

# Ⅰ-31 複合円板部材中を伝播する 応力波動の解析

北見工業大学 学生員 重清 浩司  
 北見工業大学 正 員 大島 俊之  
 北見工業大学 正 員 三上 修一  
 日本大学 正 員 能町 純雄

## 1. まえがき

著者らは、文献1)において複合材料中を伝播する応力波速度の解析を行い、材料の劣化やひび割れが応力波速度に及ぼす影響を検討して構造物の健全度評価に、これらの結果を応用する研究を行った。<sup>2)</sup>また、模型実験として応力波の計測システムを用いて複合材料中の内部構造を同定する研究を行った。<sup>3)4)</sup>さらに文献4)では、複合円板モデルによる応力波動の伝播に関する実験を行ったので、本研究では文献5)の手法を二次元問題に適用して解析し、理論的に求めた応力波動の特性を実験的研究による解析に適用することを検討した。数値計算では弾性定数、密度などの異なる部材からなる複合円板の動的応答や応力分布について示す。

## 2. 理論解析概要

図1に示すような複合部材を伝播する応力波動をフーリエ・ハンケル変換によって解析した。半径方向を  $r$  軸、円周方向を  $\theta$  軸とし、その方向の変位成分をそれぞれ  $u$ 、 $v$ 、各応力成分を  $\sigma_r$ 、 $\sigma_\theta$ 、 $\tau_{r\theta}$ 、とすると運動方程式は

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{r \partial \theta} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$\frac{\tau_{\theta r}}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{\theta r}}{r} + \frac{\partial \sigma_\theta}{r \partial \theta} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

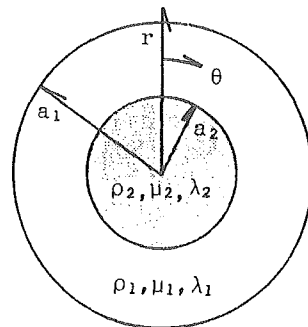


図-1 複合円板

となる。ここで  $\rho$  は密度、 $t$  は時間である。

つぎに各変位、応力成分を

$$\begin{aligned} u &= \tilde{u}_m \cos m\theta \sin \omega t & v &= \tilde{v}_m \cos m\theta \sin \omega t \\ \sigma_r &= \tilde{\sigma}_{r,m} \cos m\theta \sin \omega t & \sigma_\theta &= \tilde{\sigma}_{\theta,m} \cos m\theta \sin \omega t \\ \tau_{r\theta} &= \tilde{\tau}_{r\theta,m} \sin m\theta \sin \omega t & m &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2)$$

と仮定する。さらに変位と応力の関係にHookeの法則を用い、半径方向にHankel変換を行えば複合円板の外側の部分に対し、次の解を得る。

$$u = (A\tilde{m}r + B\tilde{m}r) \cos m\theta \sin \omega t \quad (3)$$

$$v = (A\tilde{m}r - B\tilde{m}r) \sin m\theta \sin \omega t \quad (4)$$

$$\sigma_r = \left\{ (2\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial r} (\tilde{A}_{mr} + \tilde{B}_{mr}) + \lambda \left( \frac{m+1}{r} \tilde{A}_{mr} + \frac{m-1}{r} \tilde{B}_{mr} \right) \right\} \cos m\theta \sin \omega t \quad (5)$$

$$\sigma_\theta = \left\{ (2\mu + \lambda) \left( \frac{m+1}{r} \tilde{A}_{mr} - \frac{m-1}{r} \tilde{B}_{mr} \right) + \lambda \frac{\partial}{\partial r} (\tilde{A}_{mr} + \tilde{B}_{mr}) \right\} \cos m\theta \sin \omega t \quad (6)$$

$$\tau_{r\theta} = \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (\tilde{A}_{mr} + \tilde{B}_{mr}) - \frac{m+1}{r} \tilde{A}_{mr} - \frac{m-1}{r} \tilde{B}_{mr} \right\} \sin m\theta \sin \omega t \quad (7)$$

