

流域の地形構造を考慮した降雨流出系の
確率応答と流域スケールに関する研究

平成9年9月

早 川 博

目 次

第1章	序 論	1
1.1	本研究の目的	1
1.2	本研究の構成	6
	参考文献	7
第2章	流域地形量の定量化	9
2.1	概 説	9
2.2	数値地図による流域地形量解析	12
2.2.1	グリッド型数値標高データによる擬河道網の抽出	14
2.2.2	擬河道網による流域地形量の計測	18
2.2.3	擬河道網による河道網の再現性の検討	21
2.3	河道網パターンの確率変動特性	31
2.3.1	河道網パターンの分類法	31
2.3.2	河道網パターンの生起確率	32
2.3.3	河道網パターンの移行過程	37
2.4	サブ流域の地形量特性	39
2.4.1	サブ流域の流域面積とリンク長	39
2.4.2	サブ流域から流域末端までの流路長	59
2.4.3	斜面地形量の特性	62
2.5	第2章のまとめ	96
2.5.1	数値地図による流域地形量解析	96
2.5.2	河道網パターンの確率変動特性	96
2.5.3	サブ流域の地形量特性	97
	参考文献	98

第3章	流域地形量の変動による流出量の確率応答	103
3.1	概説	103
3.2	サブ流域からの流出量の確率応答	105
3.2.1	基礎理論	105
3.2.2	流出量の平均値	108
3.2.3	流出量の分散	109
3.2.4	流出量の3次モーメント	115
3.2.5	流出量の4次モーメント	120
3.2.6	貯留方程式が線形の場合の理論解の検証	124
3.2.7	貯留方程式が非線形の場合の理論解の検証	130
3.2.8	サブ流域の地形量と貯留係数の関係	132
3.2.9	サブ流域からの流出量の確率応答	135
3.2.10	流量表示の場合の理論解の検証	141
3.3	河道網パターンの確率変動による流出量の確率応答	146
3.3.1	流出の遅れ時間の確率変動	146
3.3.2	遅れ時間の確率変動を考慮した流量の確率応答	148
3.3.3	シミュレーションによる理論解の検証	149
3.3.4	伝播速度の変動を考慮した流出量の確率応答	154
3.4	第3章のまとめ	160
	参考文献	161
第4章	流域スケールと降雨－流出特性	163
4.1	概説	163
4.2	流域場の流域特性が均質となる流域サイズ	165
4.2.1	地形分類, 表層地質の均質な面積	169
4.2.2	地形分類と表層地質を組み合わせた均質な面積	177
4.2.3	均質な流域サイズの検討	184
4.3	降雨場の均質となる雨域サイズ	186
4.3.1	レーダー雨量計とは	186
4.3.2	降雨場の平均雨量強度・降雨継続時間・降雨波形数	187
4.3.3	降雨の一樣性の判断基準の検証	192
4.3.4	一樣な降雨の雨域サイズ	195
4.4	流域の低域フィルター機能としての流域サイズ	197

4.4.1	降雨流出系の応答特性	198
4.4.2	流域サイズとゲインの関係	201
4.4.3	流域の河道網の低域フィルターとしての働き	204
4.4.4	三角形降雨波形に対する周波数応答特性	218
4.4.5	流域の周波数応答特性から導かれる流域スケール	225
4.4.6	実流域の流出解析への適用	227
4.5	第4章のまとめ	244
	参考文献	246
第5章	結 論	248
	謝 辞	

第1章 序 論

1.1 本研究の目的

流域の降雨－流出現象は、入力である降雨の時間的・空間的変動と、降雨を流量に変換する場である流域の地形や地質、植生等の場の特性量の空間的変動に強く支配される現象である。流域は、降雨を直接流量に変換する斜面域と、斜面域からの流出量を合成し、流域の出口まで運搬する河道に大別でき、一本の河道とその両側に斜面の付随した形状が流域の基本単位である。この基本単位の流域をサブ流域と呼ぶことにすると、流域はまた、このサブ流域の集合体であり、その空間的配置を表すのが流域の河道網構造となる。

流域の河道網は、模式的に表すと図-1.1 に示すような樹枝状のパターンを呈している。河道網は、河道の水源と合流点、合流点と合流点、あるいは合流点と流域の出口を結ぶ河道からなり、Shreve¹⁾の提案した河道網理論ではこの河道をリンクと呼び、水源と合流点間の河道を外部リンク、合流点と合流点、あるいは出口までの河道を内部リンクと区別している。この水源を有する外部リンクの個数はマグニチュードと呼ばれている。

流域が小さい場合、地質や植生等の流域場の特性量はほぼ均質とみなすことができようが、域流が次第に大きくなるに従い、異なる特性を有する支流が合流してくるため、流域場の特性量は空間的に変動することになる。図-1.2 は北海道胆振地方の勇払平野を流れる一級河川鵲川の最上流から下流末端にかけてのマグニチュードと集水面積の関係を図示している。図中に明確な折曲点があり、前述のようにこの地点で流域の特性が異なる大きな支流が合流してくることを意味している。

一方、流域への入力である降雨は、流域の上流域にだけに偏って降ったり、雨域が上流域から下流域へ移動したりするなど、降雨強度が時間的にも空間的に変動する現象である。近年導入が進んでいるレーダー雨量計による観測等から、この現象を容易に理解することができるようになってきている。

したがって、流域の流出量は、大別すると

1. 入力である降雨量の時・空間変動

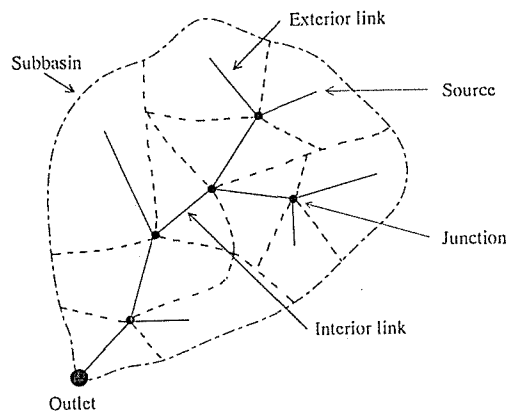


図-1.1 流域の概要

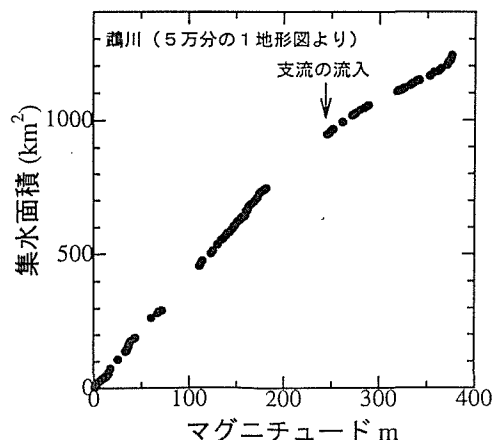


図-1.2 マグニチュードと集水面積の関係

2. 地形・地質・植生などの地形特性の空間変動に起因する流出パラメータの空間変動
3. 流域の土壌湿潤度などの場の初期状態の時・空間変動

の影響を強く受けていると考えられる。このように流域の諸特性量が時・空間的に変動することを考慮すると、降雨－流出現象における流出量の変動特性を考えるためには、決定論的な取扱いでなく確率論的な取扱いが必要になる。

この観点から、流出系システムを記述している微分方程式は確率微分方程式として解釈されるべきである²⁾。流出現象を表現する確率微分方程式は上記の変動特性と対応させると、

- 1) 強制項が確率過程
- 2) 微分方程式の係数が確率過程
- 3) 初期条件が確率過程

となる。降雨－流出現象の確率応答はこの3つの確率過程が複雑に相互に関係しており、実際問題として、この3項目を同時に考慮することはかなり難しい。そのため、最初のアプローチとしては、各々の確率過程と流出特性の関係を定量化しておくことが、流域末端における流出量の確率応答を解明する上で近道であると考えられる。

藤田・工藤ら³⁾は本邦で広く用いられている貯留関数法を用い、上記の2)と3)を定常と置いて、1)の強制項である降雨の時・空間変動による流出量の確率応答について検討している。

本研究は藤田らが降雨の確率変動を対象にしているのに対して、1)の降雨と3)の初期条件が定常で、2)の微分方程式の係数が確率過程である場合の流出量の確率応答について考察することを目的としている。なお、3)の流域の場の初期条件が変動することによる流量の確率応答は、1)、2)に比べると従属的な要因と考えられるので、1)と2)の影響が定量化された後に、最後に検討されることになる。

次に、降雨－流出現象を一般化する場合は、各種の流出モデルに基づく計算手法が提案されている。これまで提案されてきた流出モデルは大別すると、流出過程の空間的な分布や変化を流域単位に平均化（集中化）して取り扱う概念モデルと、流出過程における雨水流の運動力学的な理論を基に水移動を追跡しようとする物理モデルとに分類できる。

概念モデルは単位図法、貯留関数法、タンクモデルなどのように流出モデルのパラメータを流域単位に集中化しているので、集中定数型のモデルとも呼ばれている。この流出モデルは、降雨と流量の応答関係を重視して流出モデルのパラメータを同定する実用的なモデルで、計算法が容易であるために洪水流出のオンライン予測などに良く用いられている。しかし、流域場の特性量を集中化しているために、特性量の空間的な変動の影響を流出現象に反映できない欠点がある。

一方、物理モデルは、斜面部や河道部、あるいは土壌内部での水移動を考えているので、システムとしては分布定数型のモデルとも呼ばれている。それ故、流域場の特性量の変動を流出現象に反映することは容易であるが、計算法が煩雑になり計算時間も膨大になるという欠点が指摘されていた。しかし、近年の計算機の飛躍的な性能向上は、分布定数型流出モデルを実用的レベルまで引き上げることになった。したがって、将来的にはこの分布定数型流出モデルが流出解析の主流になるものと考えられる。

以上の分類は主としてサブ流域からの流出を対象に考えている。流域は先に述べたようにサブ流域の集合体であり、その空間的な配置を表しているのが河道網である。したがって、流域全体を考える場合、各サブ流域からの流出量を河道網構造に従って合成していく分布型流出モデルが、また有用な流出モデルとなる。これと対比して河道網構造も集中化した集中型流出モデルも考えられる。分布型流出モデルは、流域場の諸特性や降雨の空間的な変動を考慮することが容易であるという利点を有するものの、流出モデルの構築に最適な流域のスケールを如何に決定するかという難題が残されている。流域の分割は流域の河道網構造に従って分割するのが自然であるので、細分化されたサブ流域の流域スケールと河道網構造を考えて流出の応答特性を明らかにしていく必要がある。

一般に、降雨－流出現象を記述する微分方程式は、上述の流出モデルの分類に当てはめると、定数が不変の場合が集中型流出モデルであり、定数が確率変動するのが分布型流出モデルとすることができる。したがって、本研究の微分方程式の係数が確率過程である場合の流出量の確率応答の解明は、分布型流出モデルの最適な流域スケールを検討する有力な手法となる。

分布型流出モデルでは河道網構造の果たす役割が大きく、河道網構造と流出特性の関係を解明する上で河道網の定量化が必要不可欠である。河道網の定量化に関する研究としては、Horton, Strahler の河道位数理論⁴⁾と、Shreve らのリンク－マグニチュード方式の河道網理

論¹⁾を基にして、多くの研究者によって流域地形量の確率特性が明らかにされてきた⁵⁾⁶⁾⁷⁾。

この流域地形特性量と流出を結びつけた研究としては、河道位数理論の流域地形量を取り入れた Geomorphologic Instantaneous Unit Hydrograph (GIUH) モデル⁸⁾が良く知られている。Gupta and Mesa⁹⁾は流域幾何形状を確率的に表現する”Width function”と”Concentration function”を提案し、この関数を用いて河道網構造が確率変動する場合の流量の平均値を理論的に導いている。しかしながら、まだ流域地形特性量の分散等の変動量と流出特性の関係を明らかにした研究はほとんど見られない。更に、河道網構造の理論的な取扱いの困難さから、流出量の変動特性もシミュレーションによる検討に頼らざるを得ない¹⁰⁾。本研究はリンク・マグニチュード方式の河道網理論を用いて河道網の変動特性も理論的に取り扱い、サブ流域の流出量の確率応答と組み合わせて流域全体からの流出量の確率応答を導こうとするものである。

最後に、降雨－流出現象における流域スケールと流出特性の定量化は、従来から流出解析における流出モデルの選定、構築において重要であり、「どのような流域スケールが望ましいのか」という問いかけに対する答えは、まだ曖昧なまま残されているのが現状である。

流域スケールを考える上で、降雨の受け皿である流域の地質条件や植生等の特性量の空間スケールがこの答えの要因の一つと考えられる。流域はマクロ的にみると前出の図-1.2のように支流単位で流域の特性が異なる。支流域をもう少しミクロ的にみていくと、流域の特性量が均質 (homogeneous) と考えられる空間スケールが見えて来る。流出モデルは流域の場の特性が均質であることが望ましいので、この空間スケールが流域スケールの候補の一つに挙げられる。

流出の入力である降雨も、雨域の大きさや移動速度、降雨強度の空間分布などの空間スケールと降雨強度の時間的な変動である時間スケールが、流域スケールを考える上で重要な要因である。流出解析の前提として、降雨は流域一様であることを仮定しており、分布型流出モデルのサブ流域は少なくともこの降雨の空間スケールより小さくなるであろう。

また、流域を構成しているサブ流域の大きさは、一般にその流域の河道網の粗密さと相反する関係にある。つまり、サブ流域のサイズが大きくなると河道網構造は粗になり、逆にサイズが小さくなると河道網構造は複雑になる。流出現象と対比させて考えると、サブ流域における降雨から流量への変換過程と河道網による集水～合成過程のバランスがキーポイントになる。

流出量の変動特性からみた流域スケールとして、例えば、Wood ら¹¹⁾はサブ流域の流域面積や透水係数の空間変動をシミュレーションすることによって流出量の変動特性を調べ、流域スケールの基準となる REA (Representative Elementary Area) の概念を提案している。この Wood らの研究をはじめとする流域スケールに関する多くの研究は、流域を降雨－流

出変換系システムとみなした場合，時間領域において流出現象を捉えたものである．これに対し，本研究はこれまでの流出解析であまり扱われることのなかった周波数領域での流出現象に着目している．つまり，流域は降雨の高周波の変動成分を除去して低周波の成分だけを通す低域フィルターシステムと考えられる．本研究はサブ流域における降雨から流量への変換過程における低域フィルターと，河道網による集水～合成過程による低域フィルターの特性を明らかにし，両フィルターのシステムの応答特性からみた流域スケールを検討する．

以上，本研究では従来から課題として残されていた分布型流出モデルの最適な流域スケールの判断基準を提案することを最終的な目的としている．

1.2 本研究の構成

本研究は、降雨流出モデルの流出パラメータと密接に結び付く流域の地形構造を確率論を導入して定量的に評価し、降雨流出現象の確率応答を理論的に導く手法について示す。また、自動制御システムの特性解析手法の一つである周波数応答法を降雨流出現象に適用し、流出解析において課題とされてきた流出モデルの最適な流域スケールの判断基準を示す。以下、各章毎に本研究の概略を示す。

第2章では、数値標高データを用いて擬似的な河道網を作成し、その河道網の地形量解析を行うまでの解析手法を示している。本解析手法の有用性を示すとともに、擬河道網の問題点を指摘し、改良した擬河道網作成手法を提案している。次に、この擬河道網の地形量解析から、流域地形量の確率分布特性を明らかにし、流出現象に重要であるサブ流域の流域面積とリンク長、サブ流域から流域末端までの流路長の確率構造を定量化する。最後に、流域の集水過程を担う河道網構造の定量化のため、藤田⁶⁾が提案した河道網配列パターンの生起確率の概念を拡張し、流出解析に有用な河道網構造を定量化した確率関数を提案している。

第3章では、流域地形量の確率変動特性が流出現象に与える影響を評価するため、降雨一流出変換系のシステム方程式である流出モデルの流出パラメータが、確率変動する場合の流出量の確率応答特性を理論的に導く手法を示している。まず、降雨を変換する場であるサブ流域の地形量が確率変動する場合のサブ流域からの流出量の確率応答を導く。具体的には、星¹²⁾の貯留関数法をシステム方程式に採用し、貯留係数が確率変動する場合の流出量の4次モーメントまでを理論的に誘導した。次に河道網パターンが確率変動する場合の流域末端での流出量の確率変動を理論的に誘導し、降雨流出現象における流域の地形構造の違いを定量的に評価している。

第4章では、降雨一流出現象における流域スケールと流出特性に関して検討している。流出解析で問題となる流出モデルの最適な流域スケールを与える基準として、流域と降雨の場の特性から規定される流域スケールを最初に検討している。すなわち、降雨の受け皿である流域の場の特性量のスケール、例えば地質や地形が均質であるとみなすことのできる流域のサイズを国土数値情報から導き、次に、入力である降雨が定常でかつ一様である空間スケールをレーダー雨量計の観測データから導いている。一方、流域は降雨を流出量に変換するブラックボックス的なシステムとも考えられるので、流域地形量が確率変動する流域システムの周波数応答特性を求める手法を示し、流域スケールとの関係を明らかにしている。更に、この手法を実流域に適用し、その結果から降雨流出システムに望まれる流域スケールを判断する考え方が示されている。

第5章は各章の結論をまとめた。

参考文献

- 1) Shreve, R. L.: Statistical law of stream numbers, *J. Geology*, Vol.74(1), pp.17-37, 1966.
- 2) T.E. Unny: Hydrology Research in North America and in Japan - Problems in Hydrology Described Stochastic Differential Equations -, 水文・水資源学会誌第4巻4号, pp.9-18, 1991.
- 3) 藤田睦博, 工藤睦信, 中尾隆志, 橋本識秀: 貯留型流出モデルの確率応答に関する研究 —降雨が時間的に独立な確率過程の場合—, 土木学会論文集, No.515/II-31, pp.1-11, 1995.
- 4) Horton, R. E.: Erosional development of streams and their drainage basins : Hydrophysical approach to quantitative morphology, *Geol. Soc. Amer.*, Bull.56, 1945.
- 5) 石原藤次郎, 高埴琢馬, 瀬能邦雄: 河道配列の統計則に関する基礎的研究, 京都大学防災研究所年報, 第12号B, pp.345-365, 1969.
- 6) 藤田睦博: 流域地形構造とその統計則に関する基礎的研究, 土木学会論文報告集, 第234号, pp.73-82, 1975.
- 7) 岩佐義朗, 小林信久: マグニチュードに基づく流域地形統計則およびその位数理論との関連性, 土木学会論文報告集, 第273号, pp.47-58, 1978.
- 8) Rodriguez-Iturbe, I. and Valdes, J. B. : The Geomorphologic Structure of Hydrologic Response, *Water Resources Research*, Vol. 15, No. 6, pp.1409-1420, 1979.
- 9) Gupta, V. and Mesa, J. : Runoff generation and hydrologic response via channel network geomorphology — Recent progress and open problems —, *J. Hydrology*, Vol. 102, pp.3-28, 1988.
- 10) 早川 博: 分布型流出モデルのサブ流域スケールに関する一考察, 水工学論文集, 第36巻, pp.555-560, 1992.

