

## 球形粒子モデルを用いた土壌内保水機構に関する微視的解析

### Microscopic Analysis of the Suction and Water Retention Volume in Unsaturated Granular Material Composed of Various Particles by Using the Spheres Model

中尾隆志\* (北見工業大学工学部)

Takashi NAKAO Kitami Institute of Technology

藤田睦博\*\* (北海道大学大学院工学研究科)

Mutsuhiro FUJITA Hokkaido University Faculty and Graduate School of Engineering

It is well known that the movement of water in a soil can be described by unsaturated flow equations. The relationship between suction and water content is needed to solve these equations, and this relation can be obtained through indoor experiments. The water retained in pores among particles with radii in the range of  $10^{-3}$ mm to 1mm can be regarded as comprising most of the free water. The free water forms a pendular ring between two particles under unsaturated conditions due to surface tension acting on the free water. The pendular ring depends on the geometrical configuration of two particles. In this paper, a conceptual model for evaluation of the suction and water retention volume among spheres with different radii is proposed from a microscopic viewpoint. The results of quantitative analysis using this model are presented. In order to calculate the suction and water retention volume in natural soil, the coordination number of a particle must be determined. Assuming that the particle size distribution and porosity are known, the average coordination number can be estimated.

The results of the proposed model agree well with the experimental results in the case of relatively low water content. However, as the proposed method focuses on only isolated pendular rings between two particles, it is impossible to extend our method to the higher water content region.

**Key words :** Soil moisture, Coordination number, Suction, Soil fabric, Random packing

微視的観点から粒径分布を有する球形粒子内のサクションと保水量推定のモデルを構築する。まず最初に、粒子接合部においてリング水が独立して存在するとの仮定により、2球間のサクションと保水量算定式の誘導がなされている。これらの関係は2球間の粒子の距離と粒径比の関数として表される。次に、一般の土壌に対し、サクションと保水量を求めるには、任意の土粒子における配位数を決定しなければならない。本論文では粒径分布と間隙率が既知であるとし、配位数を推定する方法を提案している。

最後に本モデルと砂を用いた実験結果を比較検討することにより、リング水が独立して存在する低含水域において両者の傾向がよく一致し、その有用性が示された。

**キーワード :** 土壌水分, 配位数, サクション, 土壌構造, ランダム充填

#### I. はじめに

地下水流れや雨水の浸透流はその特性を巨視的に取り扱った飽和・不飽和浸透理論により解析されてきた。しかし近年、環境問題が大きくクローズアップされ、地下地盤内への汚水の侵入や農薬物質の土

壌内の残留などが大きな社会問題となっており、これらの現象を調べようとする現象を微視的に取り扱った解析が必要となる。他方、水文学の分野においても水質を用いた河川流出成分の分離や密度の異なる液体の侵入、拡散問題を取り扱う場合、やはり浸透現象を微視的に取り扱う必要がある。飽和・不

\*北見工業大学工学部土木開発工学科 〒090-8507 北見市公園町165番地  
Department of Civil Engineering, Kitami Institute of Technology, Koen-cho 165, Kitami, 090-8507, Japan

\*\*北海道大学大学院工学研究科環境資源工学専攻 〒060-8628 札幌市北区北13条西8丁目  
Environment and Resource Engineering, Hokkaido University Faculty and Graduate School of Engineering, West 8, North 13, Kita-ku, Sapporo, 060-8628, Japan

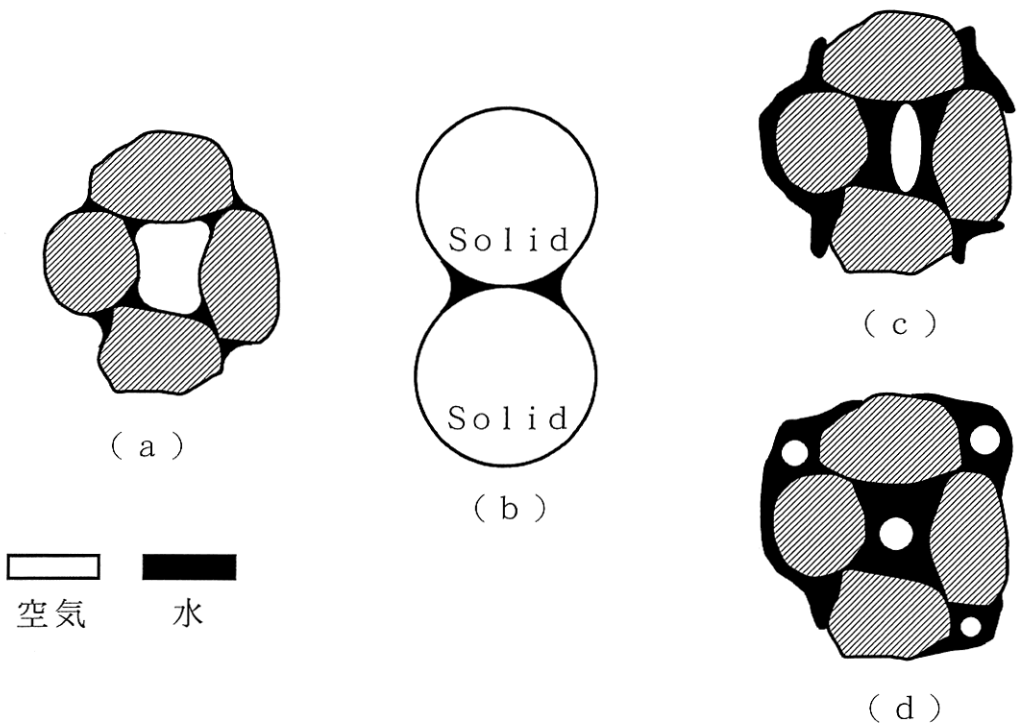
飽和浸透理論については数多くの論文が出されており(例えば太田ら, 1984), 近年では土壌内の熱輸送や物質移動を考慮した研究も見られる(宮崎毅, 2000). 一方, 浸透流を微視的な立場から取り扱った研究は主として, 化学工学や土壌学の分野で粒子間のリング水の効果に対し理論的な解析がなされている(Diasら, 1986)が, その研究の数はさほど多くない. また, 杉江ら(2000)は粒径と試料密度の異なる3種類の雪質について室内実験により不飽和透水係数( $k$ )とサクション( $\phi$ )の関係を求め,  $k$ は含水率( $\theta$ )の減少にともないべき乗の関係( $k=a\theta^m$ )で減少することを示し, 減衰率を表す $m$ は雪質の違いにより大きな差があり一義的な値を用いるのではなく, 雪質により使い分けをしなければならないことを指摘している. このことは雪粒子を構成する大部分が氷の粒であることから上記の関係は積雪層内の粒径と充填構造に大きく依存知ることが推察される.

一般に不飽和浸透理論はRichardsの式を用いて解析的に解かれるが,  $k$ は $\theta$ または $\phi$ の関数として表される. しかし,  $\theta$ と $\phi$ の2つとも未知数であるためRichards式を解くには $\theta$ — $\phi$ の関係, あるいは $\theta$ — $k$ の

関係式を事前に求めておかなければならない. 現在, これらの関係式の多くは実験的に求められているのが現状である. 本論文は $\theta$ — $\phi$ 関係を理論的に求めることを目的に土壌を構成する粒子が球状体であるとの仮定より $\theta$ — $\phi$ 関係に最も大きな影響を与える土壌内の保水効果として土粒子接合部における水の表面張力によるリング水の保水機構について理論的な解析を行っている. この保水機構は土粒子の配列状況に大きく影響を受けるため, まず最初に構成土粒子を等球径と仮定し間隙率より土粒子間の接合状況(配位数)を推定する方法を述べる. 次に構成する土粒子が粒径分布を有する場合として, 異球径からなる場合の配位数算定法について述べる.  $\theta$ — $\phi$ の関係を粒度から推定する手法にはAryaら(1981)やHaverakampら(1986)の研究にも見られるが, 本研究のように土壌の骨格構造について言及されていない.

