

## 関数展開法に基づくトポロジー最適化による 波長分離デバイスの設計に関する検討

加藤 駿<sup>†</sup> 辻 寧英<sup>†</sup> 安井 崇<sup>††</sup> 平山 浩一<sup>††</sup>

<sup>†</sup> 室蘭工業大学情報電子工学系専攻  
〒050-8585 北海道室蘭市水元町 27-1

<sup>††</sup> 北見工業大学電気電子工学科  
〒090-8507 北見市公園町 165

E-mail: †{s2024023,y-tsuji}@mmm.muroran-it.ac.jp, ††{yasui,hirakc}@mail.kitami-it.ac.jp

あらまし 本論文では、関数展開法に基づくトポロジー最適化を用いて、波長多重伝送に用いられる3波長分離素子の最適設計を行っている。ここでは、3つの出力ポートに対してそれぞれ異なる波長の光を分離させるような3波長分離素子の最適化を行っている。最適化により得られる構造は、最適化の初期条件やパラメータに依存する。ここでは、まず初期条件による違いについて検討し、各波長の規格化透過パワーが90%程度の特性の構造を得ている。次に、通過帯域において広帯域で平坦な特性を得るための検討を行った。最後に、構造表現に用いる関数系の違いによる最適化結果の違いについても示す。

キーワード 関数展開法, トポロジー最適化, 有限要素法, 波長分離素子

### A study on optimal design of wavelength multiplexer using function-expansion based topology optimization.

Shun KATO<sup>†</sup>, Yasuhide TSUJI<sup>†</sup>, Takashi YASUI<sup>††</sup>, and Koichi HIRAYAMA<sup>††</sup>

<sup>†</sup> Muroran Institute of Technology, Division of Information and Electronic Engineering  
27-1 Mizumoto-cho, Muroran, 050-8585

<sup>††</sup> Kitami Institute of Technology, Department of Electrical and Electronic Engineering  
165 Koen-cho, Kitami, 090-8507

E-mail: †{s2024023,y-tsuji}@mmm.muroran-it.ac.jp, ††{yasui,hirakc}@mail.kitami-it.ac.jp

**Abstract** In this paper, the topology optimization method based on the function expansion method has been applied to the optimal design of wavelength demultiplexing devices used in the wavelength division multiplexing (WDM) photonic network. In this approach, the structure of the optimized device depends on the initial condition and the parameters for optimization. First, we discuss the initial structures for this optimization and get the optimized structure, in which the normalized transmission of about 90% for each wavelength channel can be realized. Next, in order to obtain flat band transmission, we investigate the optimization with more wavelengths. Finally, in order to show the difference of the obtained results in the different expansion functions, other types of expansion function are also investigated.

**Key words** Function expansion method, Topology optimization, Finite element method, Wavelength separation element

#### 1. はじめに

インターネットの普及にとともに、より安価で高速大容量な光通信システムの構築への要求がさらに高まっている。同時

に、光通信で使われる光デバイスのさらなる高性能化が求められている。このため、近年の計算機の高速化もあり、遺伝的アルゴリズム (GA) [1]、波面整合法 (WFM) [2]、トポロジー最適化 [3], [4] などの計算機を用いた自動最適設計に関する研究が行

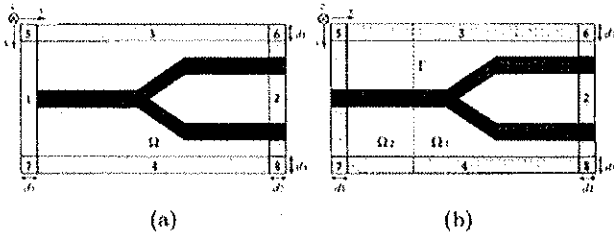


図1 PMLに囲まれた導波路構造

われるようになってきている。中でもトポロジー最適化は、目的的特性を実現する構造を自動的に生成することができ、感度解析に基づく探索であるためGAに比べて高速で、数値解析に有限要素法(FEM) [5]を用いるため反射型のデバイスも扱える。本研究では、トポロジー最適化の中で密度法を用いた場合に問題となる、グレイ領域の問題を回避できる関数展開法を用いた手法について、最適化のための初期構造、最適化の反復計算の方法についての検討を行っている。さらに、関数展開法で扱う展開関数には、フーリエ級数とウェーブレット関数の両方の場合について検討を行っている。具体的な最適化例として、波長多重伝送に用いられる3波長分離素子 [6] の最適設計を行っている。