- 11) Wood, E. F., Sivapalan, M., Beven, K. J. and Band, L. E.: Effects of spatial variability and scale with implications to hydrologic modelling, *J. Hydrology*, Vol.102, pp.29-47, 1988.
- 12) 星 清, 山岡勲: 雨水流法と貯留関数法との相互関係, 第 26 回水理講演会論文集, pp.273-278, 1982.

第2章 流域地形量の定量化

2.1 概説

流域は、降雨を流出量に変換する場である斜面域と、斜面からの流出量を合成し、流域の出口まで運搬する場である河道とから構成されている。流域の降雨－流出現象は、入力である降雨の時空間分布と共に、降雨の受け皿である流域の地形構造が大きく影響することになる。したがって、流出現象を把握する上で、流域の地形構造を定量的に評価することが重要である。

流域の地形構造を定量的に評価しようとする研究は、計量地形学の分野における Horton, Strahler らの河道位数に基づく地形則の研究¹⁾²⁾に端を発し, Shreve のリンク－マグニチュード方式の河道網理論³⁾や, 近年ではフラクタル理論による評価の試みも行われている⁴⁾⁵⁾⁶⁾⁷⁾。

一方、流域の地形構造と流出現象を結びつけて、河道網の集水過程を定量的に評価しようとする、いずれの方法も一長一短であるが、本研究では、Shreve が提案したリンク－マグニチュード方式の河道区分法に基づいて河道網の定量化を行う。

リンク－マグニチュード方式の河道区分法は、図-2.1 に示すように、流域の水源より発する河道を外部リンク、合流点間を結ぶ河道を内部リンクと区別するもので、流域内に含ま

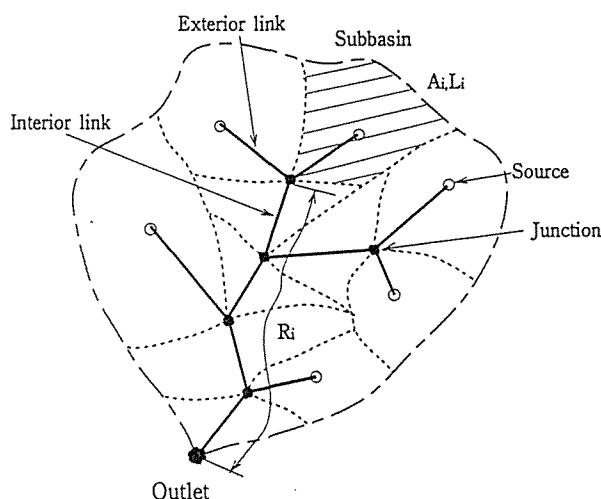


図-2.1 リンク－マグニチュード方式の河道区分法

れる外部リンク数をその流域のマグニチュードと呼んでいる。この区分法によると、マグニチュード i と j の支流が合流した場合にその下流のマグニチュードは $(i + j)$ としているので、流域最下流のマグニチュードは外部リンク数に一致している。この合流によるマグニチュードの結合則は、マグニチュードを流出量に置き換えて考えると、流出量の合成過程に対応しているので、本河道区分法は河道網による集水過程を定量化する上で都合が良いと考えられる。また、岩佐・小林⁸⁾⁹⁾は河道位数理論とリンクーマグニチュード理論の関連性を明らかにしているので、一般に広く用いられてきた河道位数理論による地形量の計測結果も利用可能である。

次に、流域の河道網が形成される過程を考えると、形成する営力は、大部分が風化あるいは雨水などによる外的営力によるものと考えられる。河道網が形成されるような時間スケールで見たときには、この外的営力は一流域に対して時間的にも空間的にも一様と考えられる。したがって、河道網の形成を一様な外的営力が働く確率過程と考えることによって、河道網は位相数学的にランダムに発生すると仮定できる。

Shreve³⁾、石原・高棹¹⁰⁾は、このランダム性の仮定を用いて、経験的に得られていた河道位数則の成立を理論的に明らかにした。また、藤田¹¹⁾は、河道網パターン構造にグラフ理論を適用して、河道網パターンの確率構造を明らかにし、同じく、経験的に得られていた河道長則、集水面積則の普遍性を確かめた。

以上のように、流域の河道網構造のランダム性を仮定すると、河道網を構成しているリンク長やそれに付随するサブ流域面積、河道勾配や斜面勾配等の流域地形量も確率変量と考えるのが妥当であろう。これらの地形量は、流域が異なればその特性も当然異なり、この変動特性が一流域の持つ個性を示すことになる。

また、流域のマグニチュードは地形図の縮尺に対応すると考えることができる。これは、流域の地形図の縮尺を大縮尺にしていくと、谷筋が新たに河道として認められて、河道網が複雑になり、当然、マグニチュードも増加することから理解できる。つまり、一流域の流域地形量はマグニチュード（地形図の縮尺）に対しても変動することになる。

本研究は、流域に分布型流出モデルを適用する場合に、流域をどの程度に分割して解析すべきか、あるいはどの程度の大きさの流域スケールが最適なのか、を明らかにすることを目的としている。そのためには、マグニチュードの変化に対する地形量の変動特性を把握する必要がある。

一般に、地形図は限られた縮尺の地図しか作られていないので、最近整備されてきた数値標高データなどの数値地図を利用した流域の地形量解析が、近年一般的になりつつある¹²⁾¹³⁾。

第2章2節では、数値標高データを用いて擬似的な河道網を作成し、その河道網の地形量

解析を行うまでの解析手法を示した。擬河道網と地形図による地形量解析から、本解析手法の有用性を示すとともに、擬河道網の問題点を指摘し、改良した擬河道網作成手法を提案した。

第2章3節では、前節で得られた流域地形量の確率分布特性を明らかにし、流出現象に重要であるサブ流域の流域面積とリンク長、サブ流域から流域末端までの流路長の確率構造を定量化した。

第2章4節では、流域の集水過程を担う河道網構造の定量化するため、藤田が提案した河道網配列パターンの生起確率の概念¹¹⁾を拡張し、流出解析に有用な河道網構造を定量化した確率関数を提案した。

2.2 数値地図による流域地形量解析

数値地図あるいはコンピュータ・マッピング (Computer Mapping) は、コンピュータの発展により大量の情報が比較的小型の計算機で扱えるようになってきたため、近年急速に利用されてきている。コンピュータ・マッピング・システムとは、地図情報をコンピュータで活用できるようにするシステムで、地図の標高データを数値化して、数値で地形を表現した数値地形モデル (DTM, Digital Terrain Model あるいは DEM, Digital Elevation Model) や、道路や河川、行政界をポリゴンの概念を用いてデータベース化したものがある¹⁴⁾。この地形情報に加えて、地域の人口や土地利用、輸送、経済などの統計調査結果を付加した地理情報システム GIS (Geographic Information System) が、世界各国で整備されている。

我国の代表的な地理情報システムは、1968年に国土地理院が他官庁と共同して構築した国土数値情報¹⁵⁾である。国土数値情報の地域メッシュは、地勢図 (縮尺:1/20万の1) の1枚の広さを1区画として緯度・経度方向にコード化した約80kmの1次メッシュを基本とし、これを8分割した約10kmの2次メッシュ、更に10分割した約1kmの3次メッシュから構成されている。国土数値情報は河川や海岸線などの地形量だけでなく、土地利用や都市計画区分、公示地価等の他、就業人口や世帯数などの国勢調査のデータなど、様々なデータベースがある。また、DEMデータ作成は、既存の地形図や航空写真をベースに数値化したものが大半であるが、最近ではSPOTやLANDSAT等の衛星によるリモートセンシングデータを利用する方法も研究されてきている¹⁷⁾。

このような地理情報システムや数値地形モデルを積極的に利用した流域地形量解析や流出解析が、水文学の分野でも主流になりつつある。

数値地形モデルは流域地形を表現する形式によって、図-2.2に示す3種類のデータ形式に分類できる¹⁸⁾。

グリッドモデルによる方法は、流域を格子点で覆い、格子点の標高で地形を表現する方法で、国土数値情報など最も多くの数値地形モデルで採用されている。グリッドモデルはデータが格子状に規則的に配置されているので、コンピューター処理が容易であり、リモートセンシングデータ等との整合性がとり易いという利点がある。しかし、雨水の流れを考える場合、流れの方向が4ないし8方向に限定される点やグリッドサイズによって窪地が生じ易いという欠点がある。

等高線図モデルは、地形図の等高線に沿った点の標高をラスター形式で記録する形式である。雨水の流れの方向を等高線を基に厳密に決定できるなど、水文学的には非常に有利な表現形式であるが、データ量が膨大になり、解析が煩雑になるなどの欠点がある。

三角形網モデルは、流域を三角形網で覆い、各頂点の標高で地形を表現する方法である。

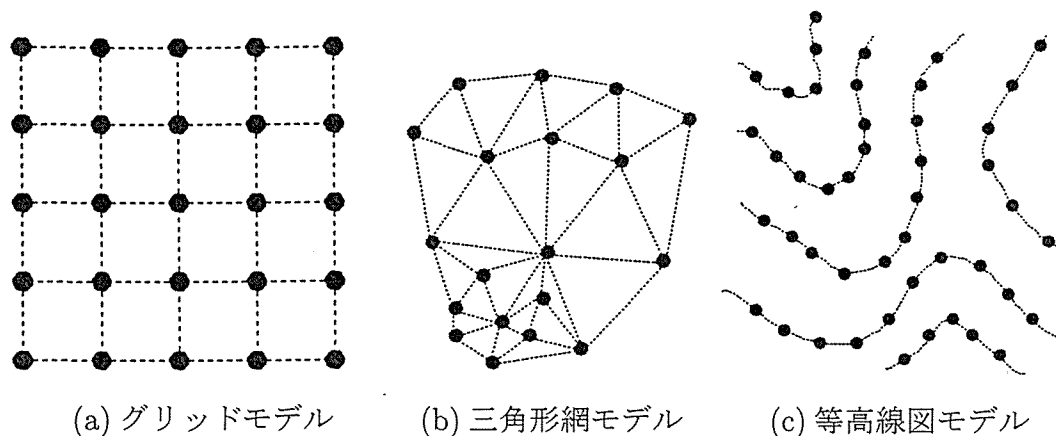


図-2.2 DEM のデータ形式

表-2.1 流出モデルへの利用から見た数値地形モデルの比較¹⁶⁾

数値地形モデル	地形の表現方法	利 点	欠 点
グリッドモデル Grid based DEM	流域にかけたメッシュの格子点の標高によって地表面を表す。	<ul style="list-style-type: none"> 電子計算機での処理が容易である。 この形式でデータが整備されることが多い。 空間的に分布するデータはメッシュ形式で整理されることが多く、データ間の位置の対応が取りやすい。 	<ul style="list-style-type: none"> 流れを1次元的に取り扱う場合、流れ方向が4または8方向に限定される。 窪地の根本的解決が難しい。
等高線図モデル Contour based DEM	等高線上の点の標高によって地表面を表す。	<ul style="list-style-type: none"> 再急勾配方向をもとに流域斜面を部分斜面に分割することにより流れ方向に即したモデル化が可能 	<ul style="list-style-type: none"> データ量が膨大である。 流域規模での適用が難しい。
三角形網モデル Triangulated Irregular Network DEM	流域を三角形要素網で覆い、三角形の頂点の標高によって地表面を表す。	<ul style="list-style-type: none"> 流れの方向は限定されず、かつ簡単に求められる。 データのサンプリング密度を局所的に変化させることができ、また河道流域界を三角形要素の辺として表すことができる等、流域地形に即して地形を表現できる。 	<ul style="list-style-type: none"> 単に流域を三角形網に覆うだけでは、三角形網間での雨水の授受を取り扱うことが難しく、雨水の流れを考慮した形で三角形網を構成するシステムが必要になる。

三角形網はグリッドモデルに比べて地形を表現する自由度が高く、流域地形に即した表現ができるという利点がある。しかし、この形式の DEM があまり一般的でないことや、三角形網間の雨水の授受を取り扱うことが難しいと言う欠点がある。

流出モデルへの利用という観点から見た数値地形モデルの比較が、立川ら¹⁶⁾によって表-2.1に整理されている。

本研究では、国土数値情報の標高データを利用するので、グリッドモデルによる流域地形量解析を行う。本節では、まず、国土数値情報の DEM を利用して実河道に類似した擬河道網を抽出し、流域地形量を計測する。その計測結果を従来の地形図を用いた地形量解析結果と比較し、擬河道網による地形量解析が有力な手法であることを示す。また、擬河道網の抽出手法で課題となっている雨水の流れる方向（落水方向）の決定と窪地の処理、河道の水源の定義の問題について言及し、より実河道網に近い擬河道網抽出へ向けた改良を行った。

2.2.1 グリッド型数値標高データによる擬河道網の抽出

グリッド型 DEM データを用いた流域地形量解析では、実河道に即した模擬的な河道（これ以降、擬河道網と呼ぶ）を作成し、その擬河道網から流域の地形量、例えば、流域面積や河道長、河道勾配を求めている。

グリッド型 DEM から擬河道網を抽出する手法は、Q'Callaghan and Mark¹⁹⁾の提案した計算機アルゴリズム D8 モデルが契機となって、新たなアルゴリズムの開発^{20),22),23),25),27),26)}や、抽出された河道網を用いた地形量解析に関する研究が盛んに行われるようになった²¹⁾⁷⁾²⁴⁾。

本研究は、これらの中から、Jenson ら²²⁾のアルゴリズムを基本に、一部若干の改良を加えて擬河道網の抽出を行った。このアルゴリズムは、落水方向の決定と窪地処理に特徴がある。以下では、この特徴も含め、アルゴリズムに沿って順次説明を加える。

[1] グリッド型 DEM のデータベースの準備

解析対象とする流域の DEM を準備する。その際、流域範囲外の標高データを負の値にしておくと便利である。

[2] 落水方向の仮決定とグリッド一個の窪地処理

対象とするグリッド点に落ちた雨水は、隣接する 8 方向のグリッド点の最急勾配方向に流下するものとして落水方向を決定する。中には、最急勾配が等しい複数の方向も考えられるので、この段階では、方向は決定せずに一時保留しておく。

もし、周り 8 点の標高が全て高い場合は窪地となる。図-2.3 の一個の窪地は、周り 8 点の最低標高値 (点 B) で置き換える。

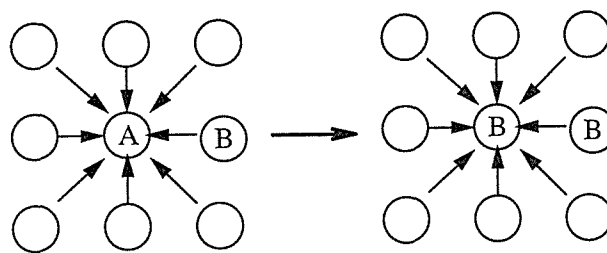


図-2.3 グリッド一個の窪地処理

[3] 複数ある落水方向の決定

図-2.4 に示すように落水勾配が等しいために、複数の落水方向の可能性がある場合は、点 A に流入してくる落水方向を参考にして決定する。この場合は点 B 方向になる。この方法でも、落水方向を確定できない場合、あるいは確定しても図-2.5 の様に複数個のグリッド点から成る窪地になる場合がある。大部分は図のように標高が同じ 2 点の落水方向が互い

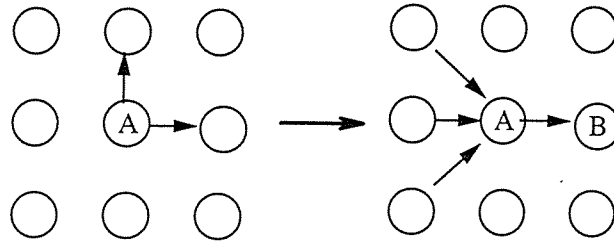


図-2.4 複数ある落水方向の決定

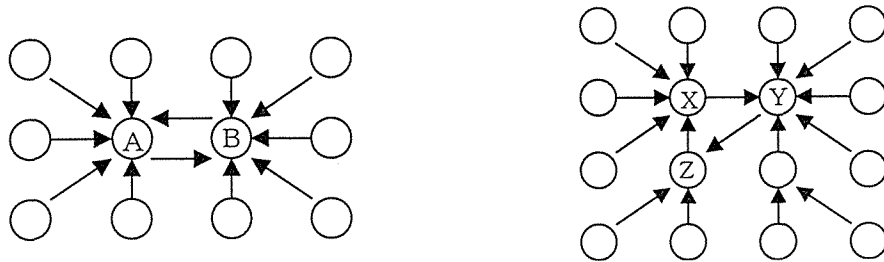


図-2.5 複数グリッドの窪地処理

の方向を示す場合と、3点以上が同じ標高でループを描く（点X→点Y→点Z→点Xなど）場合である。

[4] 窪地を含む流域分割

図-2.5 の様に複数個のグリッド点から成る窪地は、その窪地に流入してくるグリッド点の集合を一つの流域と考える。他の窪地も同様に窪地に流入するグリッド点からなる流域に分割する。即ち、流域全体を窪地の個数だけのサブ流域に分割することになる。

[5] サブ流域の出口の検索

分割した各サブ流域間の流れを考えるために、サブ流域の出口を検索する。隣のサブ流域との分水界において、図-2.6 のように隣り合うグリッド点（●と◎）の標高を比較し、標高の高い方を代表値（もし、 $C \geq D$ なら、Cを代表値とする。ただし、 $B \leq D$ ）に選び、全ての分水界線上で代表値が最も低い点のペアを検索する。この場合、点CとDのペアが最低の標高とすると、C点をサブ流域の出口に決定する。

Jenson らの方法は、サブ流域内の点Cの標高より低い点全てを点Cの標高で置き換えた後、埋め立てられた点の落水方向が点Cに向かうように方向を再定義した（図-2.7）。この方法では、埋め立てられたグリッド点は大きな平坦な面になるため、点Cに流れるように落水方向を決定すると、図-2.7 の様な平行に流れる河道が発生し易い欠点がある²⁸⁾。