II. 不飽和土壌内の保水形態

図—1は土壌内の保水形態の概要を模式的に表している(Bear J.ら, 1991). 含水量が非常に少ない場



図—1 土粒子の保水形態  
Fig. 1 Water-retention form of ground particle

合(a)には、土壌内の保水形態は次の2つに分類することができる。1つは土粒子表面を覆っている“吸着水”あるいは“皮膜水”と呼ばれる非常に薄い水膜であり、一方は土粒子接合部に生じる水と空気の表面張力によって生じる“リング水”と呼ばれる保水形態である。しかし、吸着水は水分子が土粒子に向かって一定の方向を持って配列し土粒子固有の吸着力によりかたく保持されており、その厚さが水分子の径の数倍であり、土壌中では常に非可動状態である。従って、一般の自然土壌のように $10^{-3}$ mm以上の粒径を有する場合にはこれを無視することができる(Orr F. M.ら, 1975)。後者のリング水による保水はいわゆる鞍型の形状を呈しており、この場合、図中(b)に示したように土粒子を球形と仮定すると、次章以降に述べるように、このリング水によるサクシオンと保水量の関係を簡単に求めることができる。さらに含水量が増加すると、いわゆる“懸垂水”となる。この場合、個々のリング水は互いに連結し、水の移動が可能となる(c)。その後、水分量の増加に伴い、ついには間隙中の空気は含水により、土粒子間内部の間隙内に気泡として取り残される(d)。この気泡の大きさは水量の増加と共に小さくなり、これに伴い気泡内部の空気圧が増大する。

吸着水に比べリング水が卓越するような土壌材料は礫・砂などの粒状材料が考えられる。本論文でも対象土壌を礫・砂などの粒状材料に限定し、吸着水による保水効果は無視して以後、 $\theta-\phi$ 関係の解析を試みている。

Ⅲ. 球形粒子によるリング水の圧力変化と保水量の算定

土粒子内に水と空気が存在する場合、すなわち不飽和時において土粒子の接合部付近では水と空気の表面張力によりリング水が形成される。このリング水で保水された内部の水圧はそのメニスカスの形状から負圧となり保水される。

1. 2球間における表面張力のラプラスの式

図-2はそれぞれ $R_1, R_2$ の半径からなる2つの異径球によって構成される土粒子が $\delta$ の距離にあり、その接合部においてリング水が生じている場合の断面を表している。今、リング水の曲率半径を $r_1, r_2$ とし、水と空気との表面張力を $\sigma$ 、また土粒子と水の接触角( $\xi$ )を0とすると水( $P_w$ )と大気( $P_a$ )の圧力差は周知のように式(1)に示される表面張力のラプラ

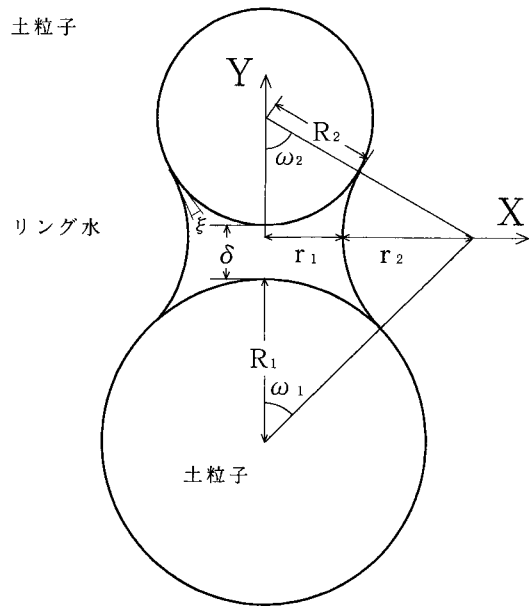


図-2 座標系  
Fig. 2 Coordination system

スの式(小野, 1980)で与えられる。

$$P_w - P_a = \sigma \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \tag{1}$$

$r_2$ を円弧と仮定できるならば、図-2を参考にして、平面三角の性質より、 $r_1, r_2$ は式(2), (3)より得られる。

$$r_1 = R_1 \sin \omega_1 + r_2 (\sin \omega_1 - 1) \tag{2}$$

$$r_2 = \frac{(R_1 + \delta)(R_2 + R_2 + \delta) + R_1 \{R_1 - 2(R_2 + \delta) \cos \omega_1\}}{2 \{ (R_2 - R_1) + (R_2 + \delta) \cos \omega_1 \}} \tag{3}$$

ただし、ここに $R_{12} = R_1 + R_2$

式(1), (2), (3)より明らかに、 $P_w - P_a$ は土粒子径 $R_1, R_2$ および土粒子間距離 $\delta$ に依存する。今、下部の土粒子の半径 $R_1$ を基準とし( $R_1 \geq R_2$ )、 $R_2, \delta$ をそれぞれ $R_1$ との比で表し無次元化すると、式(1)は次式のように書き改められる。

$$\frac{(P_w - P_a) R_1}{\sigma} = \left( \frac{1}{\Gamma_1} - \frac{1}{\Gamma_2} \right) \tag{4}$$

ここに、

$$\Gamma_1 = \sin \omega_1 + \Gamma_2 (\sin \omega_1 - 1)$$

$$\Gamma_2 = \frac{(1 + \Delta)(1 + 2R + \Delta) + 1 - 2(1 + R + \Delta) \cos \omega_1}{2 \{ (R - 1) + (1 + R + \Delta) \cos \omega_1 \}}$$

$$R = \frac{R_2}{R_1} (\text{粒径比}), \quad \Delta = \frac{\delta}{R_1}$$

ところで、 $\omega_1$ は $0^\circ$ 以上の全ての値をとるとは限らない。図-2から明らかなように、リング水を形成するのは、

$$0^\circ < \omega_1 < 90^\circ, 0^\circ < \omega_2 < 90^\circ, r_1 \geq 0, r_2 > 0 \quad (5)$$

の場合であり、式(1)が負圧となる条件式(6)と、助変数 $a, b, c$ を用いると、リング水が負圧を取りうる範囲は式(7)で示される。

$$P_w - P_a < 0 \quad (6)$$

$$\frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a} \leq \tan \frac{\omega_1}{2} \leq \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a} \quad (7)$$

ここに、

$$a = 4R_1^2 + 4R_1R_2 + 4R_1\delta + 2R_2\delta + \delta^2$$

$$b = 4R_1R_2 + 2R_1\delta + 2R_2\delta + \delta^2$$

$$c = 2R_2\delta + \delta^2 - R_1^2$$

である。図-3は式(4)が式(5), (6)を満足するよう粒径比 $R$ を変化させたときの $\Delta$ の最大値を示している。図-4, 図-5はそれぞれ $R=0.1, 1.0$ (等球径)の場合における、 $\Delta=0.00$ (完全接触),  $0.02, 0.04, 0.06, 0.08, 0.10$ のときの $P_w$ と $P_a$ の圧力差の無次元量を示している。図-4において $\Delta$ が $0.06$ 以上の値が示されていないが、これは $R=0.1$ の時 $\Delta$ が最大 $\Delta$ 値を越えてしまうためである。

$\Delta=0$ の完全接触の場合、 $R$ に無関係に $\omega_1$ が小さな時負圧となる。一例として、 $R=1$ の等球径の場合、サクシオンが $0$ となるのは $\omega_1=53.13^\circ$ の時であり、その後正圧となりリング水は形成されない。

