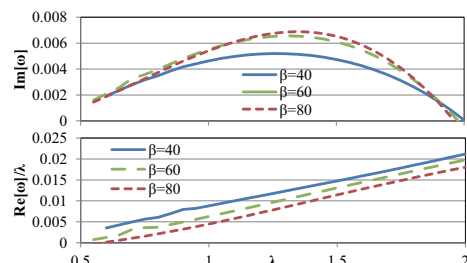


図-8 β の変化に伴う時間増幅率と移動速度の変化

謝辞：本研究の遂行にあたり，科学研究費補助金基礎研究 (B)(代表：泉典洋、課題番号：23360209) の助成を受けた。記して謝意を表す。

参考文献

- 1) 木下良作：石狩川河道変遷調査，科学技術庁資源局資料，No.36，1961．
- 2) Blondeaux, P. Seminara, G.: A unified bar-bend theory of river meanders. J. Fluid Mech. 157, 449-470, 1985.
- 3) 島田龍市，清水康行，長谷川和義，伊賀久晃：砂州性蛇行の形成に関する線形安定解析，土木学会論文集 B1 (水工学) Vol.69, No.4, I, 1147-I, 1152, 2013．
- 4) Uddin M. J., Izumi N. & Hasegawa K.: Bar instability accompanied by bank erosion, Advances in River Sediment Research, pp.467-472, 2013.
- 5) 清水康行，平野道夫，渡邊康玄：河岸侵食と自由蛇行の数値計算：水工学論文集 Vol.40, pp.921-926, 1996．
- 6) 藤田裕一郎，赤松英樹，村本嘉雄：複列砂州と網状流路の形成過程に関する実験，京都防災研究所年報 No.29, B-2, 1986．
- 7) 竹林洋史，江頭進治，岡部健士：網状流路の時空間的な変動特性，水工学論文集第 46 巻, pp.737-742, 2002.
- 8) 島絵梨子，渡邊康玄：流路網形成過程とそれに伴って形成される蛇行流路における砂州と平面不安定の影響，土木学会論文集 B1 (水工学) Vol.69, No.4, I, 1147-I, 1152, 2013．
- 9) 長谷川和義：沖積蛇行の平面および河床形状と流れに関する水理学的研究，北海道大学博士論文，pp. 1-184, 1984.
- 10) Parker G., Shimizu Y., Willkerson G. V., Eke E. C., Lauer J. W., Paola C., Dietrich W. E. and Voller V. R.: A new framework for modeling the migration of meandering rivers, EARTH SURFACE AND LANDFORMS, pp.70-86, 2011.
- 11) Mosselman E.: Theoretical investigation on discharge induced river-bank erosion, Communications on hydraulic and geotechnical engineering, Delft University of Technology, 1989
- 12) 渡邊康玄，桑村貴志：複列砂州のモード減少過程に関する水理実験，水工学論文集，Vol.48, pp.997-1002, 2004．

(2013.9.30 受付)