本研究では、出口決定後の埋め立て作業は行わずに元々の落水方向を尊重し、窪地から出口である点Cに反する方向の落水方向だけ（ここでは、点Bと点Cの方向だけ）を修正し

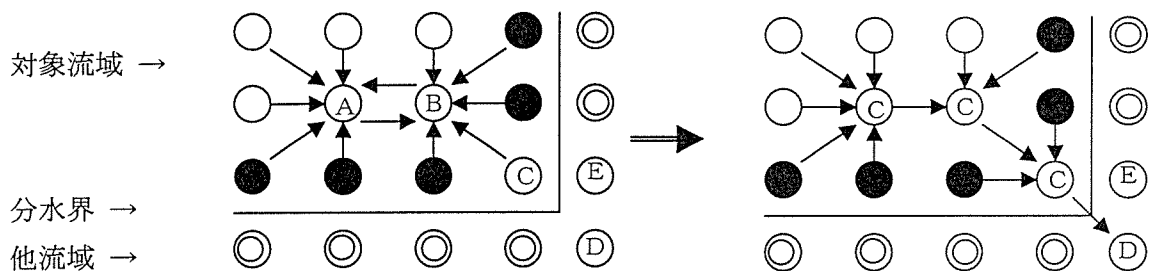


図-2.6 サブ流域の出口の検索

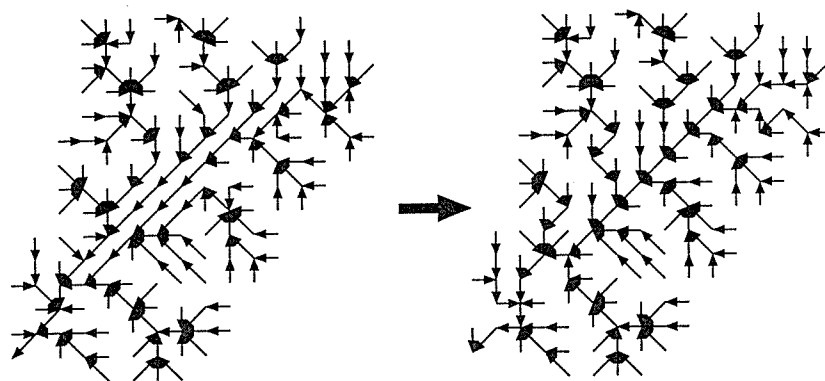


図-2.7 平行に流れる落水線と改善した落水線

た．その結果，点FやGのような不自然な流れが生じる場合もあるので，この修正も後の段階で行う．

[6] 窪地が隣り合う，あるいはループしている大規模な窪地の処理

図-2.8 の窪地を有するサブ流域IとJは，隣り合っているために点A-Bが出口に判断され，流れが流域IとJの外に出ることができない．この場合は，流域IとJを合併し，流域の出口を再度見つけ直す．ここでは，点C-Dが出口になり，流域Iは点A-Bを通して出口に到達するように，落水方向を修正した．サブ流域規模でループしてできた窪地も同様に一つの流域に再統合して，出口を再検索する．

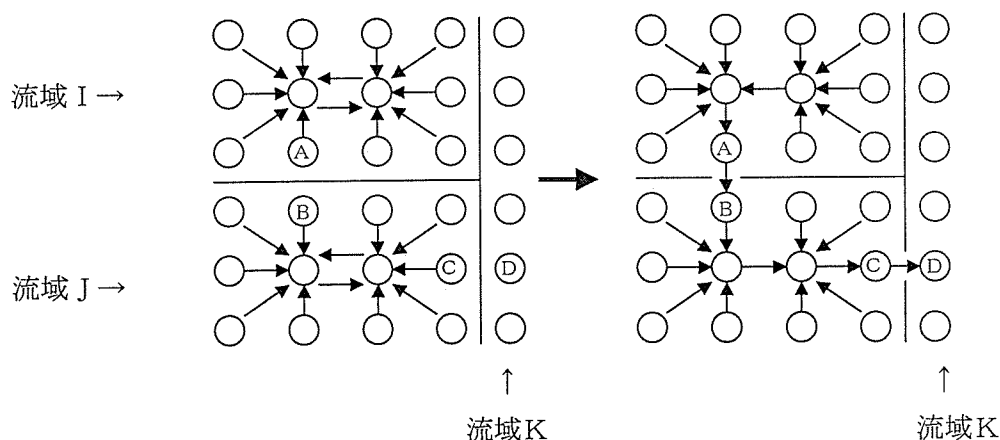


図-2.8 窪地を持つ流域が隣り合う場合の窪地処理

[7] 不自然な落水方向の修正

前の段階で流域の出口に向かうように強制的に落水方向を修正すると、図-2.9のような如何にも不自然な落水方向が生ずる。そこで、もし、点Gの標高が点Cの標高よりも高く、点Gから点Cに流れる可能性がある場合には、落水方向を修正した。ただし、逆に点Fが点Cよりも低い場合には修正しない。

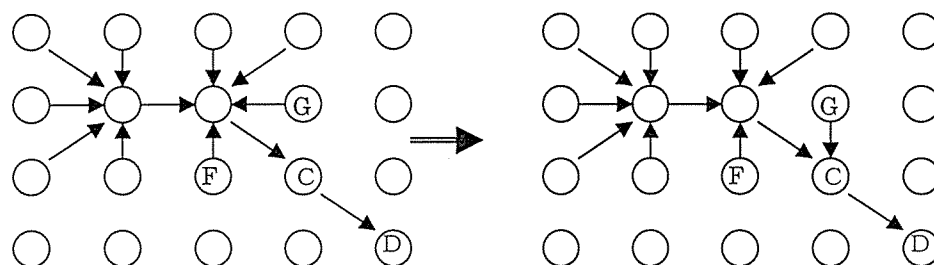


図-2.9 不自然な落水線の修正

[8] 交差する落水線の処理

前段階までの窪地処理で、全てのグリッド点の落水方向が決定し、各グリッド点に落下した雨水は流域の出口まで到達できるようになる。しかし、第4あるいは第5段階の窪地処理で再決定した落水方向は、窪地の周囲の第1段階で決定した落水方向と交差するという現象が希に起きることがあった（図-2.10）。その場合は、交差したグリッド点の次の点の落水方向を参考にして、交差する片方の落水方向を修正する。

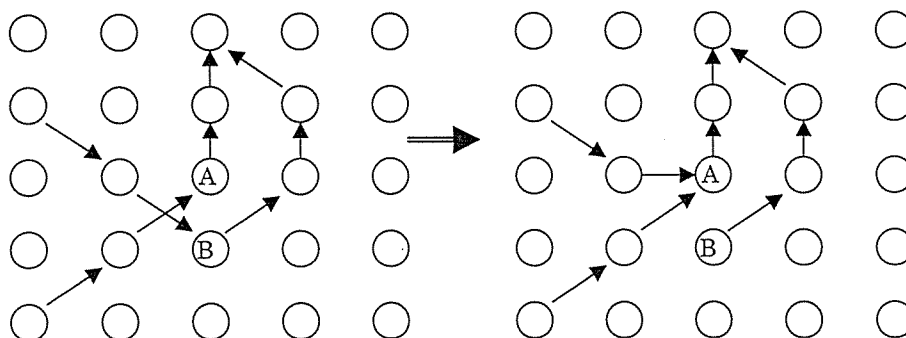


図-2.10 交差する落水線の処理

[9] 河道の水源の定義

前段階までの作業で、流域の雨水の流れを表現する落水線図が完成する。この落水線図から河道を抽出するのに重要となるのが、水源の定義である。

擬河道網の抽出に従来から良く利用されてきた水源の定義は、落水線図において、各々のグリッド点に流入してくる落水線の累積値（グリッド点の累積値）、つまり水源までの集水面積 $\sum A_i$ を閾値として、これより大きな面積を持つグリッド点を水源とする方法である¹⁹⁾。

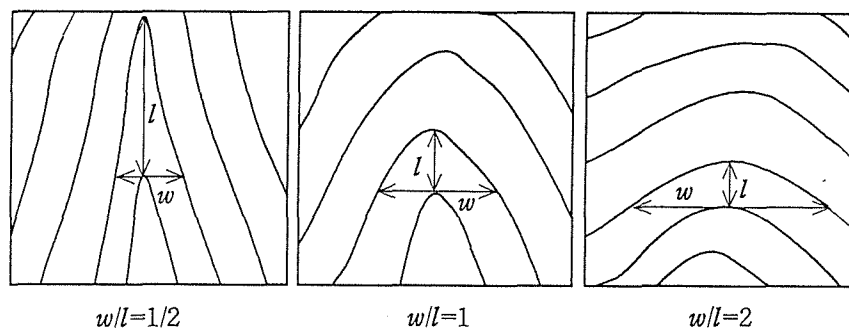


図-2.11 谷の幅 w とわん入長 l の関係

この定義は、いわゆるレジーム理論において、流量が集水面積に密接に関係していることに基づいたもので、この定義を面積閾値と呼ぶことにする。

一方、実河道の水源は、単に上流域の集水面積だけでなく、河道あるいは斜面の勾配に強く影響を受けている。Dietrich ら²⁹⁾は水源部の浸食機構を考慮して、勾配に依存した浸食閾値を提案している。

本研究では、地形図においてより実河川に近い河道網を得るために角屋が提案した水源の定義³²⁾、等高線の谷の幅 w と谷のわん入長 l の比 w/l を、グリッド型 DEM の擬河道網の水源の定義に適用した³¹⁾。図-2.11 から、 w/l の値は谷が深くなるほど小さく、尾根線付近は逆に大きくなる性質がある。角屋は地形図において w/l の値が 1~2 となる地点を水源とするのが、流出解析にとって標準的な河道網を得るのに最適であるとしている³²⁾。

2.2.2 擬河道網による流域地形量の計測

前節において擬河道網が抽出されたので、本節では、この擬河道網を用いて流域の地形量を計測する。本研究は、リンク-マグニチュード方式の河道網理論を採用しているので、リンク（サブ流域）単位で地形量を計測・整理しておく都合が良いであろう。計測項目は流出現象に密接に関係するサブ流域の流域面積、リンク長とその勾配、また、サブ流域を斜面域と河道に区別したときの斜面長とその勾配である。また、河道網における各サブ流域の接続状況をデータベース化しておく、各サブ流域から流域末端までの流路長や河道位数等の地形量を以上の地形量から解析できる。

この方針に沿って、河道網を構成する各サブ流域の接続状況を表すリンケージファイル（と呼んでいる）を作成する。リンケージファイルは各サブ流域の流域番号とそれに接続する流域番号、流域面積、河道長、勾配や河道位数、マグニチュードから成っている。このデータファイルは、外部リンク、内部リンク別にデータを整理したり、河道位数毎のデータ集約を容易にすることが出来る。

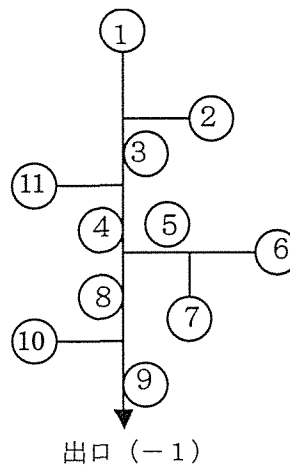


図-2.12 例題に取り上げた擬河道網

以下では、このリンケージファイルを全てコンピュータで自動化して擬河道網から作成する手順を示し、最終的に地形量を得るまでの流れを説明する。例題として、図-2.12に示す簡単な河道網を取りあげる。

[1] 擬河道網のサブ流域への番号付け

前節で作成した擬河道網について、各々の河道（リンク）に流入して来るグリッド点の範囲をサブ流域と考える。このサブ流域に番号を付け、そのサブ流域が接続する流域番号もチェックしておく。ただし、河道の末端のサブ流域の接続番号は-1としておく（図-2.12参照）。高棹・椎葉³³⁾は、河道網の流出過程を考慮して、流出計算のため最適追跡方策を提案し、河道網を系統化しているが、ここではこの規則に準じた番号付けではない。

[2] サブ流域のリンク長と面積の算出

各々のサブ流域のリンク長（河道長）と、その河道に流入してくるグリッド点の累積値からサブ流域の面積を求める。この段階で、各サブ流域毎に流域番号、接続流域番号、河道長と流域面積の1組のデータが得られる。これをサブ流域データと呼ぶが、この段階ではこのデータはまだ表-2.2の様にランダムに並んでいる。

[3] サブ流域の並べ替え

サブ流域データは、ランダムに並んでいるので、河道網の構造に従って、流域末端から河道本川を上流に遡る順序にサブ流域データを並べ替える。河道末端のサブ流域は接続流域番号が-1であるので、この流域をデータファイルの先頭において、この流域に流入してくるサブ流域を検索する。河道網構造が2分木構造からなると仮定すると、検索した上流の2個のサブ流域が流域末端のサブ流域の次になるように並べ替える。

次に、この2番目、3番目の流域に流入してくる各々2個のサブ流域を検索し、各々の流域の次に並べ替える。この操作を繰り返すと、いずれは流入してくるサブ流域がないサブ流域、即ち、外部リンクのサブ流域に辿り着く。この作業によって全てのサブ流域が表-2.2

表-2.2 リンケージファイル（第2，第3段階）

流域番号	接続番号	河道長	流域面積	流域番号	接続番号	河道長	流域面積
1	3	1.236	2.368	9	-1	1.123	3.369
2	3	0.897	1.369	10	9	3.245	5.364
3	4	↑	↑	8	9	↑	↑
4	8	↑	↑	5	8	↑	↑
5	8			6	5		
6	5	省略	省略	7	5	省略	省略
7	5			4	8		
8	9	↓	↓	3	4	↓	↓
9	-1			1	3		
10	9			2	3		
11	4	↓	↓	11	4	↓	↓

のように並べ替えられる。

[4] 河道の本川・支川毎の並べ替え

第3段階でサブ流域データが接続状況に応じて並べ替えられたが，まだ，どの経路が本川であるか決定していない．本研究では河道末端から水源のサブ流域まで遡るサブ流域の個数が最大となる経路を，便宜上本川と定義した（他に，河道長が最大となる経路も考えられる）．図-2.12の場合，以下の6通りの経路が考えられるが，この場合は第1番目の経路が本川となる（第2番目でもよいが，この場合，流域面積の大きい方を選択する）．

本川となり得る経路：

- No. 1 ⑨→⑧→④→③→① ←本川
- No. 2 ⑨→⑧→④→③→②
- No. 3 ⑨→⑧→④→①
- No. 4 ⑨→⑧→⑤→⑥
- No. 5 ⑨→⑧→⑤→⑦
- No. 6 ⑨→⑩

本川が決まると，その経路のデータをリンケージファイルの先頭に置く．次に水源から下流方向に見ていき，合流してくる支川を順次その次になるように並べ替えると，表-2.3に示すように最後に合流してくる支川がデータファイルの最後となる．

表-2.3 リンケージファイル（最終版）

	流域番号	接続番号	マグニチュード	河道位数	河道長	総河道長	流域面積	総流域面積
本 川	9	— 1	6	3	1.123	18.040	3.369	34.596
	8	9	5	3	0.854	13.672	1.256	25.863
	4	8	3	2	2.357	8.996	3.843	17.080
	3	4	2	2	1.852	3.985	4.236	7.973
	1	3	1	1	1.236	1.236	2.368	1.236
支 川	2	3	1	1	0.897	0.897	1.369	1.369
	11	4	1	1	2.654	2.654	5.264	5.264
	5	8	2	2	1.489	3.822	2.746	7.527
	6	5	1	1	0.964	0.964	1.565	1.565
	7	5	1	1	1.369	1.369	3.216	3.216
	10	9	1	1	3.245	3.245	5.364	5.364

[5] 地形量の計測

本川・支川の並べ替えが終わると、このデータファイルを使ってマグニチュード、河道位数、サブ流域までの累積した河道長、流域面積が計算できる。これらの地形量をサブ流域単位で整理したのが表-2.3 のリンケージファイルである。

この他、各サブ流域の河道長の始点、終点の座標を保存しておく、河道勾配が計算でき、リンケージファイルに付け加えることもできる。ただし、地形量を全て1つのリンケージファイルにまとめてしまうと、データファイルが大きくなり過ぎて取り扱いが大変なので、利用目的に応じたリンケージファイルにしておく方が良い。また、このリンケージファイルは、本研究の分布型流出モデルの流出計算に利用でき、サブ流域の流出量を計算する順序はこのリンケージファイルから決定された。

なお、各サブ流域の地形量の変動特性は斜面長の計測方法と併せて後節で詳述する。

2.2.3 擬河道網による河道網の再現性の検討

本節では、前節で抽出したの擬河道網の再現性を検証するために、北海道の渚滑川(滝上, 立牛観測所), 網走川(美幌, 津別観測所), 常呂川(置戸観測所), 留萌川(河口地点)の6地点の流量観測所流域を解析対象に、1/25,000の地形図の実河道網と国土数値情報の250mメッシュDEMデータを基にした擬河道網との比較検討を行った³¹⁾。比較した項目は、表-2.4に示すサブ流域の地形量の他、河道位数理論の分岐比、河道長比と面積比である。なお、比較する擬河道網は地形図の河道網のマグニチュード、すなわち、河道網の水源数とほぼ等しい擬河道網である。