2. 関数展開法に基づくトポロジー最適化

ここでは、2次元光導波路デバイスの最適化のためのトポロジー最適化の定式化を示し、今回行った改良と検討について述べる。

2.1 有限要素法による定式化

光導波路のような開放系の導波路の場合、入出力導波路をモード展開することは難しい。ここでは、図1に示すように、解析領域周囲を完全整合層(PML)で囲むことでモード展開を不要にしたFEMを用いる。

マクスウェル方程式から、光波の伝搬を表す波動方程式は以下のように与えられる。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( p \frac{s_y}{s_x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( p \frac{s_x}{s_y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + k_0^2 s_x s_y q \Phi = 0 \quad (1)$$

ここに  $\Phi$ ,  $p$ ,  $q$  はTE波, TM波に対してそれぞれ

$$\begin{aligned} \Phi &= E_z, & p &= 1, & q &= n^2 & \text{for TE wave} \\ \Phi &= H_z, & p &= 1/n^2, & q &= 1 & \text{for TM wave} \end{aligned}$$

であり、 $E_z$ ,  $H_z$  はそれぞれ電界、磁界の  $z$  方向成分、 $k_0$  は自由空間波数である。また、PMLパラメータは各領域において表1で与えられ、表中の  $s_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) は

$$s_i = 1 - j(\rho/d_i)^2 \tan \delta_i \quad (2)$$

で与えられる。ここに、 $\rho$  はPMLと解析領域端からの距離、 $\delta_i$  はPML終端 ( $\rho = d_i$ ) での損失角である。

いま、領域全体を三角形2次要素を用いて分割し、電界あるいは磁界の  $z$  成分  $\Phi$  を各要素内において

$$\Phi = \{N\}^T \{\Phi\}_e \quad (3)$$

と近似する。ここに、 $\{\Phi\}_e$  は各要素内節点における  $\Phi$  の値か

表1 PMLパラメータ

PML parameter	PML領域							
	1	2	3	4	5	6	7	8
$s_x$	$s_1$	$s_2$	1	1	$s_1$	$s_2$	$s_1$	$s_2$
$s_y$	1	1	$s_3$	$s_4$	$s_3$	$s_3$	$s_4$	$s_4$

らなるベクトル、 $\{N\}$  は形状関数ベクトルであり、 $T$  は転置することを意味する。

ここで図1(b)に示すような  $x$  軸に垂直な入射面  $\Gamma$  を考え、領域全体を部分領域  $\Omega_1, \Omega_2$  に分ける。次に式(1)にガラーキン法を適用し、部分積分を行い、PMLの外側の境界で  $\Phi = 0$  となることを考慮して全ての要素について重ね合わせると、次の行列方程式が得られる [5]。

$$[P]\{\Phi\} = \{u\} \quad (4)$$

ここに  $[P]$ ,  $\{u\}$  は

$$\begin{aligned} [P] &= \sum_e \iint_e \left[ p \frac{s_y}{s_x} \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial x} + p \frac{s_x}{s_y} \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial y} - k_0^2 q s_x s_y \{N\} \{N\}^T \right] dx dy \\ \{u\} &= \sum_e' \int_e p \frac{s_y}{s_x} \{N\}_r \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \right) dl \end{aligned}$$

であり、 $\{N\}_r$  は入射面  $\Gamma$  における形状関数ベクトルである。また、 $\sum_e$  はすべての要素についての和、 $\sum_e'$  は入射面  $\Gamma$  に接する要素についての和を表わす。なお、境界  $\Gamma$  において領域  $\Omega_i$  ( $i = 1, 2$ ) における  $\Phi$  を  $\Phi_i$  としている。

2.2 最適化領域の屈折率分布の表現法

標準的な2媒質を対象とした関数展開法では、最適化領域内の比誘電率分布を適当な解析関数  $w(x, y)$  を用いて以下のように表現する。

$$\epsilon_r(x, y) = \epsilon_{ra} + (\epsilon_{rb} - \epsilon_{ra})H\{w(x, y)\} \quad (5)$$