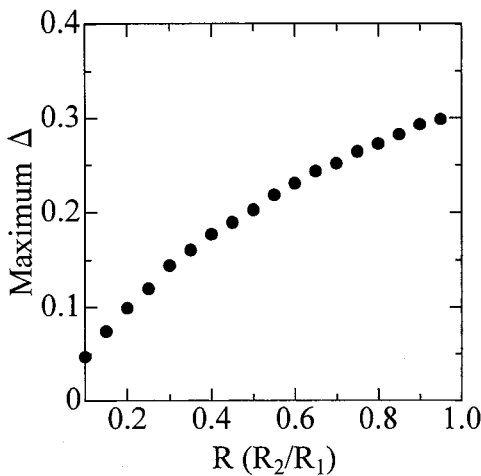


図-3 Rと最大 $\Delta$ の関係

Fig. 3 Relationship between  $R$  and maximum  $\Delta$

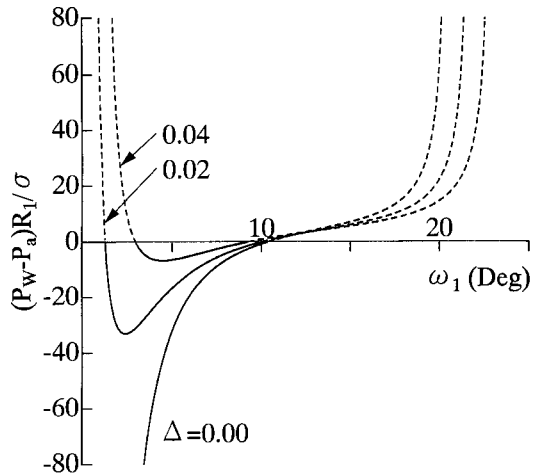


図-4  $R=0.1$ における圧力と $\omega_1$ の関係

Fig. 4 Relationship between  $P_w - P_a$  and  $\omega_1$  (The case of  $R=0.1$ )

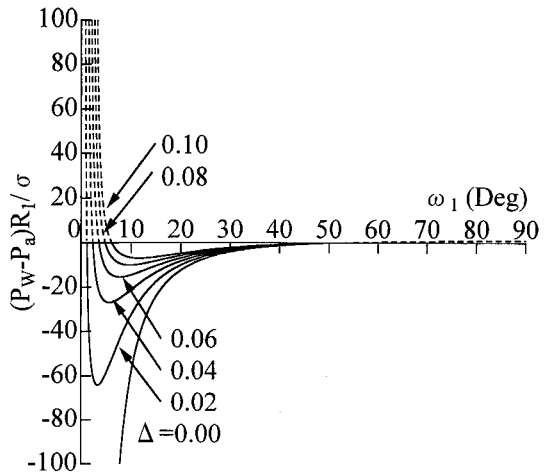


図-5 等球径における圧力と $\omega_1$ の関係

Fig. 5 Relationship between  $P_w - P_a$  and  $\omega_1$  (The case of  $R=1$ )

## 2. リング水による保水量

サクシオンによるリング水の保水量( $V_w$ )は図-2に示すようにリング水が $Y$ 軸に関し対称であることから容易に次式で与えられる。

$$\begin{aligned} V_w = & \pi r_2 [(A^2 + r_2^2) (\cos \omega_1 + \cos \omega_2) \\ & - Ar_2 \{ \sin \phi \cos (\omega_1 - \omega_2) + \pi - \phi \}] \\ & - \frac{\pi}{3} \{ r_2^3 (\cos^3 \omega_1 + \cos^3 \omega_2) \\ & + R_1^3 (2 + \cos \omega_1) (1 - \cos \omega_1)^2 \\ & + R_2^3 (1 - \cos \omega_2)^2 (2 + \cos \omega_2) \} \end{aligned}$$

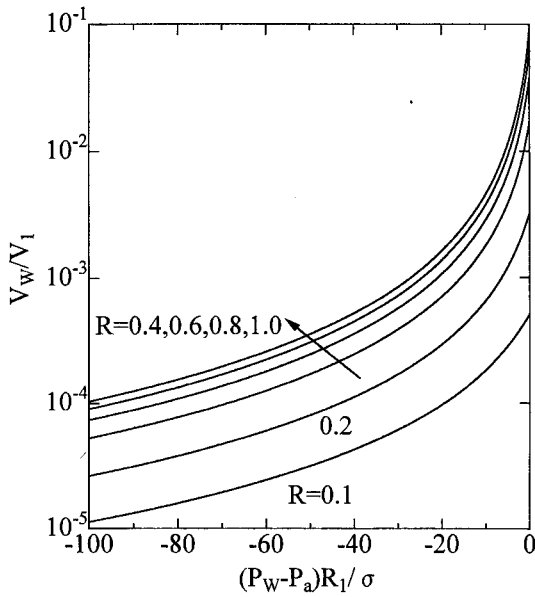


図-6 リング水形成時のサクシオンと保水量  
Fig. 6 Relationship between suction and  $V_w/V_1$

$$A = r_1 + r_2, \phi = \omega_1 + \omega_2,$$

$$\omega_2 = \text{ArcSin} \left( \frac{r_1 + r_2}{R_2 + r_2} \right) \quad (8)$$

リング水形成時のサクシオンと保水量の関係を示す一例として  $\Delta = 0$  の完全接触の場合について  $R = 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$  と変化させた結果を図-6に示す。リング水の保水量 ( $V_w$ ) は下部の土粒子体積 ( $V_1 = 4\pi R_1^3/3$ ) で除し、サクシオンと同様に無次元保水量としている。同一のサクシオンでも  $R$  により保水量に大きな違いがあることが分かる。

### Ⅲ. 球形粒子の充填構造

#### 1. 等球径粒子の充填構造

前章の結果より、リング水の保水効果は土粒子の粒径比に強く影響を受ける事が判明した。本モデルを実際の土壌に対して適用するには2球間モデルから多球間モデルに拡張する必要がある。一般に、土壌の物理特性は粒径分布と構造特性を示す指標として空隙率あるいは空隙比の形で表現される。従って、本モデルを実際の土壌に適用するには粒径分布と土壌内部の構造を明らかにしなければならない。具体的には1つの土粒子が他の土粒子とどのように接合されているか、すなわち土粒子1個あたりの他の土粒子の接合数(以下、配位数と称する)と空隙率ある

いは空隙比の関係を求めなければならない。一般に、実際の土粒子の形は球ではなく、その大きさもさまざまである。従って、厳密に土壌特性を数学モデルとして表現するには個々の土粒子形状や粒径分布を説明変数として確率的に取り扱わなければならない(Nakaoら, 1993)がその取扱いは複雑となる。しかし、構成される土粒子が等球径からなると仮定するならば、その取り扱いが容易となる。さらに粒子が規則的に配列された集合体と考えるならば、その集合体の充填特性はより簡単に表せることになる。本章では、粒径分布と空隙率が既知の元に土粒子がどのように配置しているかを明らかにするため、最初に等球径規則充填体から等球径ランダム充填による配位数推定法を述べ、次にこの理論を異球径に拡張する方法について述べる。