表-2.4 地形図と擬河道網の地形量計測結果

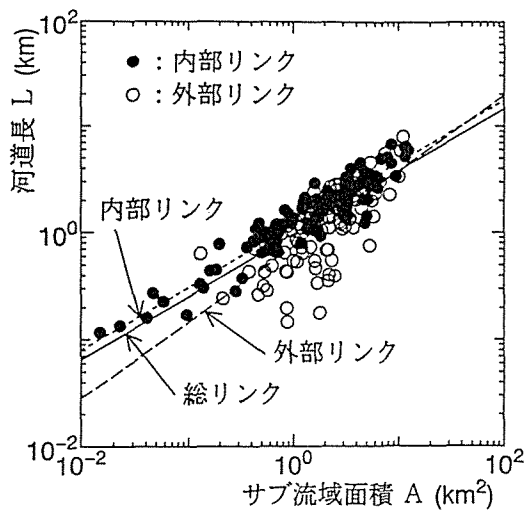
流域名	地図の種類	縮尺	Magnitude	総流域面積 (km ²)	平均サブ流域 面積(km ²)	平均サブ流域 河道長(km)	河川密度	分岐比	河道長比	面積比	勾配比
美幌	地形図	1/25000	28	203.8	3.775	2.914	0.772	3.158	1.643	1.831	-----
	擬河道網	面積 30	28	199.3	3.760	2.722	0.630	3.158	1.543	1.641	2.240
		w/1 0.2	30	199.3	3.436	2.228	0.648	3.187	1.630	1.784	2.004
置戸	地形図	1/25000	55	429.8	3.980	2.203	0.554	3.063	1.786	1.845	-----
	擬河道網	面積 36	55	421.7	3.978	2.021	0.508	3.908	1.677	1.672	1.999
		w/1 0.38	55	421.7	3.905	2.056	0.527	3.744	2.337	2.516	1.833
留萌	地形図	1/25000	56	274.8	2.476	1.934	0.781	3.903	2.013	1.879	-----
	擬河道網	面積 22	56	268.7	2.443	1.773	0.726	3.810	1.901	1.655	2.722
		w/1 0.21	55	268.7	2.465	1.704	0.691	3.853	1.959	1.857	2.480
滝上	地形図	1/25000	76	238.1	1.577	1.361	0.864	4.114	2.917	3.088	-----
	擬河道網	面積 15	75	236.7	1.621	1.191	0.734	4.139	2.651	2.581	2.115
		w/1 1.14	75	236.7	1.599	1.268	0.793	4.220	2.806	2.931	2.058
立牛	地形図	1/25000	53	165.1	1.588	1.192	0.751	3.968	1.315	1.429	-----
	擬河道網	面積 16	54	160.7	1.530	1.089	0.711	4.074	1.367	1.360	2.031
		w/1 0.46	53	160.7	1.575	1.236	0.785	3.810	1.358	1.274	2.017
津別	地形図	1/25000	105	573.2	2.756	1.808	0.656	3.160	1.736	1.764	-----
	擬河道網	面積 23	106	571.0	2.732	1.780	0.651	3.102	1.556	1.544	1.738
		w/1 0.33	106	571.0	2.732	1.736	0.635	4.583	2.344	2.359	1.979

[1] 面積閾値による擬河道網の場合

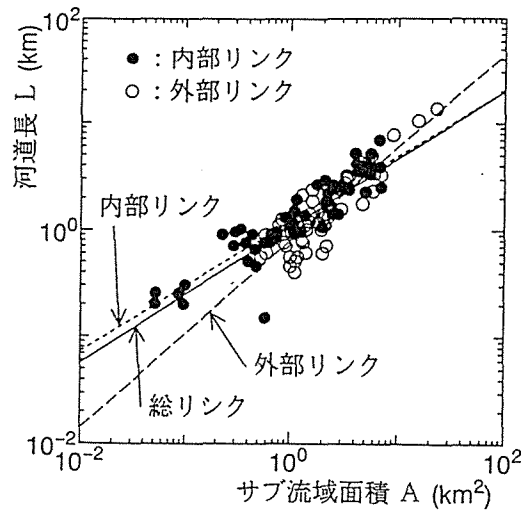
各々の流域の地形図の河道網と擬河道網の地形量が表-2.4に記載されている。この結果だけを見る限りでは、両者の違いはほとんどないと言って良いであろう。すなわち、DEMによる擬河道網を用いた地形量解析が、非常に有用な手法であると理解できる。更に、擬河道網による地形量解析は、与える閾値を変化させるだけで、地形図のように基図の縮尺に制限されることなく、任意の縮尺の河道網を得ることができるという大きな利点がある。

しかし、表-2.4の地形量は流域全体の平均値であるので、各サブ流域の地形量について検証してみた。Hackの法則として知られる流域面積(A)と河道長(L)の関係($L=cA^d$)が、擬河道網のサブ流域にも成立しているのか調べる。図-2.13が地形図による河道網、図-2.14が面積閾値による河道網の流域面積(A)と河道長(L)の関係である。また、表-2.5は流域面積(A)と河道長(L)の回帰式の回帰係数 c, d を示す。図から水源を有する外部リンクだけが地形図による河道網の関係と傾向が異なり、面積閾値の河道網は流域面積に対するリンク長が短いことが解る。表-2.5の回帰係数を見ても、外部リンクのベキ指数 d だけが大きな値を示している。これは、実河道網の河道は比較的尾根付近まで延びた河道が存在している一方、面積閾値による擬河道網は尾根付近まで延びた河道が抽出され難いということを意味している。すなわち、河道と認識する水源の定義が問題であろう。なお、総リンクの流域面積(A)と河道長(L)の回帰式が内部リンクの回帰式に近いのは、内部リンクに数多く存在する面積の小さなサブ流域の $L-A$ の関係に総リンクの回帰式が影響されたためと考えられる。

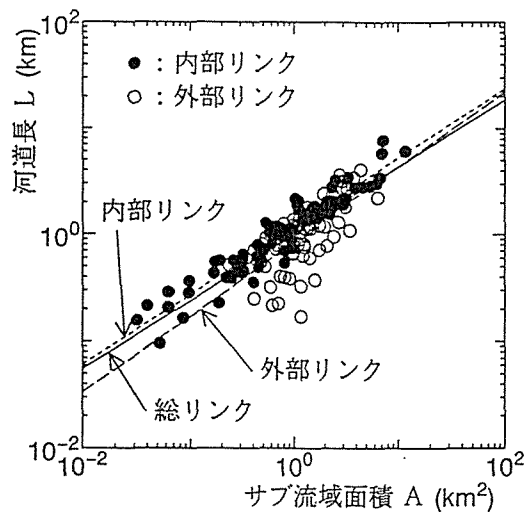
では、実河道の水源部での集水面積が、実際にどの程度の面積を持つのか調べてみたい。



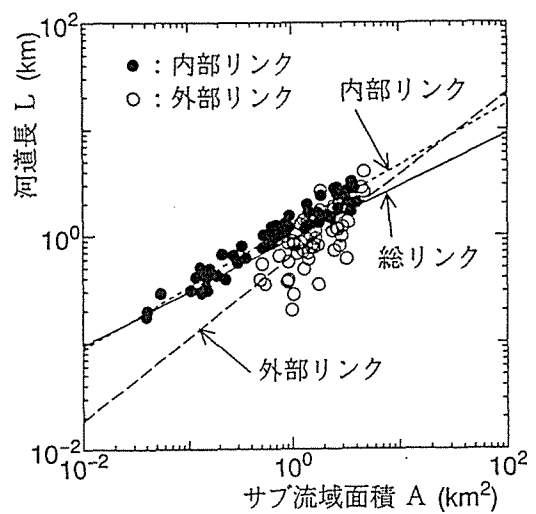
(津別流域)



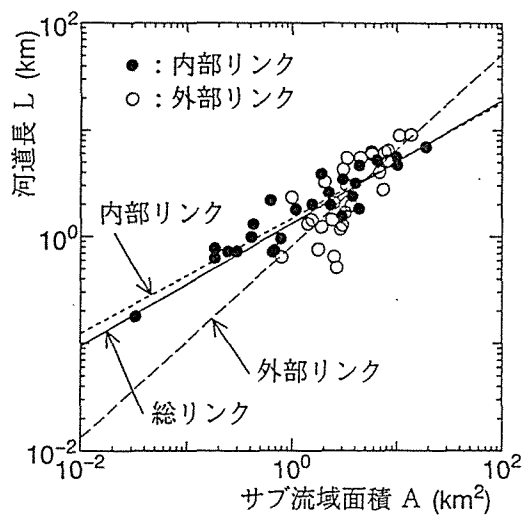
(留萌川流域)



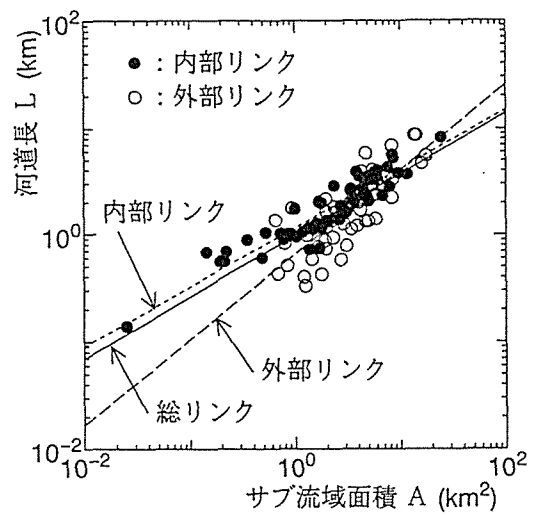
(滝上流域)



(立牛川流域)

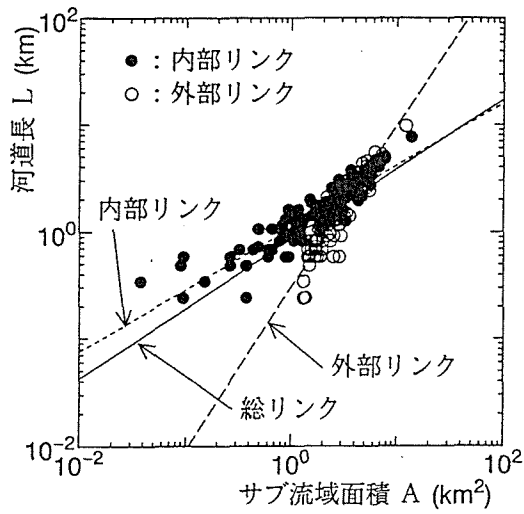


(美幌流域)

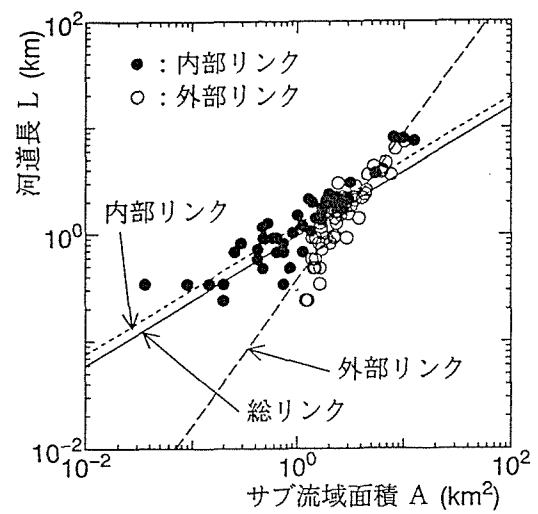


(置戸流域)

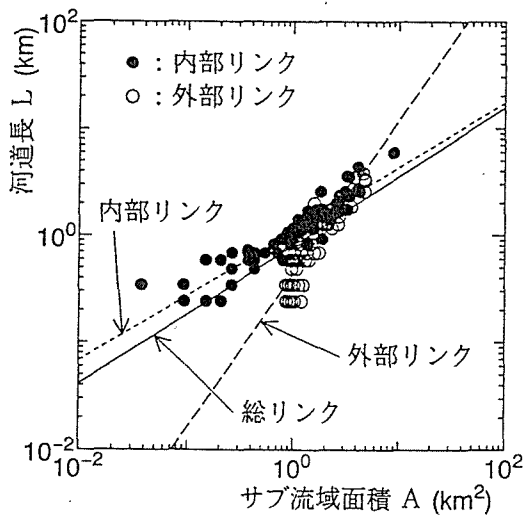
図-2.13 1/25,000 地形図の河道網の流域面積とリンク長の関係



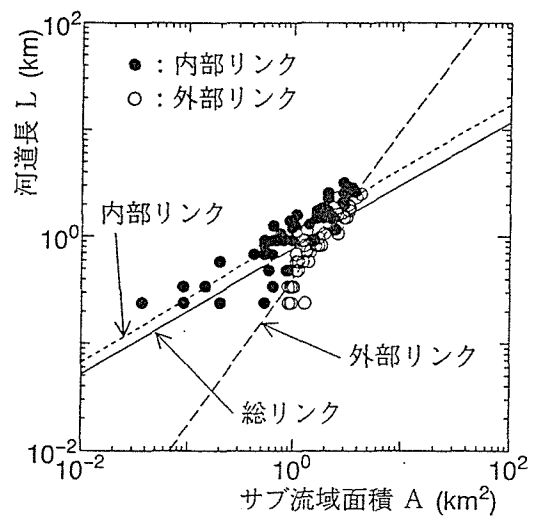
(津別流域)



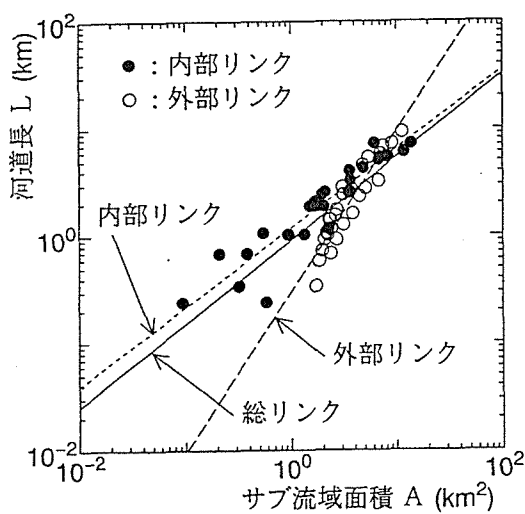
(留萌川流域)



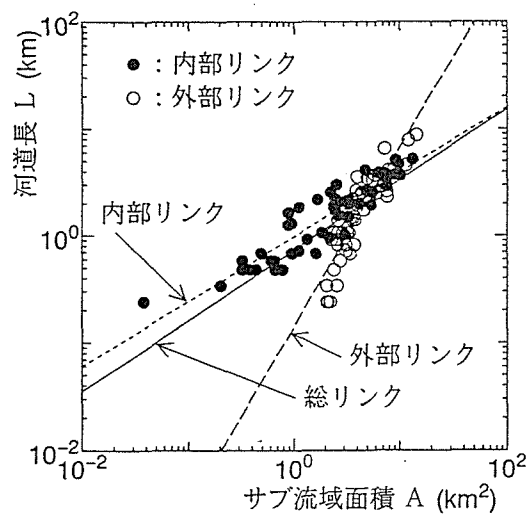
(滝上流域)



(立牛川流域)

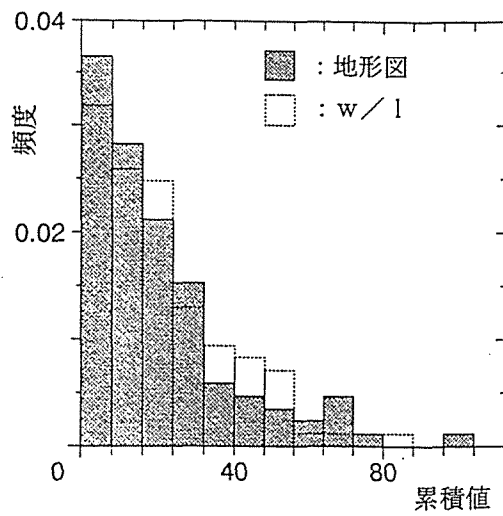


(美幌流域)

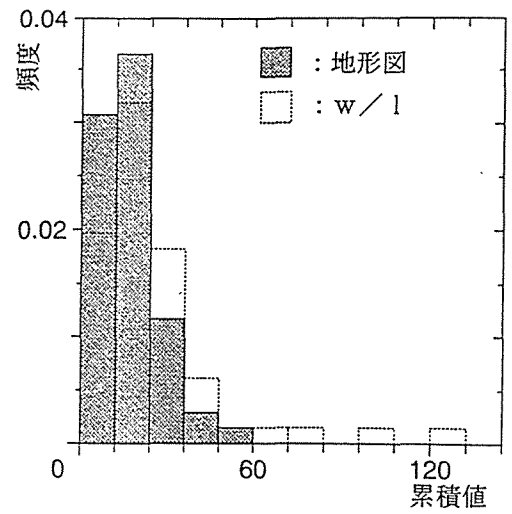


(置戸流域)

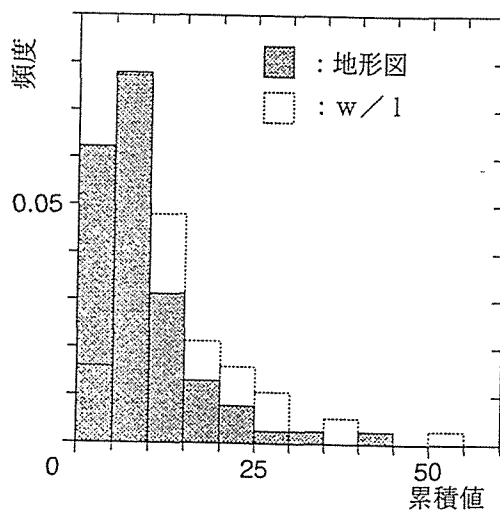
図-2.14 面積閾値による河道網の流域面積とリンク長の関係



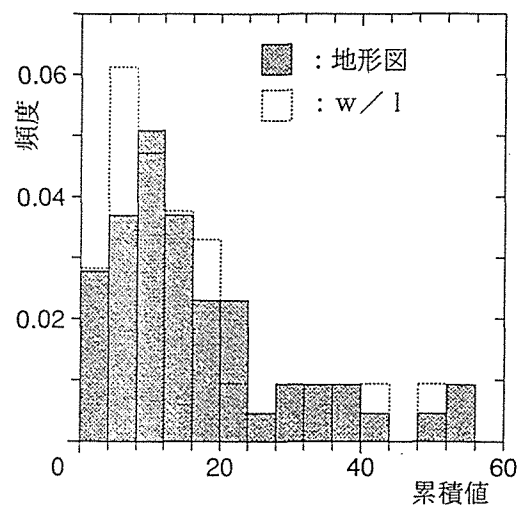
(津別流域)



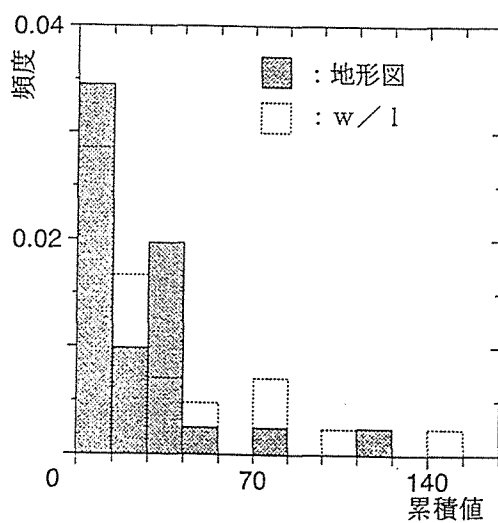
(留萌川流域)