ここで

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{mr} = & \sum_{k=1}^2 \left\{ \frac{1}{N_\mu} \psi_{mp}^{(k)}(N_\mu r) \left[ \frac{1}{2\mu} \alpha_{mk} + (m+1) A_{mk} + (m-1) B_{mk} \right] \right. \\ & \left. + \frac{\mu}{2\mu + \lambda} \frac{1}{N_\alpha} \psi_{mp}^{(k)}(N_\alpha r) \left[ \frac{1}{2\mu} \beta_{mk} + (m+1) A_{mk} - (m-1) B_{mk} \right] \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{mr} = & \sum_{k=1}^2 \left\{ -\frac{1}{N_\mu} \psi_{ms}^{(k)}(N_\mu r) \left[ \frac{1}{2\mu} \alpha_{mk} + (m+1) A_{mk} + (m-1) B_{mk} \right] \right. \\ & \left. + \frac{\mu}{2\mu + \lambda} \frac{1}{N_\alpha} \psi_{ms}^{(k)}(N_\alpha r) \left[ -\frac{1}{2\mu} \beta_{mk} + (m+1) A_{mk} - (m-1) B_{mk} \right] \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

である。なお、 $\mu$ 、 $\lambda$ はLameの弾性定数であり  $N_\mu^2 = \rho\omega^2/\mu$   $N_\alpha^2 = \rho\omega^2/(2\mu + \lambda)$  である。また関数  $\psi_{mp}$   $\psi_{ms}$  はBessel関数により次のように表される。

$$\psi_{mp}^{(k)}(Nr) = \frac{H_{m+1,m}^{(k)}(Nr)}{H_{m,m}^{(k)}(Na_k)} \quad \psi_{ms}^{(k)}(Nr) = \frac{H_{m-1,m}^{(k)}(Nr)}{H_{m,m}^{(k)}(Na_k)} \quad (10)$$

$$H_{m,n}^{(k)}(Nr) = J_m(Nr)Y_n(Na_{k-1}) - (-1)^{m+n} J_n(Na_{k-1})Y_m(Nr)$$

また、 $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $A$ 、 $B$ は応力、変位の境界値であり、次の意味である。

$$\alpha_{mk} = \tau_{r\theta}|_{r=a_k} \quad (11) \quad \beta_{mk} = \sigma_r|_{r=a_k} \quad (12)$$

$$A_{mk} = \tilde{A}_{mk}|_{r=a_k}/a_k \quad (13) \quad B_{mk} = \tilde{B}_{mk}|_{r=a_k}/a_k \quad (14)$$

以上により複合円板の外側に対する解を求めたが内側に対しては(8),(9)式の $k=2$ を無視し、(10)式において  $H_{m,n}^{(k)}(Nr) = J_m(Nr)$  とすることにより得られる。以上の式中の境界値 $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $A$ 、 $B$ を求めることにより図1に示すような複合円板に対する応力、変位の一般式を得ることが出来る。外表および境界面での応力、変位の条件は、境界面において応力、変位が連続しているものとすれば

1) 外表( $r=a_1$ )

$$\sigma_{r,1} = p(\theta, t) \quad (15) \quad \tau_{r\theta,1} = 0 \quad \alpha_{m,1} = 0 \quad (16)$$

2) 境界面( $r=a_2$ )

$$\tau_{r\theta,1} = \tau_{r\theta,2} \quad \alpha_{m,1} = \alpha_{m,2} \quad (17) \quad \sigma_{r,1} = \sigma_{r,2} \quad \beta_{m,1} = \beta_{m,2} \quad (18)$$

$$u_1 = u_2 \quad v_1 = v_2 \quad A_{m,1} = A_{m,2} \quad B_{m,1} = B_{m,2} \quad (19)$$