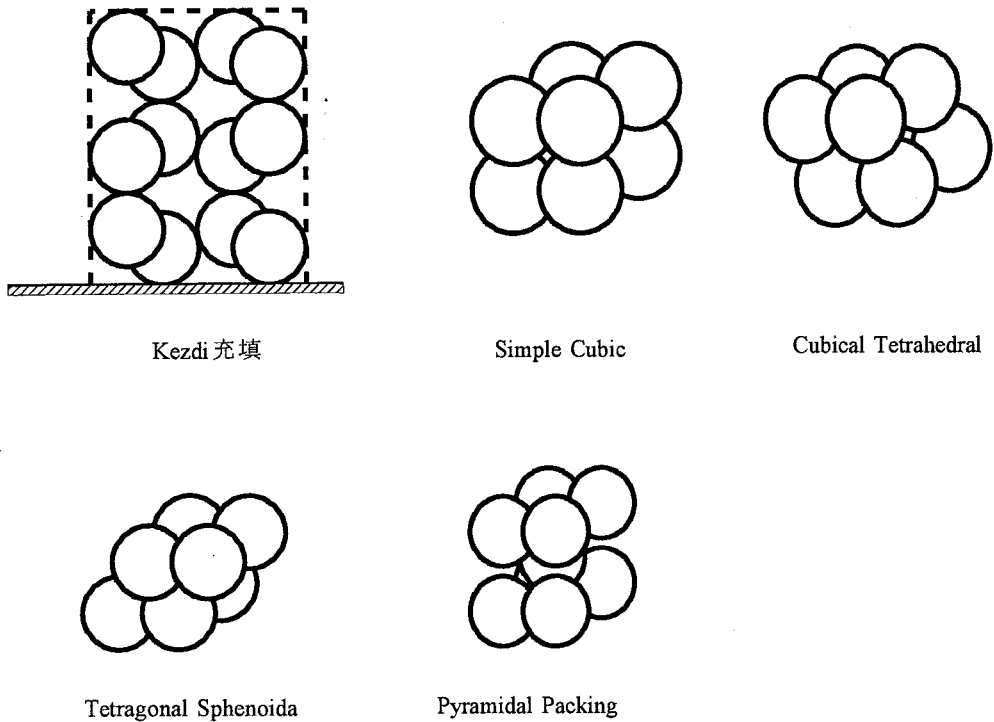
#### 1) 等球径規則充填構造の物理特性

最上ら(1969)は粒状体が等球径のみの集合体から成り、粒子が規則的に配列する充填方法を粒子の半径  $R$  をパラメータとして表-1のように5つに分類整理している。Kezdi(1964)はこの5つの分類の他にさらに空隙率の大きな充填方法を示している。彼の論文によると基準容積、密度、空隙比、空隙率は球と球のすき間の関数として表されているが、ここでは比較のため、球と球とのすき間は0であるとして計算を行い、その結果を表最上段に掲載し、各充填体の概要を図-7に示す。

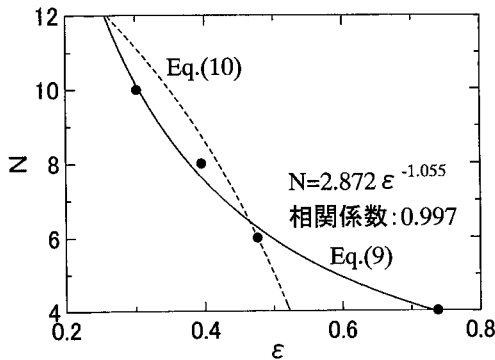
最も疎の充填構造をなすのは空隙率  $\epsilon$  が0.7382となるKezdiの示した充填集合体であり、また最密充

表-1 等球径規則充填体の物理特性  
Table 1 Physical characteristics of identical regular packing

充填方法	配位数	基準容積	基準容積内の粒子数	空隙率 $\epsilon$
Kezdi充填	4	$228R^3$	18	0.7382
Simple Cubic	6	$8R^3$	1	0.4764
Cubical Tetrahedral	8	$4\sqrt{3}R^3$	1	0.3954
Tetragonal Sphenoida	10	$6R^3$	1	0.3019
Pyramidal Packing	12	$8\sqrt{2}R^3$	2	0.2595
Tetrahedral Packing	12	$8\sqrt{2}R^3$	2	0.2595



図一七 等球径規則充填の概要  
Fig. 7 Outline of identical regular packing



図一八 等球径規則充填体の配位数と間隙率の関係  
Fig. 8 Relationship between coordination number and porosity of identical regular packing

充填構造を形成するのはPyramidal PackingとTetrahedral Packingの2通りとなる。この表から明らかなように配位数は間隙率の小さい密なものほど増加している。この場合、配位数が取りうる値の範囲は4から12であり、間隙率の変化に伴って配位数が大きく変化しており、配位数(N)と間隙率(ε)が密接

な関係にあることがわかる。これらの関係を最小自乗法で得られた関係式で示すと式(9)が得られる。式(9)と実際の配位数と間隙率の関係を図一八に示す。

$$N = 2.872 \varepsilon^{-1.055} \quad (9)$$

2) 等球径ランダム充填の配位数と間隙率

Smithら(1929)はランダムに充填された等球径からなる粒子の間隙率と配位数の関係を調べるため鉛の散弾を用いた実験を行った。実験方法の概要は以下のものである。充填方法をいろいろ変え、試料全体の間隙率が0.36から0.45の範囲になるようピーカー内に鉛の散弾をランダムに充填する。これを一度酢酸の水溶液に満たした後、排水すると、鉛の粒子と粒子の接触点にはリング水の保水効果により酢酸の水溶液の一部が残り、白い酢酸塩の斑点ができる。この斑点の数を数えることにより、個々の粒子の配位数が求められ、間隙率ごとの配位数のヒストグラムを作成することができる。その結果を図一九に示す。

図から明らかなように間隙率が増加したとき(充填のしかたが緩くなると)、規則充填の場合と同様に配位数の平均値が小さくなっている。また、間隙率

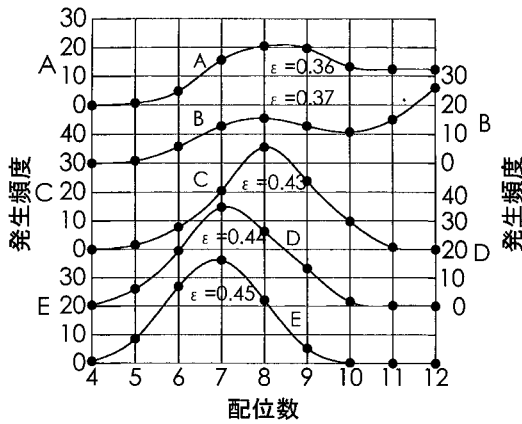


図-9 Smithの実験による等球径ランダム充填の配位数と間隙率の関係(最上1969年の文献より引用)

Fig. 9 Histograms of random packing with identical particles (quote from a book by Mogami, 1969)

が0.43から0.45の範囲にある比較的充填が緩い場合、そのヒストグラムは著しく正規分布に似たものとなる。さらに、彼らは等球径からなるランダムに充填された粒子が規則集合体の最も間隙が粗な単純立方体と最密充填である面心四面体の2つの集合体のみの混合体であるとの仮定から、ランダム充填の平均間隙率 $\bar{\epsilon}$ を用いて平均配位数 $\bar{N}$ を求める式(10)を提案している。

$$\bar{N} = 26.4858 - \frac{10.7262}{1 - \bar{\epsilon}} \quad (10)$$

式(10)は配位数が6であるSimple Cubicと12の最密充填であるTetrahedral Packingの2つのクラスターで構成されているとしているため、他の集合体の場合、誤差が大きくなっている。特に $N=10$ の立方斜方体充填の場合、配位数の誤差は1以上となる。これはランダムに充填された集合体が配位数が極端に違うSimple CubicとTetrahedral Packingの2つのクラスターのみにより表現されているためである。以上の結果から、等球径ランダム充填においても配位数と間隙率は密接な関係があることがわかる。個々の粒子の配位数に対し、さらに詳細な検討を行うと配位数は確率的に変化し、その範囲は4から12まで変化する。従って、比較的粒径分布が狭く、構成する粒子が近似的に等球径から成り立っていると考えられる場合、土壌内の充填構造を局所的にみるならば、その充填構造は表-1に示した等球径規則