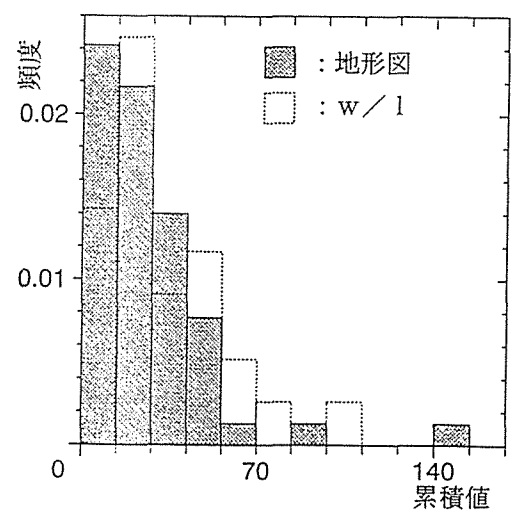
(滝上流域)



(立牛川流域)



(美幌流域)



(置戸流域)

図-2.15 河道の水源における集水面積のヒストグラム

表-2.5 流域面積とリンク長の関係の回帰係数

流域名	地図の種類	縮尺	c			d		
			総リンク	内部リンク	外部リンク	総リンク	内部リンク	外部リンク
美幌	地形図	1/25000	1.342	1.491	0.826	0.576	0.539	0.898
	擬河道網	面積 30	0.905	1.179	0.299	0.755	0.737	1.495
		w/l 0.2	1.146	1.155	1.187	0.515	0.595	0.434
置戸	地形図	1/25000	0.983	1.162	0.655	0.575	0.554	0.795
	擬河道網	面積 36	0.734	0.982	0.142	0.660	0.605	1.674
		w/l 0.38	0.905	0.983	0.790	0.615	0.593	0.679
留萌	地形図	1/25000	1.066	1.204	0.793	0.637	0.609	0.876
	擬河道網	面積 22	0.960	1.216	0.377	0.603	0.601	1.365
		w/l 0.21	1.001	1.221	0.685	0.568	0.549	0.816
滝上	地形図	1/25000	1.022	1.206	0.862	0.633	0.647	0.705
	擬河道網	面積 15	0.801	1.083	0.433	0.645	0.602	1.436
		w/l 1.14	0.982	1.069	0.883	0.558	0.541	0.660
立牛	地形図	1/25000	0.926	1.228	0.639	0.496	0.573	0.767
	擬河道網	面積 16	0.781	1.073	0.410	0.590	0.605	1.384
		w/l 0.46	0.983	1.045	0.963	0.530	0.612	0.443
津別	地形図	1/25000	0.977	1.185	0.741	0.588	0.585	0.710
	擬河道網	面積 23	0.856	1.096	0.299	0.654	0.582	1.513
		w/l 0.33	1.013	1.120	0.898	0.545	0.529	0.591

図-2.15 は津別流域の実河道網に落水線図に重ね合わせ、実河道網の水源の位置に対応するグリッド点の累積値（集水面積）のヒストグラムである。ハッチング部分が実河道網のヒストグラムである。面積閾値による水源は、当然、与えた閾値以外の値をとらないので、ヒストグラムはその値でのインパルス関数になる。一方、実河道網のヒストグラムは流域によって違いがあるものの（当然の結果であろう）、集水面積は幅広く分布しており、水源となる地点の集水面積が水源毎に違うことを示している。このことは、地形図の実河道網を忠実に再現するためには、この閾値を上流域、中流域、下流域毎に変化させなければならない、と道口ら³⁴⁾が指摘していることを裏付けている。これが面積閾値による擬河道網抽出の欠点である。

[2]w/l閾値の考え方

実河道の水源は、0次谷と呼ばれるかなり急峻な地形が多く、水源を集水面積だけで定義するは無理があろう。Dietrich ら²⁹⁾は勾配の要素を取り入れた浸食閾値を提案しているが、ここで提案する水源の定義は、角屋が地形図において定義した等高線の谷の幅 w と谷のわん入長 l の比 w/l を閾値とするものである。

この等高線の谷の幅 w と谷のわん入長 l の比をグリッド型 DEM に適用するためには、図-2.16 に示す様に河道の縦断勾配 S と河道の法線方向の左右岸横断勾配 θ_L , θ_R を用いて、

$$\frac{w}{l} = \frac{(w_L + w_R)}{l} = \frac{S}{\theta_L} + \frac{S}{\theta_R} \dots\dots\dots (2.1)$$

と変換する。ここで、 $S = \Delta H/l$, $\theta_L = \Delta H/w_L$, $\theta_R = \Delta H/w_R$ と変換することが出来る。

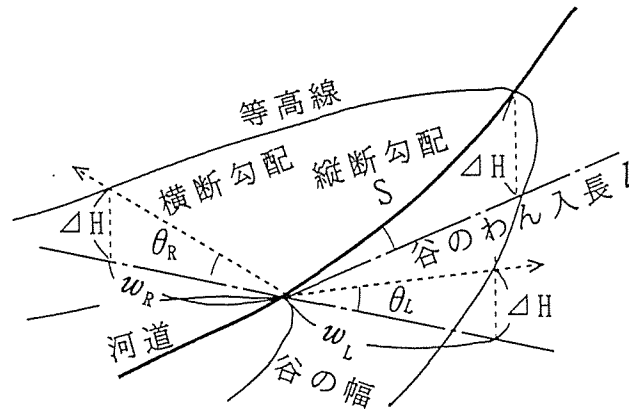


図-2.16 w/l と河道の縦・横断勾配との関係

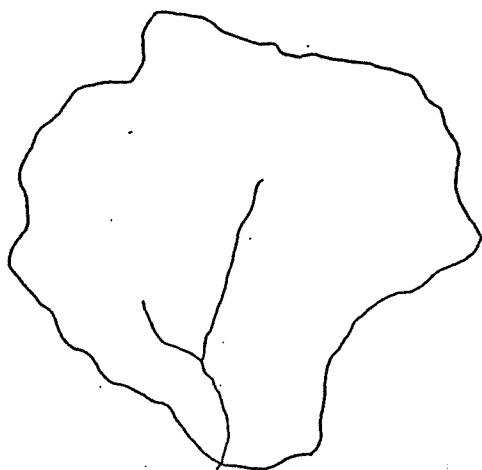
したがって、グリッド型 rm DEM データに適用する際には、対象とするグリッド点の落水線方向の縦断勾配と横断勾配からそのグリッド点の w/l を上式から計算し、この w/l の値が閾値より小さくなるグリッド点を水源と定義した。これは、勾配の要素のみから水源を定義しようとする考えである。

ところで、擬河道網抽出のベースとなる落水線方向の決定に際し、最急勾配方向に雨水が流れるという考えに基づいているので、面積閾値による方法も全く勾配の要素を考慮していない訳ではない。また、 w/l による方法も、対象とするグリッド点に上流から複数の落水線が流入してくる場合の縦断河道勾配は、落水線の持つ累積値が最大となる点を選んでいるので、全く面積の要素を考慮していないという訳でもない。したがって、面積閾値による擬河道網が集水面積に重みをおいているのに対し、 w/l は勾配に重みをおいて抽出した擬河道網であると考えることができよう。

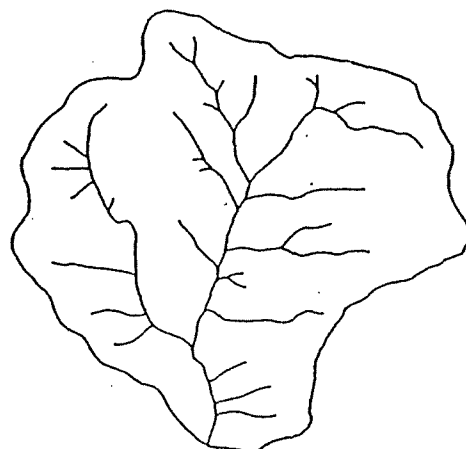
[3] 水源の定義の違いによる河道網の比較

まず、常呂川支川の富里ダム流域 (6.8km^2) を対象に、 $1/25,000$ 地形図から作成した 50m DEM データを用いて、面積閾値と w/l 閾値とによる擬河道網を比較する。図-2.17(a) は富里ダム流域の $1/25,000$ 地形図の河道網で (b) が現地踏査による河道網を示している。この流域の地形図の河道網はマグニチュードが 2 であるが、現地踏査による実河道網は図-2.17(b) のようにマグニチュードが 30 で、尾根付近まで延びた河道が数多く存在している。 w/l の定義は本来、このような地形図の河道網を実際の河道網に近づけることを目的に提案されているので、マグニチュードを一致させた面積閾値と w/l による擬河道網を図-2.17(c),(d) に示す。両者とも実河道網をよく再現しているが、この図から両者の定義の違いは明確でない。なお、 w/l の値はこの場合、 $w/l=1.66$ で角屋が推奨する $1 \sim 2$ の範囲にあり、DEM への w/l の適用が妥当なものであることを示している。

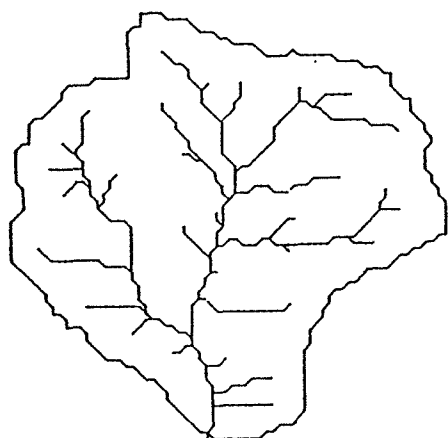
水源の定義の影響は、前述した外部リンクの河道長と流域面積の関係に見ることができ



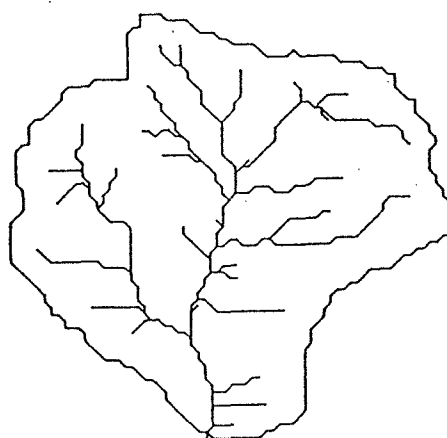
1/25,000 地形図の河道網



平水時の実河道網 (スケール 30)



面積閾値 (=25) による擬河道網



w/l 閾値 (=1.66) による擬河道網

図-2.17 水源の定義の違いによる河道網の比較

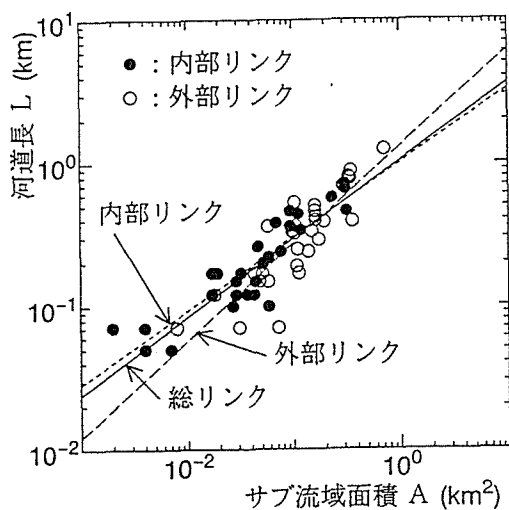
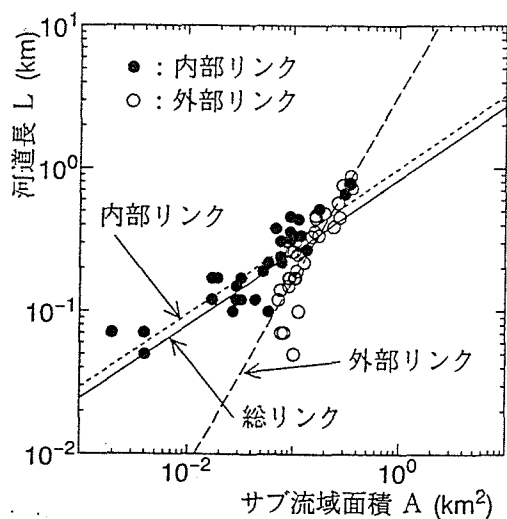
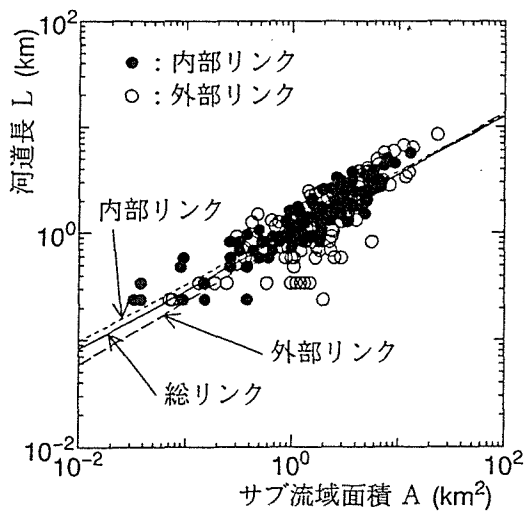


図-2.18 面積閾値と w/l 閾値による擬河道網の流域面積とリンク長の関係 (富里ダム流域)

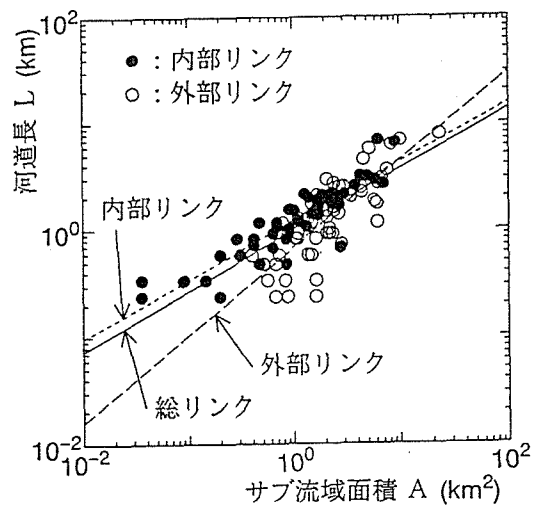
る。図-2.18は富里ダム流域の面積閾値と w/l 閾値の擬河道網の関係である。面積閾値は前述したように外部リンク長が短く、回帰式の勾配が急になっているが、 w/l 閾値による擬河道網は面積閾値に比べて外部リンク長が延びているために、外部リンクも内部リンクに近い関係になっている。すなわち、 w/l 閾値は外部リンクのHackの法則の改善に効果的であることを示している。

更に、国土数値情報の250mDEMデータを用いた前出の6流域についても同様に、 w/l 閾値による擬河道網の地形量を求めた結果が表-2.4に併記されているが、流域平均量で比較してしまうと大きな違いは見られない。しかし、先に示した図-2.15の水源の累積値のヒストグラムは、いずれの流域とも点線部分の w/l 閾値による擬河道網と地形図が良く似た分布をしている。流域面積と河道長の関係も、面積閾値(図-2.14)では違いが目立った外部リンクの関係が、図-2.19に示すように地形図(図-2.13)と同じく内部リンクに類似した傾向を示している。ここで、各流域の w/l の値は、渚滑川滝上流域以外が0.2~0.4となって角屋の提案した1~2よりも小さい値になっている。これは w/l の値を1/25,000地形図の河道網を再現するように決めたためで、 w/l を1~2とすれば、現地踏査の実河道網に近づくことになるものと考えられる。

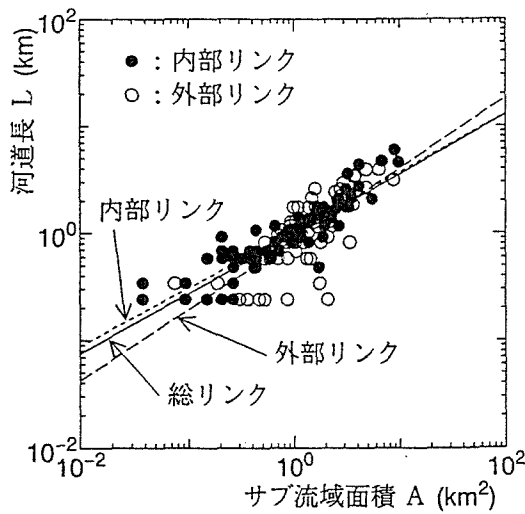
以上のように、この w/l の方法は、面積閾値に比べ実河道網に近い擬河道網を抽出することができたが、 w/l を算出するための処理が煩雑になるために、取り扱いが大変であるという欠点を持ち合わせている。従って、目的に応じてこの水源の定義を使い分ける必要が出てこよう。



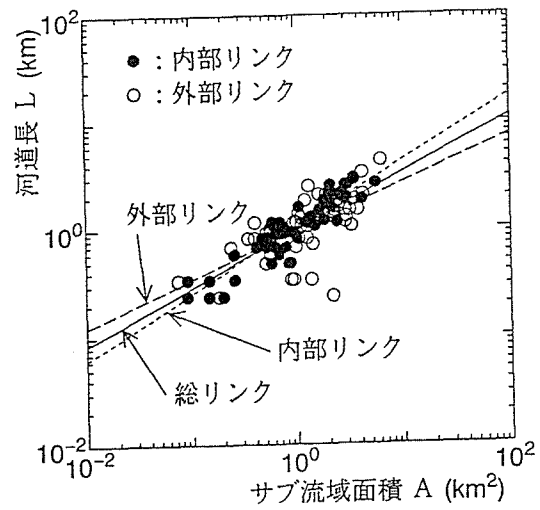
(津別流域)



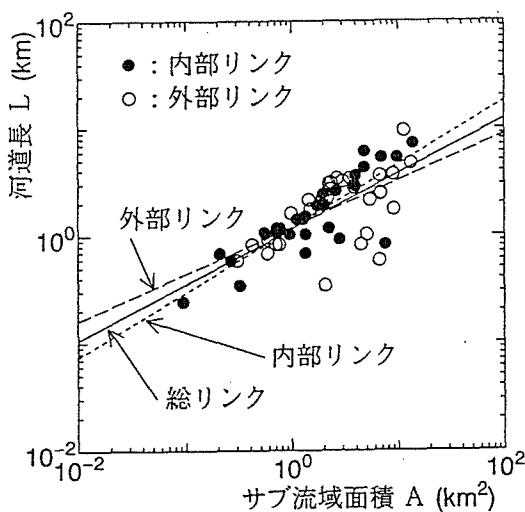
(留萌川流域)



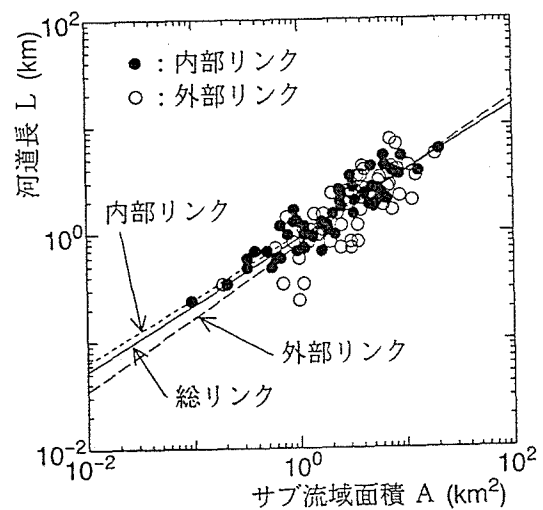
(滝上流域)



(立牛川流域)



(美幌流域)



(置戸流域)

図-2.19 w/l 閾値による擬河道網の流域面積とリンク長の関係

2.3 河道網パターンの確率変動特性

2.3.1 河道網パターンの分類法

河道網パターンの区分方法として, Shreve³⁾および高棹¹⁰⁾の提案したトポロジ的に異なった河道網 (TDCN, Topologically Distinct Channel Networks) の区分がある. 図-2.20(a) はマグニチュードが5の場合の TDCN 区分による河道網パターンを示している. この区分法では図にあるように左右支川の区別をしているため, マグニチュードが大きくなるに従い, 河道網パターン数が幾何級数的に増加する. そのため, 河道網パターンの特性をある程度保持したままでパターン数を減らす区分法が研究されてきた³⁵⁾.