である。ここで  $p$  は外力で添え字 1, 2 はそれぞれ複合円板の外側、内側に対するものを表している。また(13),(14)より

$$a_k A_{mk,1} = \tilde{A}_{mr,1} \Big|_{r=a_k} \quad (20) \quad a_k B_{mk,1} = \tilde{B}_{mr,1} \Big|_{r=a_k} \quad (21)$$

$$a_2 A_{m1,2} = \tilde{A}_{mr,2} \Big|_{r=a_2} \quad (22) \quad a_2 B_{m1,2} = \tilde{B}_{mr,2} \Big|_{r=a_2} \quad (23)$$

が満足されなければならない。

### 3. 解析結果

数値解析結果として、複合円板における応力の分布、及び応力の応答倍率について示す。なお、これより示す結果は、2. で述べた解析において  $m=1$  の場合である。

#### i) 応力分布

図-2は、 $\theta = \pi/4$  の方向における  $\sigma_r$  (上段) と  $\tau_{r\theta}$  (下段) の分布である。横軸は、円板の中央( $r=0$ )から外表( $r=a_1$ )まで、すなわち半径方向を表しており、それぞれの線は図の横に示すように、外径と内径との比の違いを表している。また、内側と外側の部分の密度比を 3、弾性係数比を 7、ポアソン比はそれぞれ 0.30, 0.25 とした。この図より、 $\sigma_r$  の分布は中央で 0 となり、中央より境界面までは、ほぼ直線的に増加している。境界面を越えると  $\sigma_r$  は減少するが大きな変化はなく、外表で外力に一致している。一方、 $\tau_{r\theta}$  は内側の部分では  $\sigma_r$  と同じ様な分布をしているが、境界面を越えると急激に減少しており  $\sigma_r$  との大きな違いを示している。このことより異なる弾性定数、密度をもつ複合円板において、それらの応力に及ぼす影響は垂直方向応力よりも境界面付近の接線方向応力に対する方が大きいことがわかる。

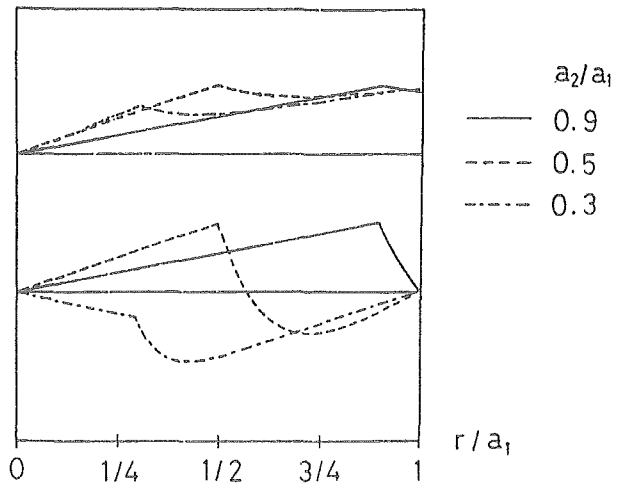


図-2 応力分布 ( $\sigma_r, \tau_{r\theta}$ )

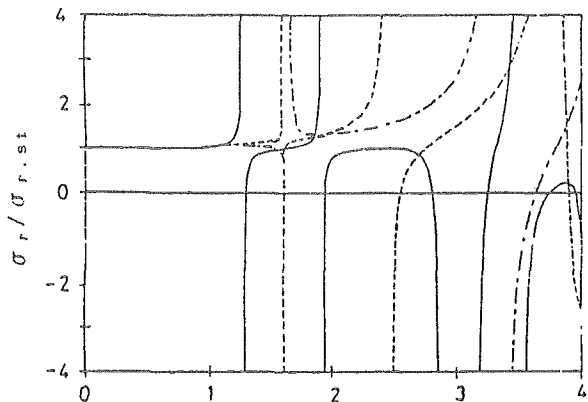


図-3 応力  $\sigma_r$  の応答倍率

#### ii) 応力の応答倍率

図-3~5は、それぞれ  $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$  の応答倍率を示している。横軸は、外側の部分の弾性体のせん断波速度が直径の 2 倍を伝わるのに要する時間  $t_0$  と振動周期  $T$