ここで、 $\epsilon_{ra}, \epsilon_{rb}$  ( $\epsilon_{rb} > \epsilon_{ra}$ ) は使用可能な2つの材料の比誘電率で、 $H(\xi)$  は  $\xi$  の値によって0か1かの値をとる関数であり、 $\epsilon_r$  は  $w(x, y)$  の値によって  $\epsilon_{ra}, \epsilon_{rb}$  のどちらかの比誘電率になる。ただし実際には、 $\epsilon_r$  が微分可能となるように、 $H(\xi)$  は以下のように定義される連続関数とする。

$$H(\xi) = \begin{cases} 0 & (\xi \leq -h) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\xi + h}{h} \right)^2 & (-h < \xi < 0) \\ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\xi - h}{h} \right)^2 & (0 \leq \xi < h) \\ 1 & (\xi \geq h) \end{cases} \quad (6)$$

ここで、 $h$  は  $H(\xi)$  が連続関数になるように導入された量であり、 $-h < w(x, y) < h$  となる領域では比誘電率は中間的な値をとりうるが、 $h$  を十分に小さくするとグレイ領域を小さくできる。最終的に  $h \rightarrow 0$  とすることでグレイ領域を除去することが可能となる。 $h$  の具体的な大きさは、最適化領域内のグレイ領域の占める割合を指定することで決定することができる。

最適化領域内の屈折率分布を決める関数  $w(x, y)$  は一般に

$$w(x, y) = \sum_i^N c_i f_i(x, y) \quad (7)$$

という形で与えられる。文献 [4] では以下のようなフーリエ級数の形が用いられており、本論文でもまずこの表現を用いることにする。

$$w(x, z) = \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=-N_y}^{N_y-1} (a_{ij} \cos \theta_{ij} + b_{ij} \sin \theta_{ij}) \quad (8)$$

$$\theta_{ij} = \frac{2\pi i}{L_x} x + \frac{2\pi j}{L_y} y \quad (9)$$

また本論文では、他の関数系としてウェーブレット関数を用いた場合についても検討を行う。このとき関数  $w(x, y)$  は  $N_x, N_y$  を  $x, y$  方向の展開項数として以下の式で表している。

$$w(x, y) = \sum_{j=0}^{N_x-1} \sum_{k=0}^{N_y-1} \sum_{l=0}^{2^j} \sum_{m=0}^{2^k} a_{jklm} f(t_x) f(t_y) \quad (10)$$

$$t_x = 2^j \tilde{x} - l \quad \left( \tilde{x} = \frac{x - x_0}{W_x} \right) \quad (11)$$

$$t_y = 2^k \tilde{y} - m \quad \left( \tilde{y} = \frac{y - y_0}{W_y} \right) \quad (12)$$

ここに、 $x_0, y_0$  は最適化領域の  $x, y$  座標の最小値であり、 $W_x, W_y$  は  $x, y$  方向の最適化領域の幅である。また、関数  $f(t)$  はマザーウェーブレットであり、ここでは以下に表わされるメキシカンハット型のウェーブレットを用いている。

$$f(t) = (1 - t^2) \exp(-t^2/2) \quad (13)$$

### 2.3 随伴変数法による感度解析

最適化においては、前小節での式 (7) 中の係数  $c_i$  を目的の特性が得られるように更新していくことで最適化構造を得る。実際には何らかの目的関数を設定し、その最大化あるいは最小化を行う。その際に、目的関数の  $c_i$  に関する勾配を求めることで  $c_i$  の更新方向を決める。多くの問題では目的関数は散乱パラメータ  $S_{n1}$  の関数で表されることが多いため、その  $c_i$  に関する勾配を効率的に求めるための随伴変数法について簡単に示す。

式 (4) を解いて伝搬界分布  $\{\Phi\}$  が求まると、散乱パラメータ  $S_{n1}$  は

$$S_{n1} = \{\Phi\}^T \{g_n\} \quad (14)$$

と書くことができる。ここで、ベクトル  $\{g_n\}$  は  $\beta_n, \{\Phi_n\}$  を導波路  $n$  の伝搬定数、固有モードベクトルとして

$$\{g_n\} = [Q] \{\Phi_n\} \quad (15)$$

$$[Q] = \frac{c\beta_n}{k_0} \sum_{e_n} \int_{\Gamma_n} p\{N\} \{N\}^T d\Gamma_n \quad (16)$$