充填構造体の間隙率に最も近い2つの規則充填構造体から成り立っており、結果的に土壌全体では、複数個の規則充填構造体の混合体で土壌が形成されていると考えられる。そこで本論文ではSmithらの方法を以下のように修正することを提案する。もし土壌内の間隙率の分布がわかれば、局所的にみるとその間隙率周辺の充填構造は表-1に示される5つの充填方法の内(Pyramidal PackingとTetrahedral Packingは充填の方法が異なるだけで物性特性は同じなので1つと考える)その間隙率を挟む2つの規則充填の混合体として表すことが可能であろう。そこで、その間隙率付近の充填構造はもっともこの間隙率に近い2つの規則集合体のみから成り立っているものとする。この間隙率から2つの等球径規則充填の混合割合が得られ、この混合割合より1球あたりの接触数すなわち配位数が計算できる。具体的には以下の方法による。今、間隙率 $\epsilon$ がSimple CubicとCubical Tetrahedralの間隙率の範囲内にあるものとする、この間隙率を示す容積内の球のうち $x$ がCubical Tetrahedral、残り $1-x$ がSimple Cubicとして並んでいる部分とすると、表-1より、Cubical Tetrahedral及びSimple Cubicの間隙率はそれぞれ0.3954、0.4764であるから

表-2 隣接する規則体の間隙率と発生割合の関係  
Table 2 Relationship between porosity and generating rate for adjoining regular packing

	間隙率	配位数 N	X
Kezdi 充填	0.7382	$\frac{4(2X+1)}{X+1}$	$\frac{0.7382 - \epsilon}{0.2618}$
Simple Cubic	0.4764	$\frac{2(8\sqrt{3}-9)X+18}{(2\sqrt{3}-3)X+\sqrt{3}}$	$\frac{0.4764 - \epsilon}{0.0810}$
Cubical Tetrahedra	0.3954	$\frac{4(5-2\sqrt{3})X+8\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})X+\sqrt{3}}$	$\frac{0.3954 - \epsilon}{0.0935}$
Tetragonal Sphenoidal	0.3019	$\frac{4(6\sqrt{2}-10)X+40}{(3\sqrt{2}-4)X+4}$	$\frac{0.3019 - \epsilon}{0.0424}$
Pyramidal Packing	0.2595		
Tetrahedral Packing	0.2595		

$$\epsilon = 0.3954x + 0.4764(1-x) \tag{11}$$

となる。よって、 $x$ は

$$x = \frac{0.4764 - \epsilon}{0.0810} \tag{12}$$

となる。また、両者の単位容積中の球の数はそれぞれ

$$\sqrt{3}/(12R^3), 1/(8R^3)$$

であるから、混合体中の1球あたりの平均の接触点数、すなわち配位数は

$$N = \frac{8x\sqrt{3}/(12R^3) + 6(1-x)/(8R^3)}{x\sqrt{3}/(12R^3) + (1-x)/(8R^3)} \tag{13}$$

となる。従って、土壌内の間隙率分布が既知ならば、各間隙率に対し、上記の計算を行うことにより、配位数の分布を計算することができる。表-2は間隙率が与えられた場合、それらを構成する2つの等球径規則集合体とその発生確率 $X$ (表中上段側の規則集合体の割合)を示している。

2. 異球径からなる粒子の配位数の推定

前節において構成する粒子の粒径分布がほぼ等球径とみなせる比較的分布幅が狭い場合、その土壌の間隙率に最も近い2つの等球径規則充填集合体の混合体であるとの仮定のもとに土壌の間隙率から土粒子間の接合状態を推定する方法を述べた。この方法は隣接する規則充填体の配位数が既知なので式(1)、(9)で計算されるサクションと保水量を配位数倍して対象となる土壌のサクションと保水量を計算することができる(Nakaoら, 1994)。しかし、一般に土壌は構成する土粒子はほぼ等球径と見なせる場合は稀であり、通常広い粒径分布を有する。

本節では構成する土粒子を球形かつ粒径分布が既知と仮定し、球が互いに接する接点における切平面で区切られる多面体の集合体を考えることにより、配位数を推定する方法を提案する。

1) 等価半径を用いた異球径からなる粒子の配位数の推定

対象となる空間内に $n$ 個の球が充填されている場合を考える。この空間内で互いに接する球の接点における切平面を考えるならば空間全体では $n$ 個の多面体が考えられる。また、ある球が $N$ 個の多面体で囲まれているとき、この球は $N$ 個の球と接触していることになる。樋口(1997)はこのことを利用して半径 $r_0$ の粒子に接触する粒子の個数を算定する斉藤の方法を紹介している。

$$N(r_0) = \frac{\frac{4}{3}\pi(r_0+hr)^3r^2/(1-\epsilon)/r^2 - \frac{4}{3}\pi r_0^3/(1-\epsilon)}{\frac{4}{3}\pi r^3/(1-\epsilon)} = \frac{[h^3r^5 + 3h^2r^4r_0 + 3hr^3r_0^2]}{r^2r^3} \tag{14}$$

ここに、 $N(r_0)$ :半径 $r_0$ の粒子の平均配位数、 $\epsilon$ :粒子内の間隙率、 $r, h$ :半径 $r_0$ の球を含む多面体と、それに接する周りの多面体が全て同じ $r$ からなる多面体と仮定し、これを合わせた多面体の体積に等しくなるように考えた仮想球の半径 $r_0+hr$ としたときの値であり、記号“ $\bar{\quad}$ ”は変数の平均値を示す。一般に $r$ の平均は重量法による篩い分け試験結果で得られる。

以下、本論文でも式(14)を用いることとする。

2) 等球径規則充填体を用いた等価半径の推定

式(14)において等価半径を決定するパラメータ $h$ は依然として未知数のままである。本論文では $h$ を決定するため以下の方法によった。構成する球の半径が全て等しくかつ規則正しく充填しているならば、球の充填の物理特性である配位数は表-2に示すように各充填方法により一義的に決定される。そこで、式(14)で $r_0=r$ とした等球径の場合について規則充填体の最疎充填であるKezdi充填( $N=4$ )から最密充填であるPyramidal (Tetrahedral) ( $N=12$ )までの5通りについて $h$ を求めた。図-10は $h$ の解の中で実根のみをプロットしたものである。明らかに配位数の増加とともに $h$ も増加しており、 $N$ と $h$ の関係は最小自乗法により

$$h = 0.418 + 0.080N \tag{15}$$

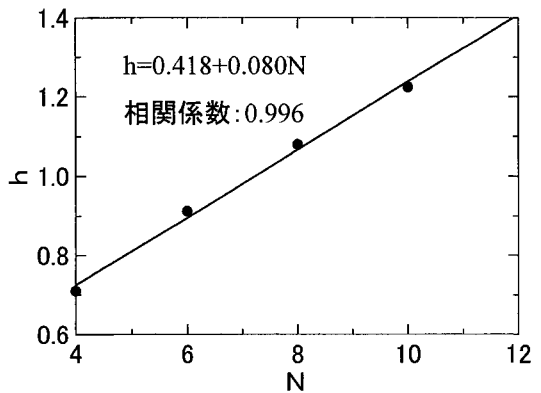


図-10 Nとhの関係(等球径)

Fig. 10 Relationship between  $N$  and  $h$  (The case of  $R=1$ )



なる関係が得られる。この関係は $r/r_0$ の統計分布特性によらないとして以下取り扱う。

したがって、 $h$ を推定するため最終的に以下の方法を用いることにする。間隙率 $\epsilon$ が与えられると構成する球を等球径とみなし、式(9)により配位数の推定を行う。この場合、 $\epsilon$ の取り得る範囲は式(9)では $0.2595 \leq \epsilon \leq 0.7382$ であるがこの範囲以外でも外挿できるものとする。得られた $N$ を式(15)に代入することにより、合併多面体の等価半径を計算することができる。最後に、式(14)より配位数の算定がなされる。

本手法を用いた配位数推定法の有用性を検証するため、解析解が既知である以下の仮定の充填体に本モデルの適用を試みた。半径 $R$ の等球径からなるSimple Cubicの空隙に内接するよう半径 $(\sqrt{3}-1)R$ の異球径を充填させる。この場合の間隙率は0.271となり、各球の配位数の理論解は半径 $R$ の球：14個、半径 $(\sqrt{3}-1)R$ の球：8個となる。これに対し、計算による配位数はそれぞれ、14.8個、10.5個となった。