Ambilateral 区分法は, TDCN で区別していた左右支川を区別しない方法である. 流出現象では, 左右支川の違いはほとんど影響しないために, この区分法は流出解析にとって利用度の高い区分法である. また, 河道網末端から等しい数のリンク (Path Lengths) を遡った所に位置するリンク数 (Path Numbers) によって河道網パターンを表現する区分法や, 全ての Path Lengths の総計である Total Path Length による区分法, そして河道末端から最上流までのリンク数 (Channel Diameters) による区分法が提案されている. いずれの区分法も, その利用目的によっては河道網構造の特徴を十分に定量化している.

本研究は流出現象に対する河道網構造特性の定量化を念頭においているので, Ambilateral 区分法あるいは Path Lengths and Path Numbers 区分法が適当であろう. したがって, 次節からは両区分法による河道網パターン構造の確率変動特性を明らかにする.

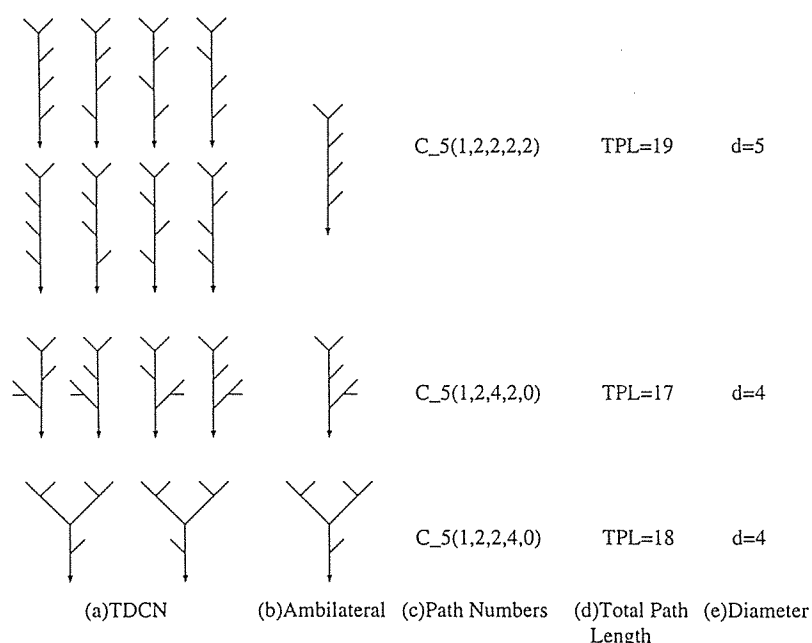


図-2.20 河道網パターンの分類法

2.3.2 河道網パターンの生起確率

Ambilateral 区分法は河道網の左右支川の区別が流出現象にほとんど影響しないことを考慮した区分法で，TDCN 区分法より河道網のパターン数を減らすことができる．図-2.21 はマグニチュードが 2 から 5 の Ambilateral 区分法による河道網パターンを示している．図中の () の数値は，河道網パターンの生起確率を示している．

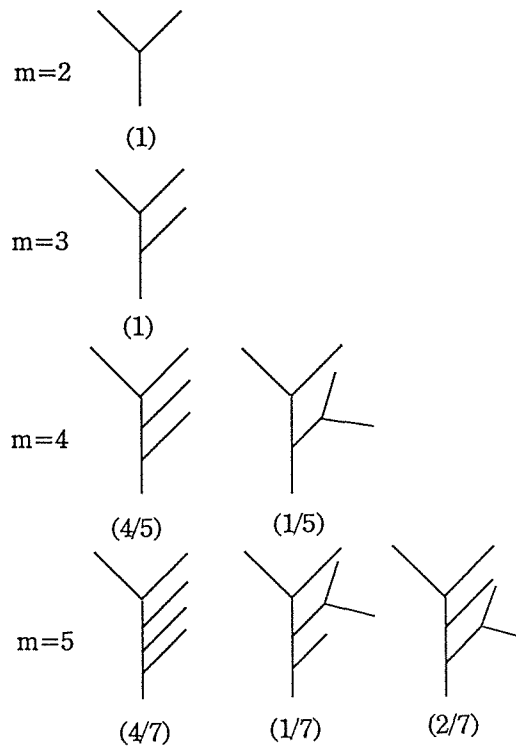


図-2.21 河道網配列パターンとその生起確率

この河道網パターンの生起確率は藤田¹¹⁾によって以下のように導かれている．マグニチュードが m 河道網において，図-2.22 に示すように最下流の合流点でマグニチュードが i と $m-i$ の 2 つの河道網に分割した河道網の生起確率を $P(i, m)$ とおくと， $P(i, m)$ は次式で与えられる．

$$\left\{ \begin{array}{l} P(i, m) = \frac{2(2i-3)!m!(m-2)!(2m-2i-2)!}{(i-2)!(m-i)!(2m-3)!(m-i-1)!} \\ \quad , 2 \leq i \leq [N/2], N \neq 2m, [] : \text{ガウス記号} \\ P(n, 2n) = \frac{8n}{(4n-2)!} \left\{ \frac{(2n-1)!(2n-3)!}{n!(n-2)!} \right\}^2 \quad \dots\dots\dots (2.2) \\ \quad , N = 2m \\ P(1, m) = \frac{m}{(2m-3)} \end{array} \right.$$

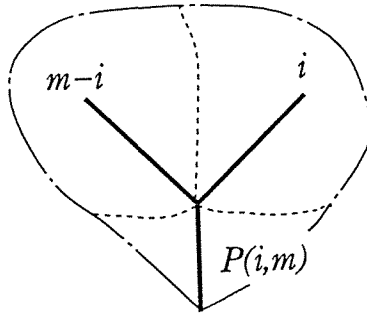


図-2.22 マグニチュード i と $m-i$ からなる河道網パターン

Ambilateral 区分法は，TDCN 区分に比べると河道網パターン数はかなり集約されるものの，マグニチュードが大きくなるとパターン数が膨大になり，取り扱いが大変である．そこで，河道網の集水過程を考える上で必要なサブ流域の空間的配置を表現できるのは，河道網末端から等リンク数遡った所に位置するサブ流域の数を定義した Path Lengths and Path Numbers 区分法である．

河道網末端から j 本のリンクを遡った所のサブ流域数を k_j とすると，河道網パターンは $C_{Nm}(k_1, k_2, \dots, k_j, \dots)$ というように k_j の連で定義できる．この河道網の区分法を，本論文ではリンク数の配列パターンと呼ぶことにする．河道網パターンは図-2.21 のように，マグニチュードが同じでも色々なパターンがあるので，この河道網パターンの変動特性を定量化する．

いま，マグニチュードが m の河道網において，この河道網の配列パターンの生起確率を P_c とおくと，河道網は次の条件を満たす必要がある．

条件 1 河道網の総リンク数は $2m-1$ 本である．

条件 2 河道末端から J 番目のリンク数 K の取り得る範囲は $J-1$ 番目のリンク数 M と J 番目から上流にあるリンクの総数 S とによって定まる．

$$0 \leq K \leq \min\{2M, S\}$$

これは， $j-1$ 番目に位置するリンク数 M と j 番目より上流にあるリンク総数 S が与えられた時に， j 番目のリンク数が K となる確率分布関数 $F(S, M, K)$ を定義するものである^{36),37)}．

$$F(S, M, K) = \frac{(M+S)K}{M \cdot S} \frac{\binom{S}{(S-K)/2} \binom{M}{K/2}}{\binom{M+S}{S/2}} \dots\dots\dots (2.3)$$

サブ流域数の配列パターンにこの確率分布関数 $F(S, M, K)$ を適用することによって，その生起確率 P_c を容易に求めることが出来る．

サブ流域数 K_j の期待値 $C(m, j)$ を考えると、 $C(m, j)$ は前出の生起確率 $P(i, m)$ を用いて次式で表すことができる³⁶⁾。

$$\begin{cases} C(m, j+1) = \sum_{i=1}^{[m/2]} P(i, m) \{C(i, j) + C(m-1, j)\} \\ \quad, 2 \leq j \leq m-1, m \geq 4 \\ C(m, 1) = 1, C(m, 2) = 2, C(m, j) = 0, m < j \end{cases} \dots\dots\dots (2.4)$$

この式を整理すると、 $C(m, j)$ の一般式が得られる。

$$C(m, j) = \frac{2^{j-1} j (m-1)! (2m-j-1)!}{(2m-2)! (m-j)!} \dots\dots\dots (2.5)$$

この $C(m, j)$ からなる配列パターンが平均的な河道網パターンということになる。図-2.23 はマグニチュードが $m=10, 20, 40, 60, 80$ の $C(m, j)$ である場合の平均的な河道網を示している。

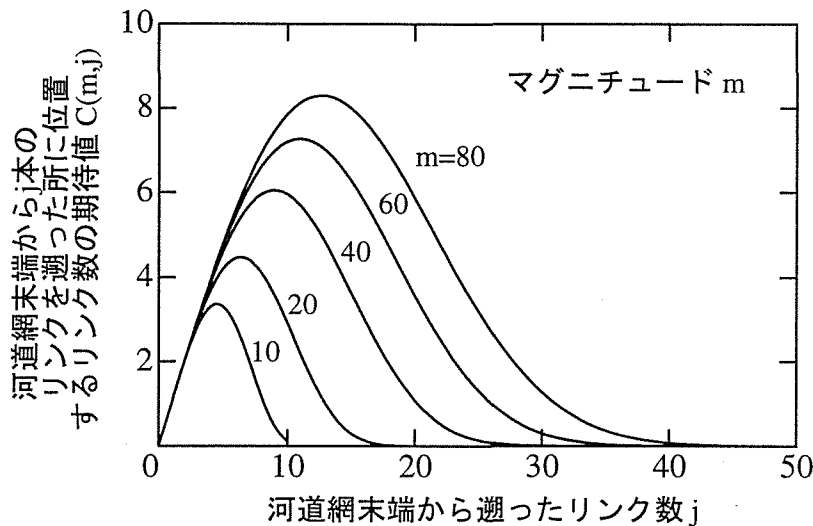


図-2.23 平均的な河道網パターン $C(m, j)$

また、マグニチュード m の河道網は $(2m-1)$ 個のサブ流域から構成されているので、 $C(m, j)$ は次式を満足している。

$$\sum_{j=1}^m C(m, j) = 2m - 1 \dots\dots\dots (2.6)$$

したがって、次式で定義される関数 $G(m, j)$ は、マグニチュード m の河道網における河道網末端から j 個のリンク数だけ遡った位置にあるサブ流域数の確率密度関数と考えることができる³⁸⁾。

$$G(m, j) = \frac{C(m, j)}{2m - 1} \dots\dots\dots (2.7)$$

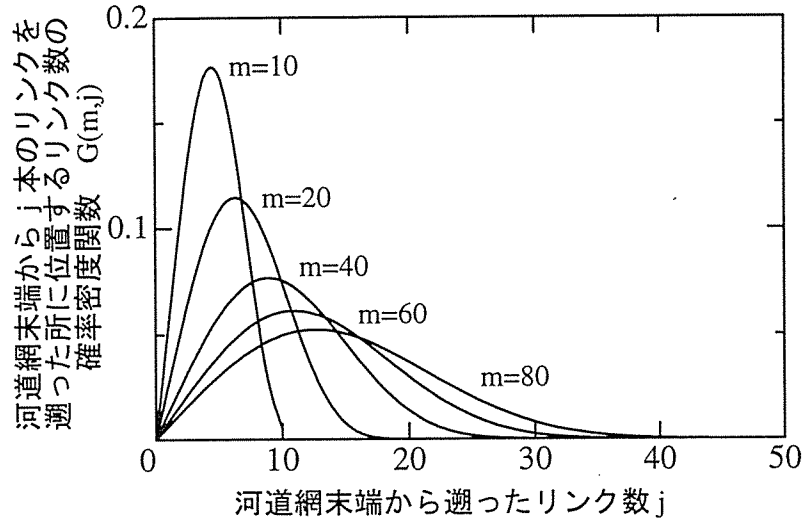


図-2.24 平均的な河道網パターンの確率密度関数 $G(m, j)$

$G(m, j)$ は図-2.24 に示すように図-2.23 の $C(m, j)$ を $2m - 1$ で割ったものになる．なお， $C(m, j)$ を k_j に置き換えると， $G(m, j)$ は各々の河道網パターンに対する確率分布を表すことになる．

次に，実際の河道網パターンはこの平均的な河道網パターンの周りで変動していると考えることができる．この確率変動を表す確率関数を $D(m, j, K)$ と定義する． $D(m, j, K)$ はマグニチュード m の河道網において，河道末端からリンク j 本遡ったところに位置するリンク数（サブ流域数）が K 個となる確率を表している．この確率関数は $C(m, j)$ と同じく，生起確率 $P(i, m)$ を用いて次式のように表すことができる^{36),37)}．

$$\left\{ \begin{array}{l} D(m, j+1, Z) = P(1, m)D(m-1, j, Z) \\ \quad + \sum_{i=2}^{[m/2]} P(i, m) \sum_{K=0}^Z D(i, j, K) D(m-i, j, Z-K) \quad \dots\dots\dots (2.8) \\ m \geq 4, 2 \leq j \leq m-1, [] : \text{ガウス記号} \\ D(m, 1, 1) = 1, D(m, 2, 2) = 1, D(m, m, 2) = P(1, m) \end{array} \right.$$

$D(m, j, K)$ を用いたリンク数 K の期待値は，当然 $C(m, j)$ に一致しなければならない．

$$C(m, j) = \sum_{K=0}^{[N/2]} K \times D(m, j, K) \quad \dots\dots\dots (2.9)$$

図-2.25 はマグニチュード $m=10$ の場合の $D(m, j, K)$ と $C(m, j)$ を示している．この図は河道末端からのリンク数を流域の本川長に置き換えると， $C(m, j)$ が流域の面積集中図に相当し， $D(m, j, K)$ がその確率変動を示していると考えることができる．なお，この $D(m, j, K)$ は式 (2.8) に示すように下流の $j-1$ の所のリンク数 K_{j-1} の確率関数を考慮して誘導した確率関数であるが， $D(m, j, K)$ の定義式には $j-1$ が含まれていないために， j に関して独立な確率関数として扱われる．

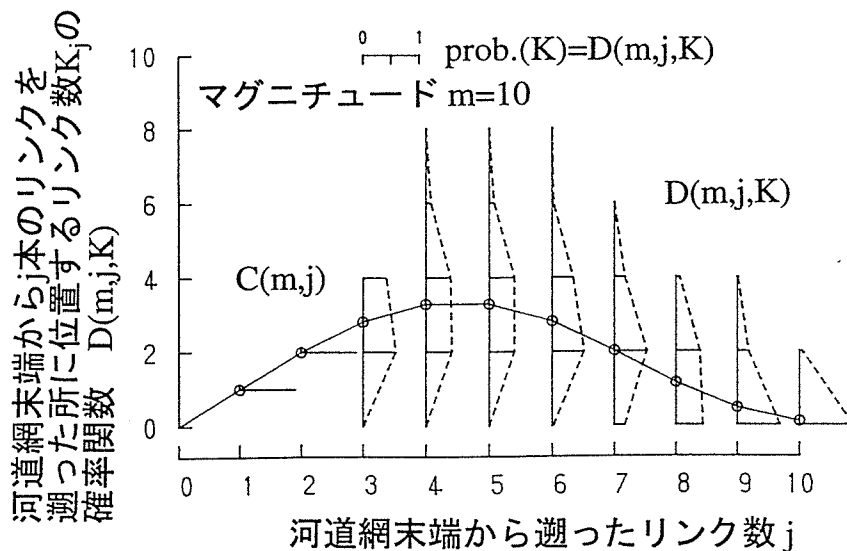


図-2.25 河道網末端から j リンク遡った所のリンク数 K_j の確率関数 $D(m, j, K)$

また、近年、降雨－流出現象として Partial Source Area（部分的流出寄与域）の概念が Hewlett³⁹⁾あるいは Betson⁴⁰⁾によって提案されている。つまり、降雨－流出は流域全域から一様に起こるのではなく、流出寄与域が流域の出口から徐々に上流域に広がって行くと言う考えである。この概念を河道網の集水過程に当てはめて考えると、河道網末端から j 本リンクを遡った所までのリンクの総数を流量に結びつけることができる。このリンク総数を K_s 、その確率関数を $E(m, j, K_s)$ と定義すると、次式となる³⁷⁾。

$$\left\{ \begin{array}{l} E(m, j+1, Z) = P(1, m)E(m-1, j, Z-2) \\ \quad + \sum_{i=2}^{[m/2]} P(i, m) \sum_{K=1}^{Z-2} E(i, j, K)E(m-i, j, Z-K-1) \quad \dots\dots\dots (2.10) \\ m \geq 4, 2 \leq j \leq m-1, 2(j+1)-1 \leq Z \leq 2m-1 \\ E(m, 1, 1) = 1, E(m, 2, 3) = 1, E(m, m, 2m-1) = 1 \end{array} \right.$$