と表される。ここで下添字  $n$  は導波路  $n$  に関する量であることを表す。

いま、感度を求めるために、 $S_{n1}$  を  $c_i$  で偏微分すると

$$\frac{\partial S_{n1}}{\partial c_i} = \sum_j \frac{\partial S_{n1}}{\partial \phi_j} \frac{\partial \phi_j}{\partial c_i} = \left\{ \frac{\partial S_{n1}}{\partial \phi} \right\}^T \frac{\partial \{\phi\}}{\partial c_i} \quad (17)$$

を得る。さらに  $\partial\{\phi\}/\partial c_i$  に式 (4) を  $c_i$  で偏微分した式を代入すると、最終的に  $\partial S_{n1}/\partial c_i$  は

$$\frac{\partial S_{n1}}{\partial c_i} = -\{\lambda_n\}^T \frac{\partial [P]}{\partial c_i} \{\Phi\} \quad (18)$$

と表される。ここで  $\{\lambda_n\}$  は

$$[P]^T \{\lambda_n\} = \left\{ \frac{\partial S_{n1}}{\partial \Phi} \right\} \quad (19)$$

を解くことで求まり、一度  $\{\lambda_n\}$  が求まると、 $\partial S_{n1}/\partial c_i$  は単純なベクトルの積により求めることができる。式 (18) の計算には  $\partial \epsilon_r / \partial c_i$  の計算が必要であるが、これは  $\xi = w(x, y)$  として

$$\frac{\partial \epsilon_r}{\partial c_i} = f_i(x, y) (\epsilon_{rb} - \epsilon_{ra}) \frac{\partial H(\xi)}{\partial \xi} \quad (20)$$

と表すことができる。

### 2.4 最適化途中のグレイ領域の設定

関数展開法では、式 (6) 中の  $h$  の値を十分小さくすることでグレイ領域を除去できるが、あまり小さくしすぎると最適化がうまく進まないという問題がある。そのためグレイ領域の割合が解析領域の面積全体に占める割合をある値に設定し、そうなるための  $h$  の値を決める方法が考えられる。さらにこの割合を最適化の初期段階では大きくし、最適化が進むにつれて減少させることで、初期段階では比較的広い領域に渡る最適化が行われ、最適化の後半では媒質境界の微修正が行われるようにできると考えられる。ここでは、 $h$  を

$$h = h_{\max} \exp(-i/M) \quad (21)$$

として、 $h$  の値を指数関数的に減少させることを考えた。ここで  $i$  は反復回数、 $M$  は  $h$  をどの程度の速さで減少させるかを表す量であり、 $h_{\max}$  は 0 回目の反復計算における  $h$  の値である。ただし、反復回数が多くなり  $h$  が小さくなり過ぎる場合には、グレイ領域の面積と最適化領域の面積の比がある値より下回らないように  $h$  を決めることにした。また、次節での最適化では、 $h_{\max}$  の値を初期構造を表す  $w(x, y)$  の最大値の 2 倍とし、意図的に最適化の初期段階では弱導波路となるようにした。これは、光導波路の最適化において弱導波路の場合の方が局所最適解に陥る可能性が低いためである。