IV. 本モデルと実験値の比較

上記で述べた方法により、リング水の算定を試みた。

1. 篩い分け試料を用いた実験値との比較

図-11は計算に用いた土粒子の粒径毎のヒストグラムを示している。対象とした試料は山形産7号硅砂であり、これを篩い分けしている。粒径は149 $\mu\text{m}$ の92.7%であり、他に250 $\mu\text{m}$ 粒径が7.3%と2つの粒径より構成されている。また、間隙率はランマーによる突き固め試験結果より、 $\epsilon=0.4424$ を用いた。表-3は式(9)、(14)、(15)により求められた配位数の推定値を示している。粒子径が大きな250 $\mu\text{m}$ の粒子に接触する粒子の数は粒径149 $\mu\text{m}$ の粒子が8.5個、250 $\mu\text{m}$ の粒子は0.7個であり平均配位数は9.2個となり、粒径149 $\mu\text{m}$ を中心とする平均配位数のほぼ倍の個数となっている。表中の第3、4欄は計算された平均配位数に対し、各粒径が何個接触しているかを示している。この個数は平均配位数に粒径分布の頻度割合を掛けて求めたものである。図-11の粒径分布は重量割合として得られるので、別途土粒子の密度試験( $\rho_s=2.61$ )結果を用い、重量割合から個数割合への変換を行っている。

図-12に250 $\mu\text{m}$ の粒径の周りに接触する粒径毎のサクシオンと保水量の関係(図中の破線)および全

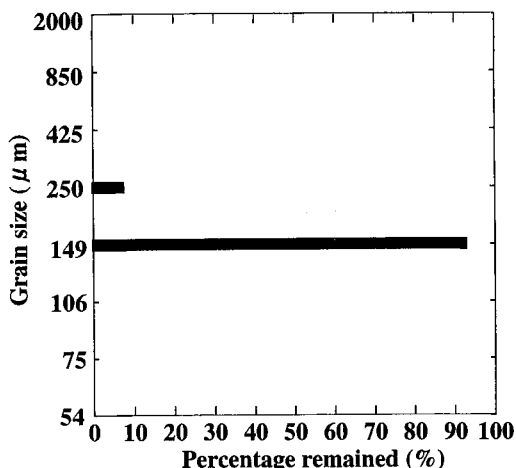


図-11 粒径毎のヒストグラム(篩い分け試料)  
Fig. 11 Particle diameter distribution (sieving sample)

表-3 計算された各粒子の配位数(篩い分け試料)  
Table 3 Calculated coordination number for every particle diameter (sieving sample)

粒子の直径 D ( $\mu\text{m}$ )	平均配位数	D=149 $\mu\text{m}$ の 個数	D=250 $\mu\text{m}$ の 個数
149	6.6	6.2	0.4
250	13.5	12.7	0.8

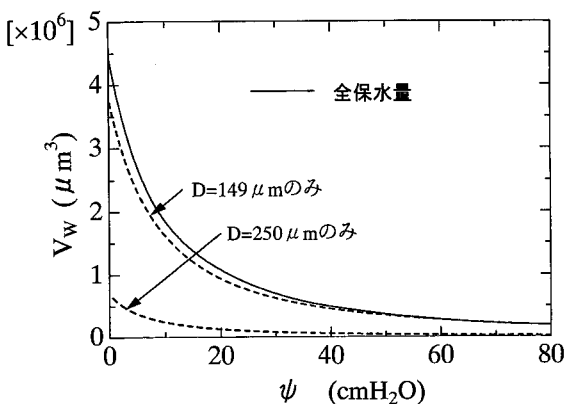


図-12 直径250 $\mu\text{m}$ の粒子に接触する球の保水量  
Fig. 12 Water retention volume in contact with a particle with a diameter of 250  $\mu\text{m}$

保水量(実線)を示している。計算方法の概略は以下によった。

式(1)、(8)はいずれも $\omega_1$ の関数となっておりこのままでは $\psi-V_w$ の関係は直接求められない。そこで、

はじめに $\omega_1$ を $0.01^\circ$ づつ変化させ、中心となる球とそれに接するある粒径を持つ球において $\psi$ が0になるまで式(1), (8)を用い、 $\psi$ ,  $V_w$ を計算する。この際、水と空気の表面張力 $\sigma$ は温度により変化するが $20^\circ\text{C}$ として計算を行った。次に、中心となる球と残りの他方の球に関しては、上記で得られた $\psi$ になるよう式(1)を繰り返し計算し、 $\omega_1$ を決定した後、式(8)に代入して $V_w$ を求めた。このとき、 $V_w$ は表-3を参照し、配位数の個数倍している。最後に $149, 250\mu\text{m}$ の保水量を加えあわせた結果が全保水量(実線)となる。

著者ら(1995)は本計算条件と全く同一の粒径分布と間隙率を持つ珪砂試料において、室内で土柱法による吸水実験を行っている。本研究では粒子表面のリング水のみを取り扱っているので実験終了後別にJIS A 1109-1193に基づく砂の吸水率試験を行い体積含水率の補正している。実験結果の $\theta-\psi$ 関係を図-13に●印で示す。含水量の増加とともに粒子間の保水形態は粒子接合部でリング水が独立して存在する状態からリング水が互いに連結しあう“懸垂水”へと遷移する。図中の実線及び破線は図-12で得られ結果を $\theta-\psi$ に換算して記入している。図-12では2球間モデルを適用しているため計算で得られる保水量はリング水が全て独立して存在しているとして求められている。しかし、先にも述べたように保水量の増加と共にリング水は独立して存在する

状態から互いに連結する状態へと変化する。このためリング水が独立して存在するための条件を新たに考えなければならない。この関係は以下の方法により行った。

まず、構成する粒子の中で最も粒径の大きな2個の粒子( $R_{\max}$ )に構成される粒子の中で最も小さな粒子( $R_{\min}$ )が接触したときに形成されるリング水の最大曲率半径 $r_2$ を求める。3球間の幾何学的関係から $r_2$ は

$$r_2 = \frac{R_{\max}R_{\min} + 2R_{\min}^2 - 2R_{\min}^{\frac{3}{2}}\sqrt{2R_{\max} + R_{\min}}}{R_{\max} - 4R_{\min}} \quad (16)$$

となる。この時の等球径 $R_{\max}$ で形成されるリング水の $\omega_{1,\max}$ は同様に幾何学的条件より

$$\omega_{1,\max} = \text{ArcCos}\left(\frac{R_{\max}}{R_{\max} + r_2}\right) \quad (17)$$

となる。リング水が独立して存在する条件として上記のように考えたのは以下の理由による。

完全接触時にリング水が負圧を形成する $\omega_1$ の範囲が一番大きいのはII章で示したように、等球径の $0 < \omega_1 \leq 53.13^\circ$ の場合である。本節では、構成される粒子の中で最大の等球径接合部分に最も小さな粒子が接触していても各接合部でリング水が独立して存在する条件を求めていることになりリング水が独立して存在する条件としては最も厳しい条件となっている。

本例では粒径分布より $R_{\max} = 250/2\mu\text{m}$ ,  $R_{\min} = 149/2$ となり、そのときの $\omega_{1,\max} = 27.50^\circ$  (サクシオン値 $31.56\text{cm}$ )となる。図-13中の実線は上記の方法によりリング水が独立して存在する領域を破線はリング水が独立して存在しない領域を示している。

## 2. 篩い分けしない試料の実験値との比較

前節と同様の方法で篩い分けしない試料の吸水実験値との比較も行った。粒径範囲は $3.5 \sim 250$ の範囲であり、粒径毎のヒストグラムを図-14に示す。この場合の間隙率はランマーによる突き固め試験結果より、 $\epsilon = 0.4653$ となる。表-4に式(9), (14), (15)により計算された、各粒子の配位数を示す。表中配位数が $0.0$ 個となっているのは小数点第1位でまとめたためであり、僅かに小さな値を持っている。しかし、前節と同様にサクシオンと保水量の関係を求めたところ、全保水量には殆ど影響を与えないので以降の計算を容易にするため、配位数が $0.5$ 個以下の粒子は $0$ 個として取り扱った。篩い分けしない試料のリング水が独立して存在する条件を求めると表-