( $T=2\pi/\omega$ ) との比である。<sup>1)</sup> 先程の応力分布同様  $a_2/a_1$  の値を 0.3, 0.5, 0.9 と変化させた時の結果を同じ種類の線を用いて表しており、弾性定数、密度、ポアソン比も同じである。また解析位置は  $r = 2a_1/3$ ,  $\theta = \pi/4$  である。すべての応力に対して共通な特徴としてあげられることは、 $\omega$  が小さく  $T$  が 0~1 までの時、応答倍率はほぼ 1 となっている。また各  $a_2/a_1$  の値に対して応答が発散している箇所があるが、これらは各複合円板の固有周期によるものである。ほかに、 $\tau_{r\theta}$  の応答倍率が他のものと比べ比較的大きいことなどがあげられる。しかし  $a_2/a_1$  の値の変化による影響の規則性はこれらの図からは認められない。

#### 4. まとめ

以上の解析により複合円板に対し次のことがあげられる。

- i) 半径方向の応力分布は、特に境界面付近で  $\sigma_r$  よりも  $\tau_{r\theta}$  において顕著である。
- ii)  $\omega$  が小さく  $T$  が 1 以下の時は各応力の応答倍率はほぼ 1 となる。
- iii)  $\omega$  が大きくなると、各応答は固有周期ごと発散する

先に述べたように本論文における結果は  $m=1$  のみであるが、他の  $m$  の値に対しても今後解析を行う予定である。

#### 参考文献

- 1) 大島、三上、能町、重清：複合材料中の応力波速度と構造物の健全度評価への応用、構造工学論文集、Vol.32A、p.649-659、1986.3
- 2) 重清、大島、能町：応力波速度解析による構造物の健全度評価 土木学会第41回年次学術講演会概要集、p.589-590、1986.11
- 3) 三上、大島、重清、能町：応力波速度による構造物の健全度評価の実験的研究 土木学会第41回年次学術講演会概要集、p.591-592、1986.11
- 4) 三上、大島、重清、能町：応力波速度による内部構造の探査に関する実験的研究 土木学会北海道支部論文報告集、第43号、1987.2
- 5) 菅田、松岡、岸、能町：動的集中力を受ける二層円柱の応答解析、土木学会北海道支部論文報告集、第42号、p.73-78、1986.2

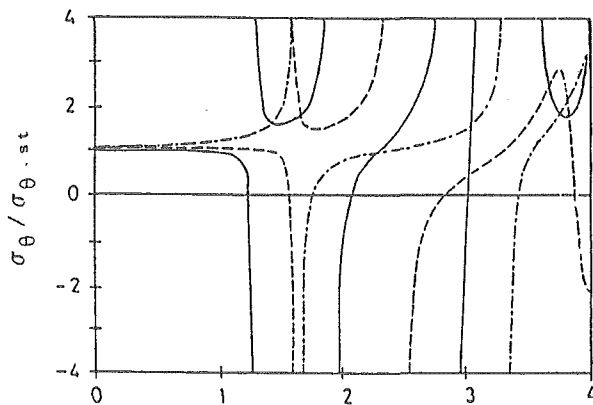


図-4 応力  $\sigma_\theta$  の応答倍率

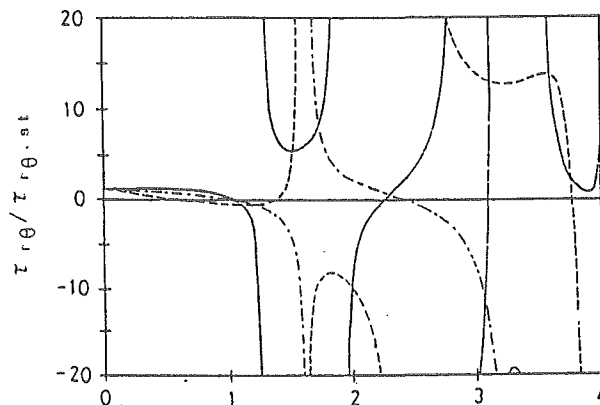


図-5 応力  $\tau_{r\theta}$  の応答倍率