## 3. 3 波長分離素子の最適設計例

ここでは、前節までで述べた最適化手法を用いて光導波路デバイスの最適化を行う。波長多重伝送に用いられる 3 波長分離素子を設計する。

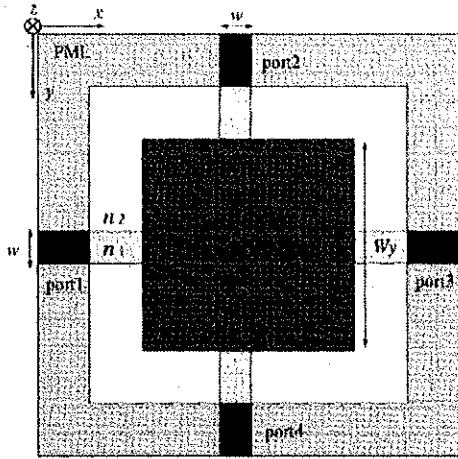
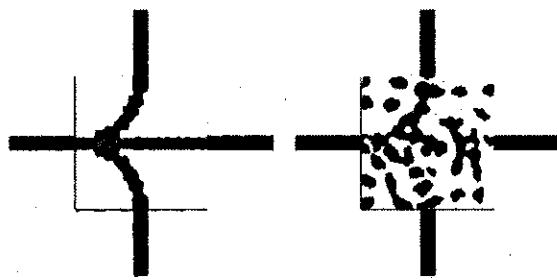


図2 3波長分離素子の問題設定



(a) 初期構造 (b) 最適化構造  
図3 単純分岐初期構造と最適化構造

### 3.1 初期構造の検討

波長選択性を有する光導波路デバイス設計例として、図2の最適化モデルにおいて波長  $\lambda_1 = 1.31 \mu\text{m}$ ,  $\lambda_2 = 1.49 \mu\text{m}$ ,  $\lambda_3 = 1.55 \mu\text{m}$  の3つの波長の光をそれぞれ port 2, 3, 4 に分離するデバイスの最適化を行った。導波路をシリコン (Si), 周囲を石英とする場合を考え、コア、クラッドの屈折率は  $n_1 = 3.4$ ,  $n_2 = 1.45$  とし、設計領域内はこの2つの材料のみで構成されるものとする。また、入出力導波路の幅を  $w = 0.2 \mu\text{m}$ , 最適化領域のサイズを  $W_x = W_y = 2 \mu\text{m}$  とし、TE 基本モードが入射する場合を考える。目的関数は

$$C = \sum_{i=1}^3 |S_{(i+1)1}(\lambda_i)|^2 \quad (22)$$

として、これを最大化する。

ここでは展開関数にフーリエ級数を用いる。初期構造と最適化構造を図3に、最適化構造中の光波の伝搬波形を図4に示す。また、図5に最適化中の各ポートへの規格化透過パワーの変化を示す。最終的な各波長の目的ポートへの規格化透過パワーは、波長  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  に対してそれぞれ 0.918, 0.897, 0.882 であった。図4より、各波長の光は最適化領域内で自動的に生成されたいくつかの共振構造で共振をすることで目的のポートに分離されていることがわかる。この結果より初期構造に対してあらかじめ共振しやすい構造を与えることで、より良い特性が得られる可能性がある。このときの波長特性を図6に示す。クロストークも低く抑えられていることがわかる。

次に、最適化領域内で共振構造を得られやすくするように、



(a)  $\lambda_1 = 1.31 \mu\text{m}$  (b)  $\lambda_2 = 1.49 \mu\text{m}$  (c)  $\lambda_3 = 1.55 \mu\text{m}$   
図4 最適化構造の伝搬波形 (単純分岐初期構造)

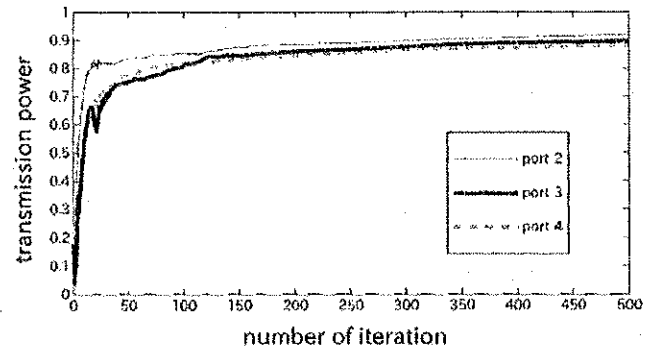


図5 各ポートへの規格化透過パワーの変化 (単純分岐初期構造)

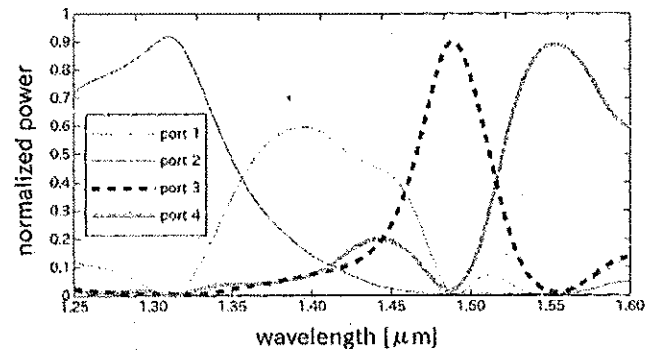


図6 規格化透過パワーの波長依存性 (単純分岐初期構造)