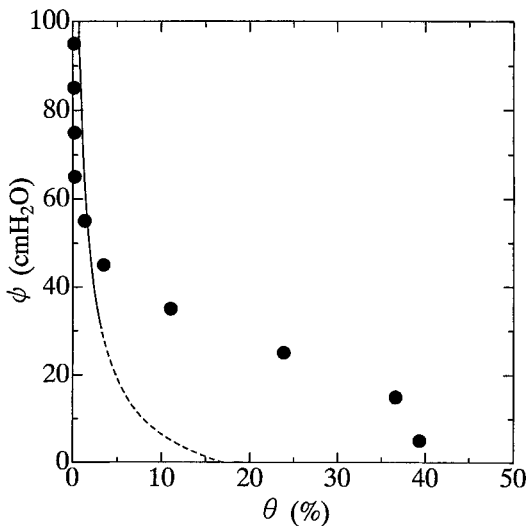


図-13  $\theta-\psi$ の計算値と実験値の比較

Fig. 13 Comparison of the calculation value and an experiment value of  $\theta-\psi$

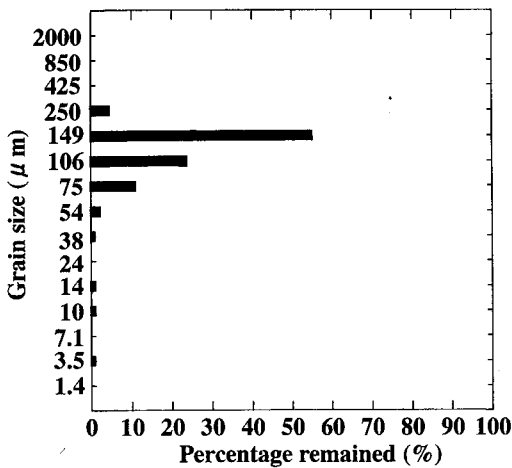


図-14 粒径毎のヒストグラム(山形産7号珪砂)  
Fig. 14 Particle diameter distribution (No. 7 silica sand from Yamagata)

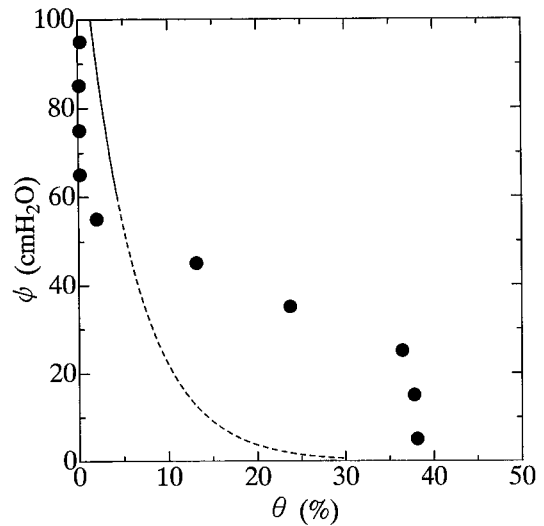


図-15 θ-φの計算値と実験値の比較  
Fig. 15 Comparison of the calculation value and an experiment value of θ-φ

表-4 計算された各粒子の配位数(山形産7号珪砂)

Table 4 Calculated coordination number for every particle diameter (No. 7 silica sand from Yamagata)

粒子の直径 D(μm)	平均 配位数	各粒径に対する個数									
		3.5	10	14	38	54	75	106	149	250	
3.5	3.7	0.0	0.0	0.1	0.0	0.1	0.4	0.9	2.0	0.2	
10	4.0	0.0	0.0	0.1	0.0	0.1	0.4	1.0	2.2	0.2	
14	4.3	0.0	0.0	0.1	0.1	0.1	0.5	1.0	2.3	0.2	
38	5.7	0.0	0.0	0.1	0.1	0.1	0.6	1.4	3.1	0.3	
54	6.9	0.0	0.1	0.1	0.1	0.2	0.7	1.6	3.8	0.3	
75	8.5	0.0	0.1	0.1	0.1	0.2	0.9	2.0	4.7	0.4	
106	11.4	0.1	0.1	0.2	0.1	0.2	1.2	2.7	6.3	0.5	
149	16.1	0.1	0.2	0.2	0.1	0.4	1.8	3.8	8.8	0.7	
250	30.5	0.2	0.3	0.3	0.3	0.7	3.3	7.2	16.8	1.4	

4 および式(16), (17)から,  $R_{max}=250/2\mu\text{m}$ ,  $R_{min}=54/2\mu\text{m}$ ,  $\omega_{1,max}=21.76^\circ$  (サクシオン値59.06cm)となる. 図-15に吸水実験で得られた $\theta-\phi$ 結果を●印で, 計算値としてリング水が独立して存在すると考えられる領域を実線で, リング水が互いに連結しあっている領域を破線で示す.

### 3. 全保水域による $\theta-\phi$ の関係の推定

前節まで球間モデルを用いてリング水が独立して存在する領域について $\theta-\phi$ 関係の推定を試みた. 本節では上記の結果をもとに全領域まで $\theta-\phi$ 関係を推定する方法を試みる.  $\theta-\phi$ 関係を示す実験式や経験式は種々提案されている(日野ら, 1989および虫明ら, 1987). ここでは砂質土に適用可能なBrooks & Corey式を用いる.

$$S_E = \left(\frac{\phi_{cr}}{\phi}\right)^\lambda \tag{18}$$

ここに,  $S_E = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r}$ ,  $\theta_r$ : 残留土壌水分,  $\theta_s$ : 飽和水分量,  $\phi_{cr}$ : 限界毛管水頭であり, 土柱内での圧力水頭が平衡状態に達した時の自由水面から飽和領域までの限界高さである.

間隙率 $\epsilon$ は既知としているので,  $\theta_s = \epsilon$ となるが本研究のように水を湿潤させて飽和させる場合, エントラップト・エアが空隙中に残るため $\theta_s$ は間隙率の80~90%になる(西垣, 1983). このため,  $\theta_s = 0.85\epsilon$ とした.  $\theta_r$ は本研究では土粒子表面のリング水のみを取り扱っているためBreslerら(1978)の定義と同様, 気乾状態となり,  $\theta_r = 0$ である(本章1節で述べたように砂の吸水率試験結果により実験値を補正

表-5 パラメータ値  
Table 5 Parameter value

	篩い分け試料				篩い分けしない試料			
	$\theta_r$ (%)	$\theta_s$ (%)	$\varphi_{cr}$ (cm)	$\lambda$	$\theta_r$ (%)	$\theta_s$ (%)	$\varphi_{cr}$ (cm)	$\lambda$
実験値	0.00	38.90	14.30	1.80	0.00	37.90	20.70	2.30
計算値	0.00	37.60	4.88	1.31	0.00	39.55	35.68	4.72

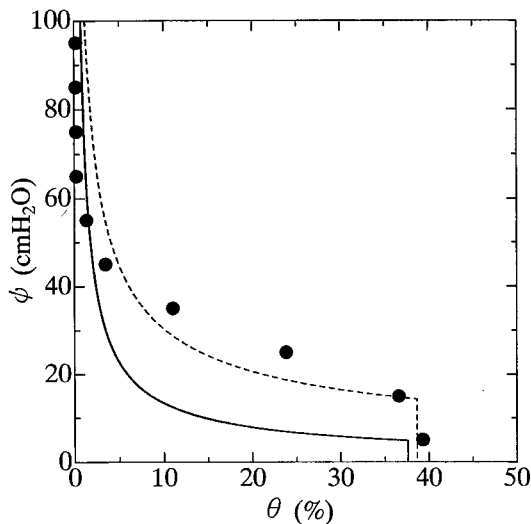


図-16  $\theta$ - $\varphi$ 関係(篩い分け試料)  
Fig. 16 Relationship between  $\theta$  and  $\varphi$  (sieving sample)