図-2.26 はマグニチュード $m=10$ の場合の $E(m, j, K_s)$ の確率関数を示している。 K_s を流量に置き換えて考えると、図-2.26 は K_s の期待値が一定降雨が降り続いた場合のハイドログラフに相当し、 $E(m, j, K_s)$ がその確率変動を表すことになる。

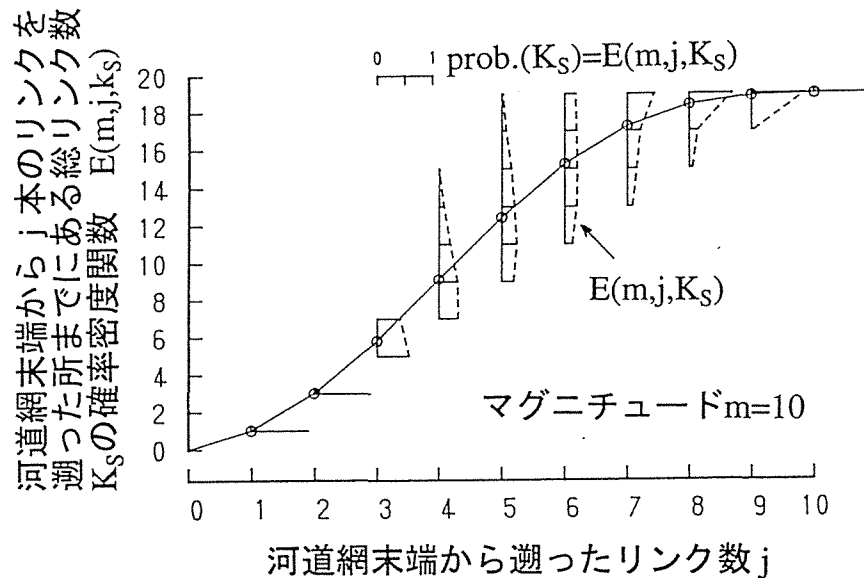


図-2.26 河道網末端から j リンク遡った所までにある総リンク数 K_s の確率関数 $E(m, j, K_s)$

2.3.3 河道網パターンの移行過程

分布型流出モデルを構築する場合には、一般に流域を細分化することが最初の作業になる。流域を細分化するには河道網構造に則った分割が自然であるので、言い換えればどの程度の密度の河道網を使うのが重要である。いま、流域の地質・植生などが均質で、地図の精度も流域全域で等しいという状態を想定し、ある縮尺の河道網のマグニチュードが m である流域を考える。この流域の縮尺を大きくしたときに、河道網の全てのリンクに実流域では、縮尺を変化させても流域を構成する本川や主要な支川からなる河道パターンは不変であるので、この現象を定量化しようという試みである^{41),42),43)}。

まず、河道網パターンの定式化には、前出のリンク数の河道配列パターン区分法を用いた。河道末端から j 本のリンク遡った所に位置するリンク数 K_j を用いて、河道網パターンを $C_m(K_1, K_2, \dots, K_j, \dots)$ というように定義する。この河道網の全てのリンクに n 本のリンクが出現したとすると、新たに移行した河道網パターンは以下ようになる。

	骨格の河道網	移行後の河道網
Magnitude	m	$\Rightarrow m' = m + n(2m - 1)$
総リンク数	$2m - 1$	$\Rightarrow 2m' - 1 = (2n + 1)(2m - 1)$
河道網パターン	$C_m(K_1, K_2, \dots, K_j, \dots)$	$\Rightarrow C_{m'}(K_1, \underbrace{2K_1, \dots, 2K_1}_{n}, \dots, K_j, \underbrace{2K_j, \dots, 2K_j}_{n}, \dots)$

例えば、図-2.27 の $C_4(1, 2, 2, 2)$ と $C_4(1, 2, 4, 0)$ の河道網に、 $n=1$ 本のリンクが発生したと

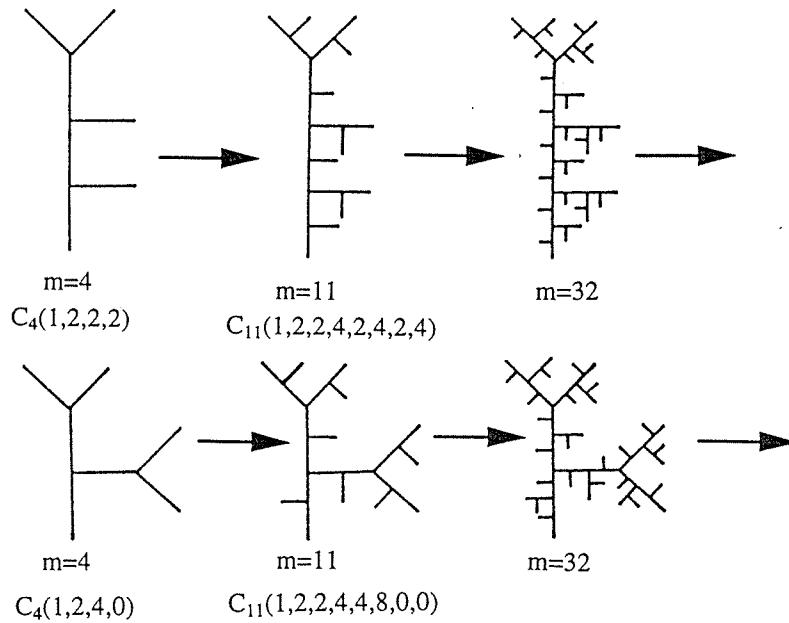


図-2.27 河道網パターンの移行過程

すると、河道網パターンは図-2.27のような河道網パターンの移行が行われる。
その時の河道配列パターンは以下の通りである。

$$\begin{aligned}
 C_4(1, 2, 2, 2) &\Rightarrow C_{11}(1, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 4) \\
 &\Rightarrow C_{32}(1, 2, 2, 4, 2, 4, 4, 8, 2, 4, 4, 8, 2, 4, 4, 8) \\
 &\Rightarrow C_{95}(1, 2, 2, 4, \dots\dots\dots) \Rightarrow, \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_4(1, 2, 4, 0) &\Rightarrow C_{11}(1, 2, 2, 4, 4, 8, 0, 0) \\
 &\Rightarrow C_{32}(1, 2, 2, 4, 2, 4, 4, 8, 4, 8, 8, 16, 0, 0, 0, 0) \\
 &\Rightarrow C_{95}(1, 2, 2, 4, \dots\dots\dots) \Rightarrow, \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

なお、各々の河道網パターンの生起確率は、前節で誘導した確率関数 $F(S, M, K)$ を用いて容易に導くことができる。

次に、リンクが一本新たに出現すると、元のサブ流域は3分割され、サブ流域のリンク長・面積の分布特性も変化する。この移行後のサブ流域のリンク長・面積の確率分布特性を決めるのは、元のリンクのどの地点にリンクが出現するかを定義する確率分布が必要になり、その分布は元のリンク長の条件付き確率分布になると予想される。河道網パターンの移行に伴って変化するサブ流域のリンク長・面積の確率分布については、後述する。

2.4 サブ流域の地形量特性

流域の流出現象は河道網による集水過程と共に、各サブ流域からの流出機構の把握が重要である。河道網構造については、河道位数理論によって平均的な河道網特性が定量化され、また、河道網の分布特性については前節でリンク-マグニチュード理論を用いて定量化された。

一方、サブ流域の流出機構はサブ流域の地形量と密接に関わっている。サブ流域個々の流域面積やリンク長、勾配等がどのような確率分布に従うかは、流出量の変動特性を把握する上で必要である。従来の地形量解析では、特定の縮尺の地形図を計測するしかなかったが、擬河道網を用いると、前節で述べたように任意の縮尺の河道網の地形量をコンピュータで自動的に計測する事ができる。

本節では、擬河道網によるサブ流域地形量の計測結果を示すと共に、任意の縮尺、すなわち任意のマグニチュードのサブ流域地形量を定量化する理論式を提案する³⁸⁾。

2.4.1 サブ流域の流域面積とリンク長

従来、サブ流域の地形量を計測した例として、島野⁴⁸⁾や友杉⁴⁹⁾は地形図の河道網を計測し、サブ流域の流域面積、リンク長が対数正規分布やガンマ分布、あるいはワイブル分布に従うことを示している。果たして、擬河道網の地形量も、地形図と同様な分布を示すのか、また、マグニチュードを変化したときにこの確率分布はどの様になるのかについて、計測結果を基に考察する。

[1] サブ流域の流域面積とリンク長の確率分布

図-2.28～図-2.33 は、前出の渚滑川滝上流域と立牛川流域、留萌川流域、常呂川置戸流域と網走川津別流域と美幌川流域の6流域についてのサブ流域面積の任意のマグニチュードにおけるヒストグラムである。図-2.34～図-2.39 がリンク長のヒストグラムである。なお、擬河道網抽出のための閾値は、面積閾値を用いている。

以上の図を見ると、サブ流域面積とリンク長のヒストグラムは、いずれも左に歪んだ分布形を呈していることが分かる。つまり地形図による計測結果と同様に対数正規分布あるいはガンマ分布に従うことが予想される。また、マグニチュードの変化による確率分布への影響は、マグニチュードが大きくなるにつれて、正規分布のような対称形分布に移行している。

これらの地形量がどの確率分布関数に従うかを判断する方法は、種々考えられるが、ここでは図-2.40 に示す確率分布関数の3次モーメントと4次モーメントとの関係図にプロットしてみて、計測した地形量がどの確率分布に該当するかを判断する簡易推定法を採用した。

6流域について、サブ流域面積の3次、4次モーメントの関係をマグニチュードを変化さ

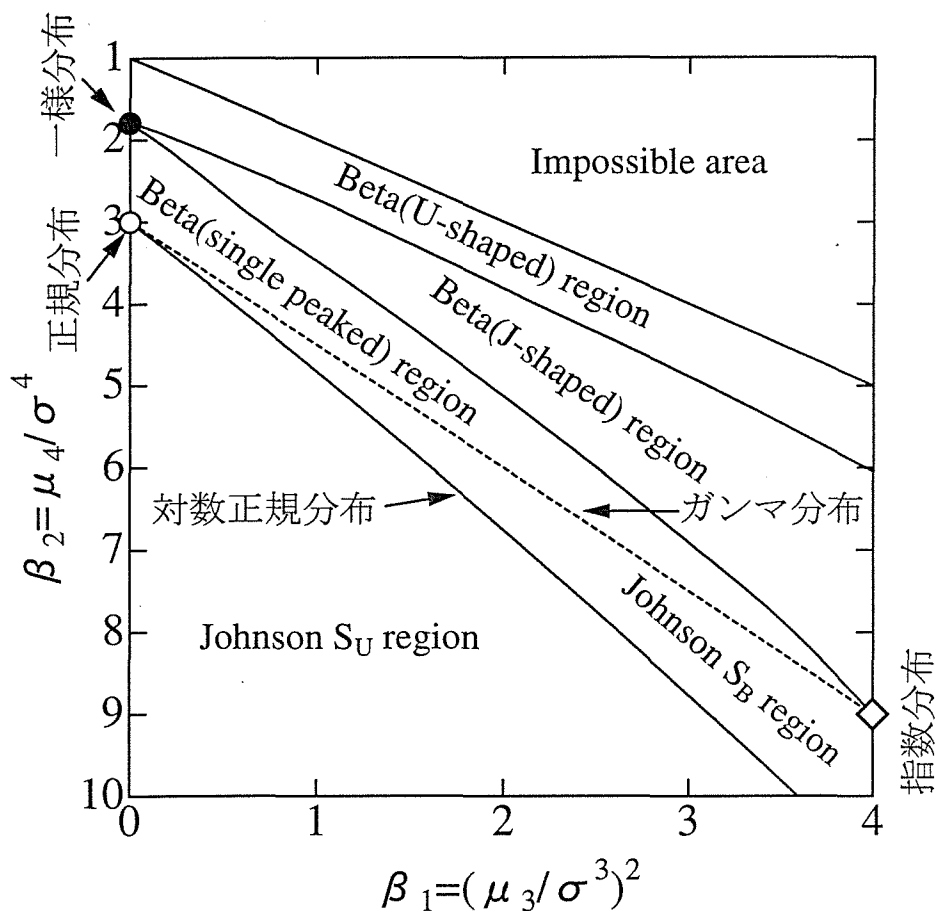


図-2.40 確率分布関数の 3, 4 次モーメントの関係

せてプロットしたのが図-2.41 で、リンク長が図-2.42 である。図から、サブ流域面積はガンマ分布、単峰あるいは J 形状のベータ分布の領域にある。リンク長もサブ流域面積と同様にガンマ分布、単峰あるいは J 形状のベータ分布の領域にあり、両者ともマグニチュードが大きくなると一様分布、あるいは正規分布付近に集中する傾向が見られる。

以上から、サブ流域の流域面積、リンク長とも確率分布関数としてガンマ分布で近似できることが分かった。また、正規分布はガンマ分布の特殊な場合と考えられるので、マグニチュードが変化してもガンマ分布で近似できるという仮定は妥当なものである。

流域面積、リンク長共にガンマ分布を仮定すると、平均値 \bar{X} 、分散 σ_X^2 とガンマ分布のパラメータ λ 、 κ との間には以下の関係がある。

$$\lambda = \frac{\bar{X}}{\sigma_X^2}, \quad \kappa = \frac{\bar{X}^2}{\sigma_X^2} \dots\dots\dots (2.11)$$

分布パラメータが決定できると、ガンマ分布の 3, 4 次モーメント μ_{3X} 、 μ_{4X} は

$$\mu_{3X} = \frac{2 \kappa}{\lambda^3}, \quad \mu_{4X} = \frac{3 \kappa (\kappa + 2)}{\lambda^4} \dots\dots\dots (2.12)$$

のように求めることができる。

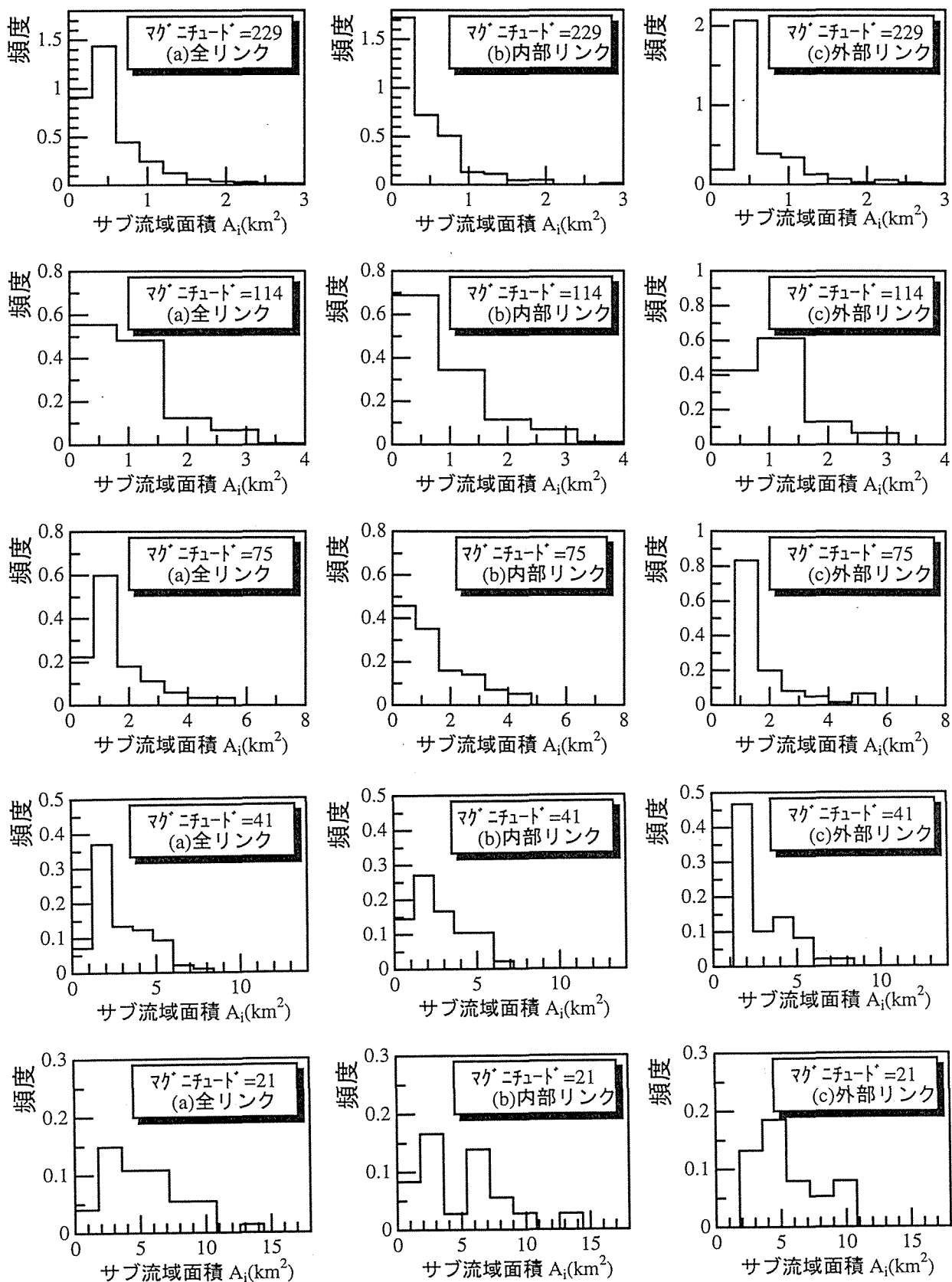


図-2.28 サブ流域面積のヒストグラム (渚滑川滝上流域)