いくつかの円形構造を組み合わせた初期構造を考えた。最適化の初期構造と最適化構造を図7に、最適化構造中の光波の伝搬波形を図8に示す。このときの各ポートへの規格化透過パワーは、波長  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  に対してそれぞれ 0.932, 0.889, 0.897 であり、わずかに特性が改善されているものの、初期構造の違いによる特性の大きな違いは見られなかった。

最後に、通過帯域を広げ、通過帯域において平坦な波長特性を得ることを目的として、 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  に  $\lambda_1 \pm \Delta\lambda, \lambda_2 \pm \Delta\lambda, \lambda_3 \pm \Delta\lambda$  を加えた9つの波長に対しての最適化を行った。ここで  $\Delta\lambda = 0.01 \mu\text{m}$  とした。最適化の初期構造と最適化構造を図9に、波長特性を図10に示す。このときの各ポートへの規格化透過パワーは、波長  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  に対してそれぞれ 0.945, 0.921, 0.930 であり、特性が改善されている。ただし、通過帯域における平坦性は得られていないため、さらなる検討が必要である。

### 3.2 展開関数の検討

ここでは展開関数による最適化の違いを調べるために、展開関数にウェーブレット関数を用いた最適化を検討する。最適化

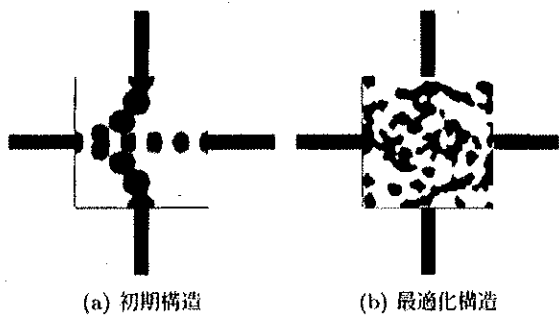


図 7 共振型初期構造と最適化構造

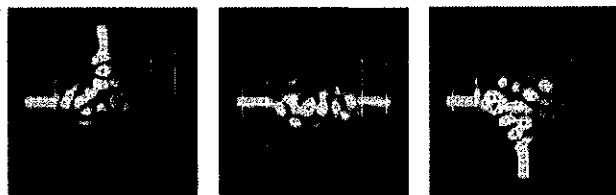


図 8 最適化構造の伝搬波形 (共振型初期構造)

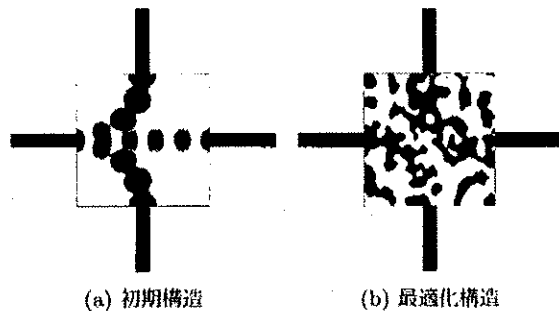


図 9 共振型初期構造と最適化構造 (広帯域化した場合)

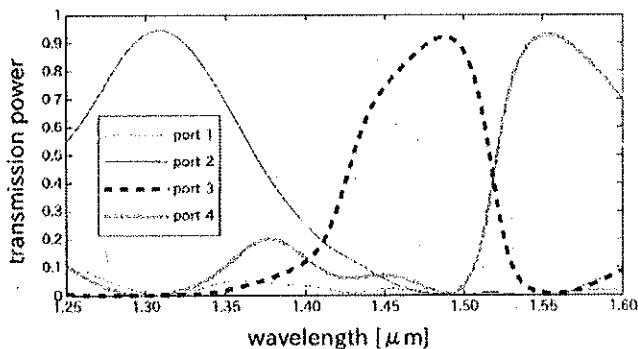


図 10 規格化透過パワーの波長依存性 (広帯域化した場合)