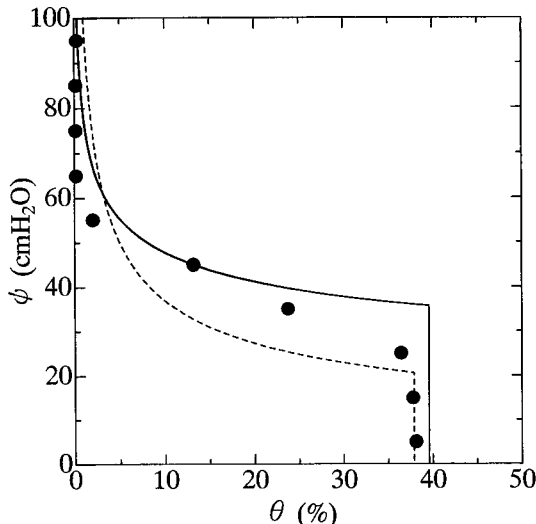


図-17  $\theta$ - $\varphi$ 関係(山形産7号珪砂)  
Fig. 17 Relationship between  $\theta$  and  $\varphi$  (No. 7 silica sand from Yamagata)

している)。 $\varphi_{cr}$ および $\lambda$ の推定は以下の方法により行った。本研究では計算される土壌水分特性曲線はリング水が独立したと思われる範囲までしかない。しかし、比較的含水率が高い懸垂域に対しても $\lambda$ は同じ値をとるものとして $\varphi_{cr}$ 、 $\lambda$ の推定を行った。具体的には以下の方法によった。リング水が独立して存在すると思われる60~85cmまで5cmごとのサクシジョンの計算値と保水量を体積含水率に変換した6組のデータを用い、両対数紙上に $S_E$ と $\varphi$ をプロットし回帰式を求める。次に、この回帰式を $S_E=1$ の点まで外挿し $\varphi_{cr}$ を、また、この直線の傾きより $\lambda$ を求めた。表-5に土柱法による実験結果から得られた各パラメータ値と本手法により得られたパラメータ値を示し、図-16、17にこのパラメータを用いて計算された $\theta$ - $\varphi$ 関係(実線)と実験値により決定された $\theta$ - $\varphi$ 曲線(破線)を実験値(●)とともに示す。両試料の計算値とも実験値とほぼ同様の傾向を示しているが体積含水率の増大に伴い実験値との差異が顕著になってくる。特に、篩い分けした試料でこの傾向

が強い。この原因として各パラメータを推定する際、間隙率とリング水が独立して存在する領域のみで各パラメータを決定していることにも起因しているが、篩い分け試料では粒子が149、250 $\mu$ mの2種類のみから構成されているとしているため $\omega_{1,max}$ が過大に評価されたことが大きな原因の1つと考えられる。

### V. 結論

本研究では構成する土粒子が球形であるとの仮定の下に微視的な観点から、粒子接合部におけるサクシジョンと保水量の関係について検討を行った。本研究で得られた主要な結論を示すと、以下のようになる。

- 1) 土粒子が球形であるとの仮定の下に2球間の接合部におけるリング水のサクシジョンと保水量を算定する式を導いた。
- 2) 粒径分布を持つ土粒子に対しても、等価半径の概念を用いることにより配位数を推定する式を示した。

- 3) 上記の式もまた配位数の関数となる。このため、等球径規則充填の配位数と間隙率の関係から等価半径のパラメータを決定する方法を示した。
- 4) リング水が粒子接合部において単独で保水するとしてサクションとその保水量の算定手法を示した。計算値および実験結果の比較検討より、両者はほぼ同様の傾向を示すが体積含水量の増加とともにその差が大きくなる。特に、構成する粒子を2種類のみとした計算結果と実験結果では顕著であった。この原因の1つとして $\theta-\phi$ 関係を算定するとき、リング水が独立して存在する領域が過大に評価されたと思われる。

謝辞：本研究の一部は、(財)北海道河川防災研究センター平成11年度研究助成「球形粒子モデル法による不飽和層内の保水機構に関する研究」の援助を受けて行われた。ここに記して謝意を表す。

#### 引用文献

- Arya L.M. and Paris J.F. (1981) : A physicoempirical model to predict the soil moisture characteristic from particle-size distribution and bulk density data, *Soil Sci. Soc. Am. J.* Vol. 45, pp. 1023-1030.
- Bear J. and Bachmat Y. (1991) : Introduction to Modeling of Transport Phenomena in Porous Media, KLUWER ACADEMIC PUBLISH.
- Bresler, E., Russo, D. and Miller, R.D. (1978) : Rapid estimate of unsaturated hydraulic conductivity function, *Soil Sci. Soc. Am. J.*, Vol. 42, pp. 170-172.
- Dias, M. M and Payatakes, A. C (1986) : Network models for two-phase flow in porous media, *Journal Fluid Mechanics*, vol. 164, pp. 305-336.
- 樋口伊佐夫(1997) : 粒子充填に関する統計的研究, 東京工業大学博士論文.
- Haver R. and Parlange J.Y. (1986) : Predicting the Water-Retention Curve from Particle-Size Distribution -1. Sandy Soils without Organic Matter-, *Soil Science*, Vol. 142, No. 6, PP. 325-339.
- 日野幹雄他(1989) : 洪水の数値予報, 森北出版, pp. 73-74.
- Kezdi, Arpad (1964) : Discussion to Winterkorn's Paper, *Highway Res. Record*, No. 52, Mechanical and Physico-Chemical Properties of Soils.
- 宮崎 毅(2000) : 環境地学, 東京大学出版会.
- 最上武雄編(1969) : 土質力学, 技報堂, pp. 904-909.
- 虫明功臣・石埜勝義・吉野文雄・山口高志(1987) : 水環境の保全と再生, 山海堂, pp. 84-90.
- Nakao T., Fujita M., Kudo M. and Nishimura T. (1993) : Retained Water in Soil Based on Probabilistic Pore Structure, *Proc. of International Congress on Modeling and Simulation*, vol. 3, pp. 937-942.
- Nakao T. and Fujita M. (1994) : Geostatistical consideration on the water retention volume and pore volume in unsaturated granular material composed of various particles, *Stochastic and Statistical Methods in Hydrology and Environmental Engineering*, Vol. 2, Kluwer Academic Publishers, Netherland, pp. 139-149.
- 中尾隆志・藤田陸博(1995) : 土壌水分特性曲線に及ぼす土壌構造の影響, 土木学会北海道支部論文報告集, 第50号, pp. 54-57.
- 西垣 誠(1983) : 不飽和領域内の土中水の浸透特性に関する2, 3の考察, 土質工学会論文報告集, Vol. 23, No. 3, pp. 165-177.
- 太田岳史・窪田順平(1984) : 一次元鉛直不飽和浸透を用いた山腹斜面域からの洪水流出解析, 第28回水理講演会論文集, pp. 535-540.
- 小野 周(1980) : 表面張力, 物理学 One Point 9, 共立出版.
- Orr F.M., et al (1975) : Pendular Rings between Meniscus Properties and Capillary Force, *Journal Fluid Mechanics*, vol. 67, pp. 723-742.
- Smith, W.G., Foote, P.D. and Busang, P.E (1929) : Packing of Homogeneous Spheres, *Phy. Rev.*, vol. 34, pp. 1271-1274.
- 杉江伸祐, 成瀬廉二(2000) : 積雪の不飽和透水係数の測定, 雪氷, 62巻2号, pp. 117-127.

(受付：2002年1月23日，受理：2002年8月22日)