モデル、パラメータは前小節と同様とし、初期構造と最適化構造を図 11 に、最適化構造中の光波の伝搬波形を図 12 に示す。各ポートへの規格化透過パワーは、波長  $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$ 、 $\lambda_3$  に対してそれぞれ 0.874、0.796、0.804 であった。フーリエ級数を用いた場合と比較して構造が単純になっているが、特性は劣化していることがわかる。フーリエ級数を用いた場合に比べて屈折率更新が、主に媒質境界に制限されるためだと考えられる。

#### 4. まとめ

関数展開法に基づくトポロジー最適化による 3 波長分離素

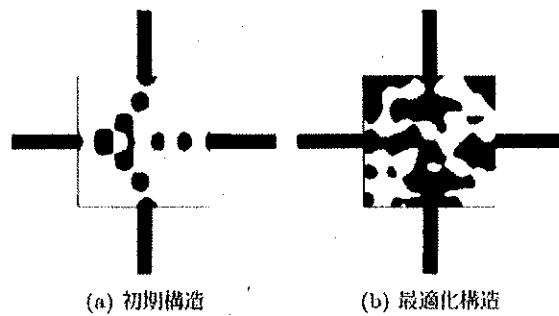


図 11 共振型初期構造と最適化構造 (ウェーブレット関数を使用)

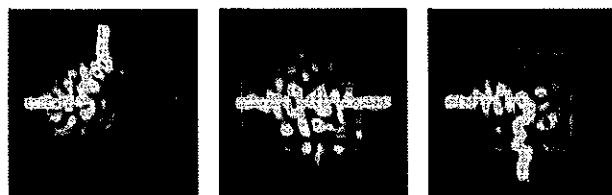


図 12 最適化構造の伝搬波形 (ウェーブレット関数を使用)

子の最適設計において、単純な分岐構造を初期構造として与えた場合、共振を利用した初期構造を与えた場合についての検討を行った。あらかじめ共振しやすい構造で、通過帯域を広帯域化する最適化を行うことでより早い段階で解が収束し、最終的な特性も改善できている。フーリエ級数展開を用いた最適化では、比較的良好な特性を得ることはできているが、非常に微細な構造が得られている。次に、関数展開法での展開関数にウェーブレット関数を用いて同様な最適化を行った。この場合、構造は単純化されているが特性は劣化してしまった。

今後はより単純で、より特性の良い構造を得るためのさらなる検討を行うとともに、3次元構造の最適化も行う予定である。

#### 文 献

- [1] J. Jiang, J. Cai, G.P. Nordin, and L. Li, "Parallel micro-genetic algorithm design for photonic crystal and waveguide structures," *Opt. Lett.*, vol. 28, pp. 2381-2383, Dec. 2003.
- [2] Y. Sakamaki, T. Saida, T. Hashimoto, and H. Takahashi, "New optical waveguide design based on wavefront matching method," *J. Lightwave Technol.*, Vol.25, No.11, pp.3511-3518, Nov 2007.
- [3] Y. Tsuji, K. Hirayama, T. Nomura, K. Sato, and S. Nishiwaki, "Design of optical circuit devices based on topology optimization," *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol. 18, no. 7, April 2006.
- [4] Y. Tsuji and K. Hirayama, "Design of optical circuit devices using topology optimization method with function-expansion-based refractive index distribution," *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol. 20, no. 12, June 2008.
- [5] Y. Tsuji and M. Koshiba, "Finite element method using port truncation by perfectly matched layer boundary conditions for optical waveguide discontinuity problems," *J. Lightwave Technol.*, vol. 20, no. 3, pp. 463-468, March 2002.
- [6] T.T. Shih, Y.D. Wu, and J.J. Lee, "Proposal for compact optical triplexer filter using 2-D photonic crystals," *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol. 21, no. 1, Jan. 2009.
- [7] K. Fujimoto, Y. Tsuji, K. Hirayama, T. Yasui, S. Sato, and R. Kijima, "A study on topology optimization of optical circuits consisting of multi-materials," *J. Lightwave Technol.*, vol. 30, pp. 2210-2215, July. 2012.