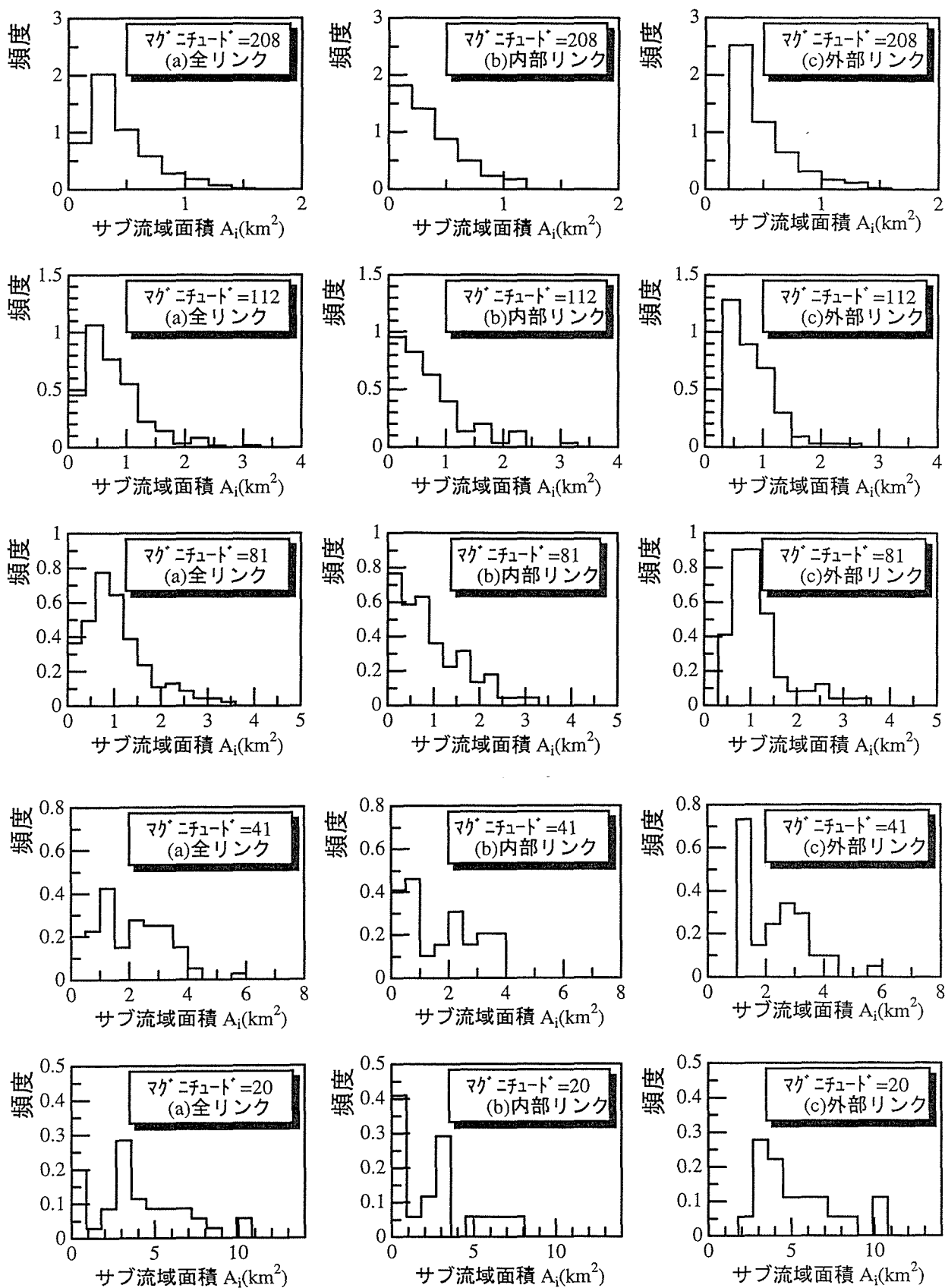


図-2.29 サブ流域面積のヒストグラム（渚滑川立牛川流域）

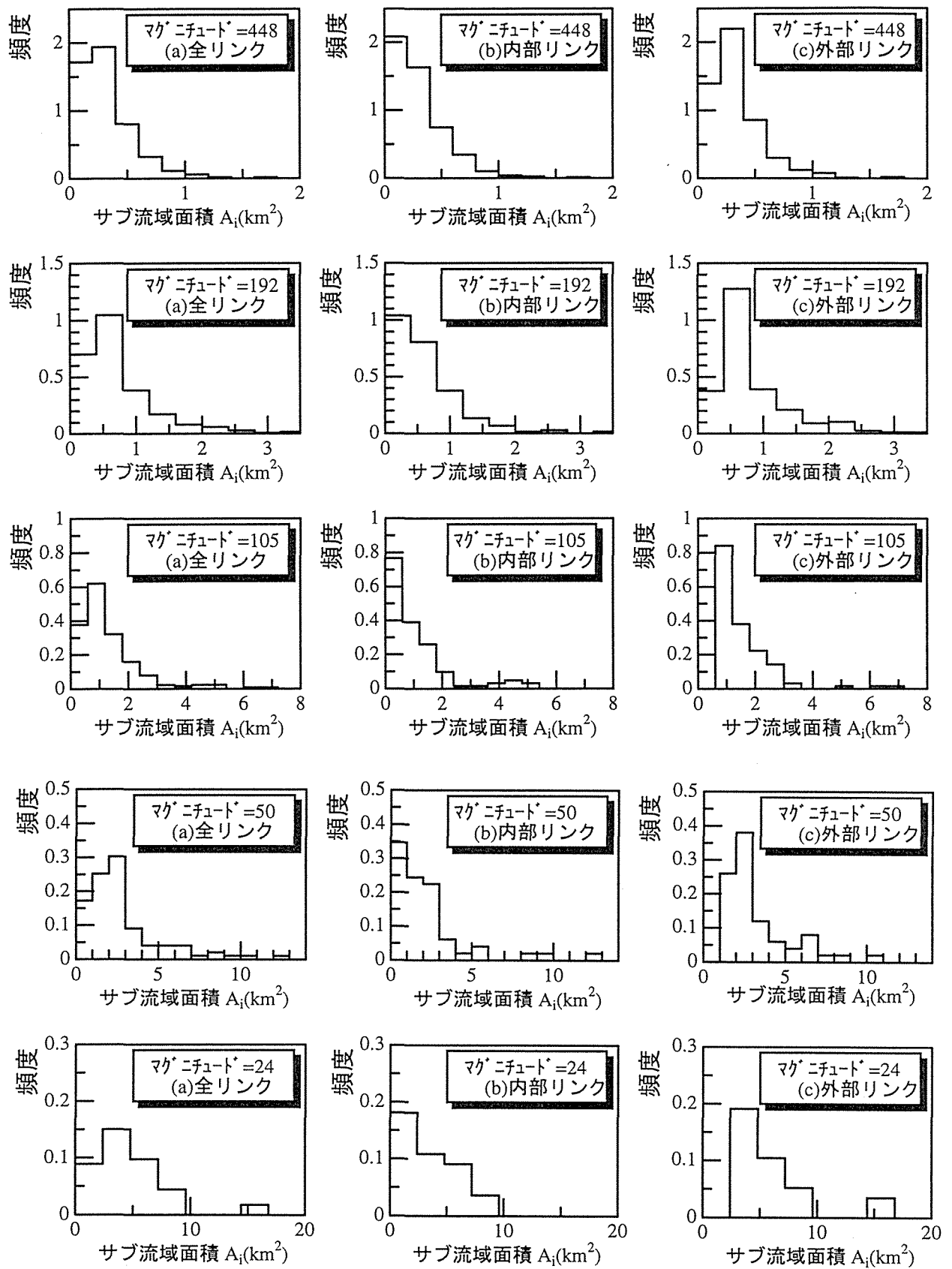


図-2.30 サブ流域面積のヒストグラム (留萌川流域)

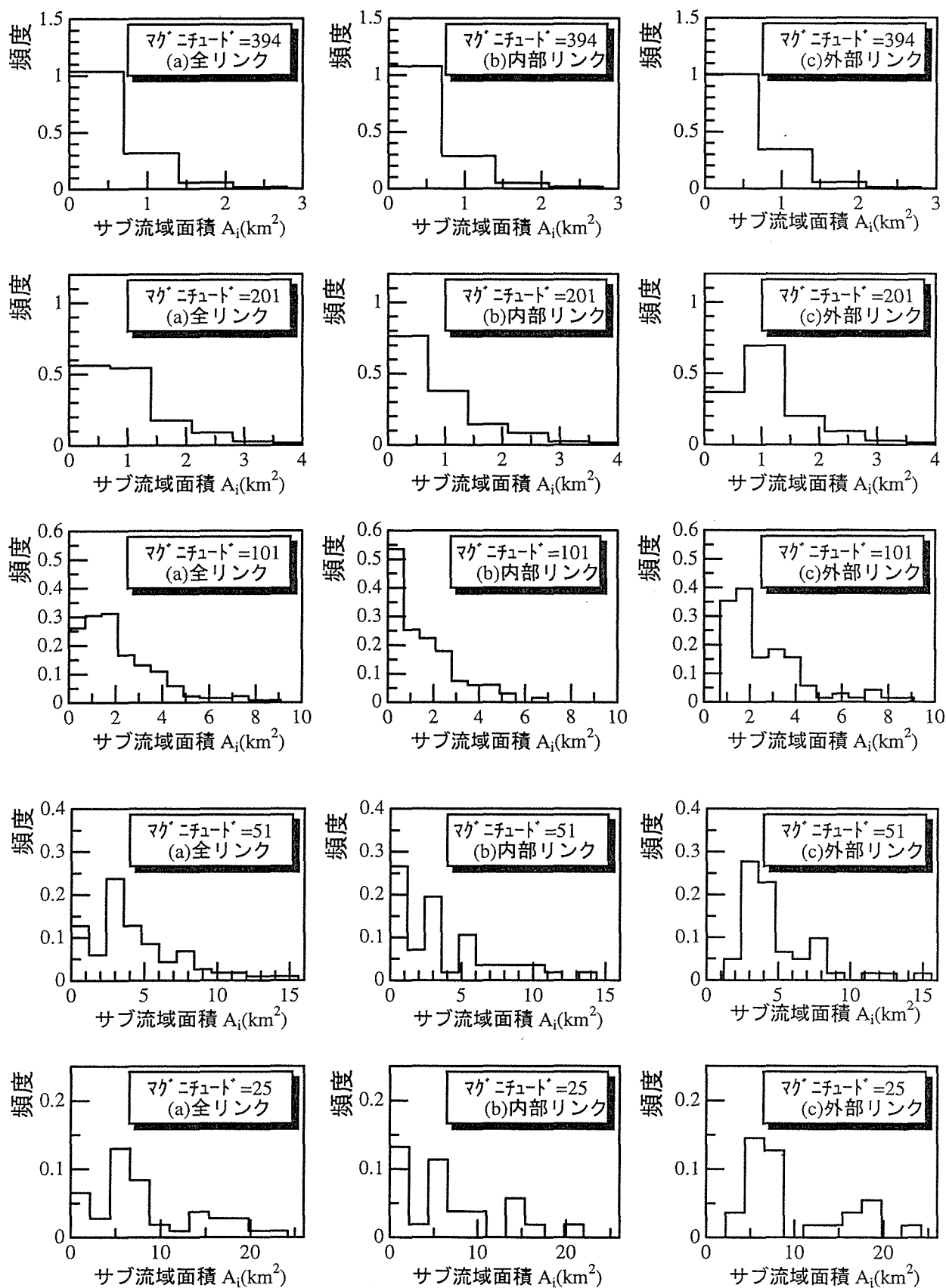


図-2.31 サブ流域面積のヒストグラム（常呂川置戸流域）

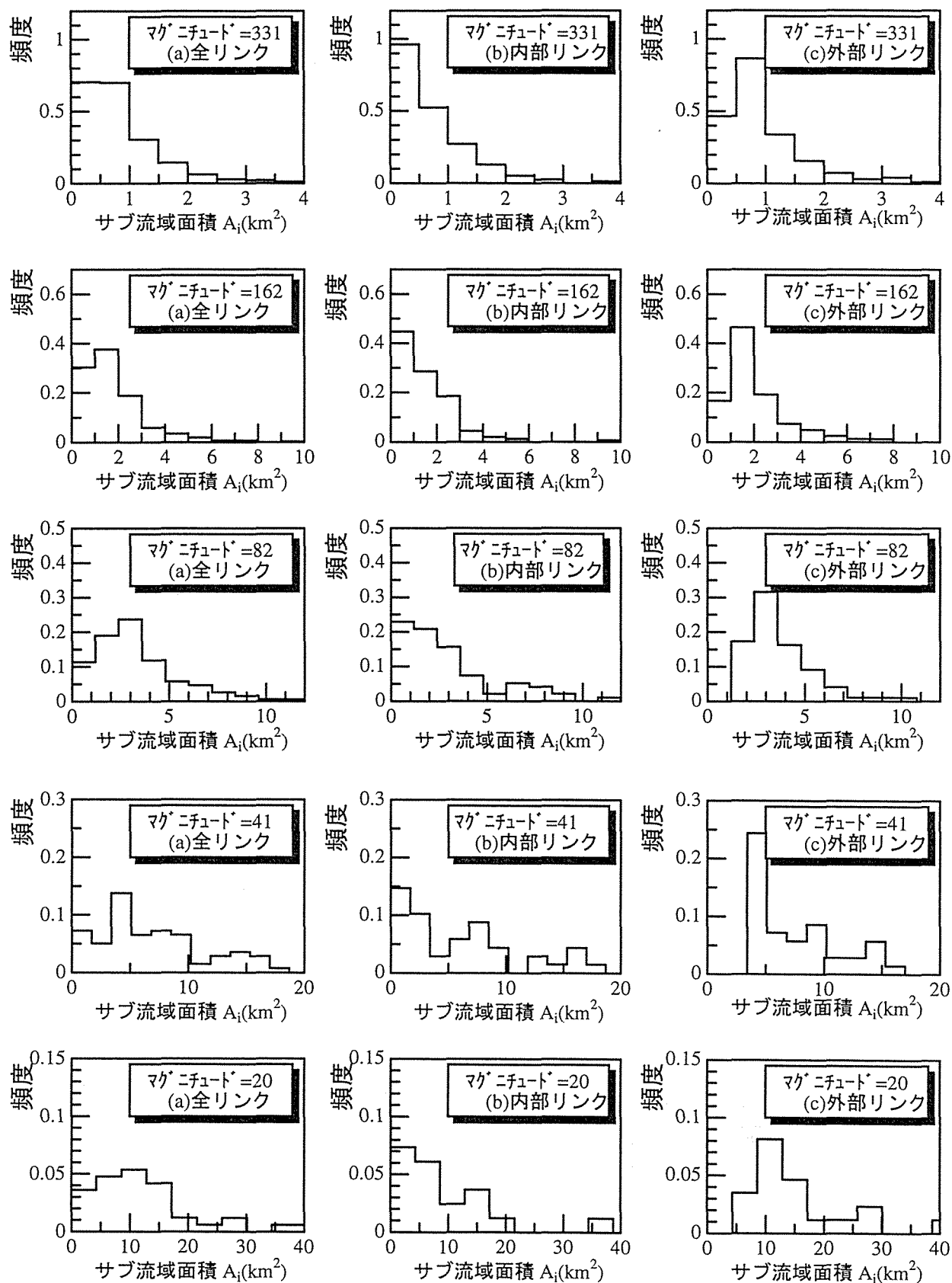


図-2.32 サブ流域面積のヒストグラム (網走川津別流域)

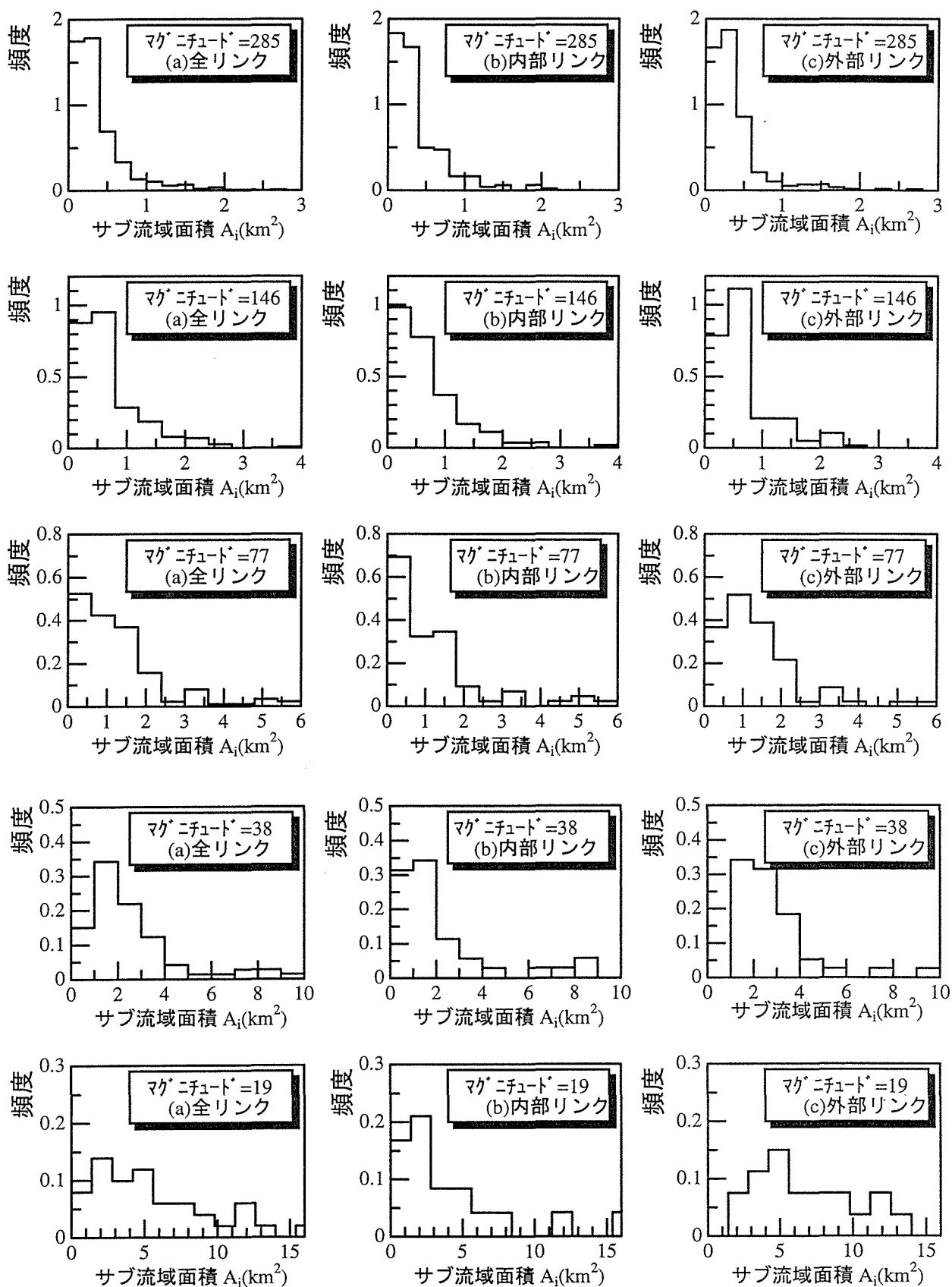


図-2.33 サブ流域面積のヒストグラム（網走川美幌川流域）

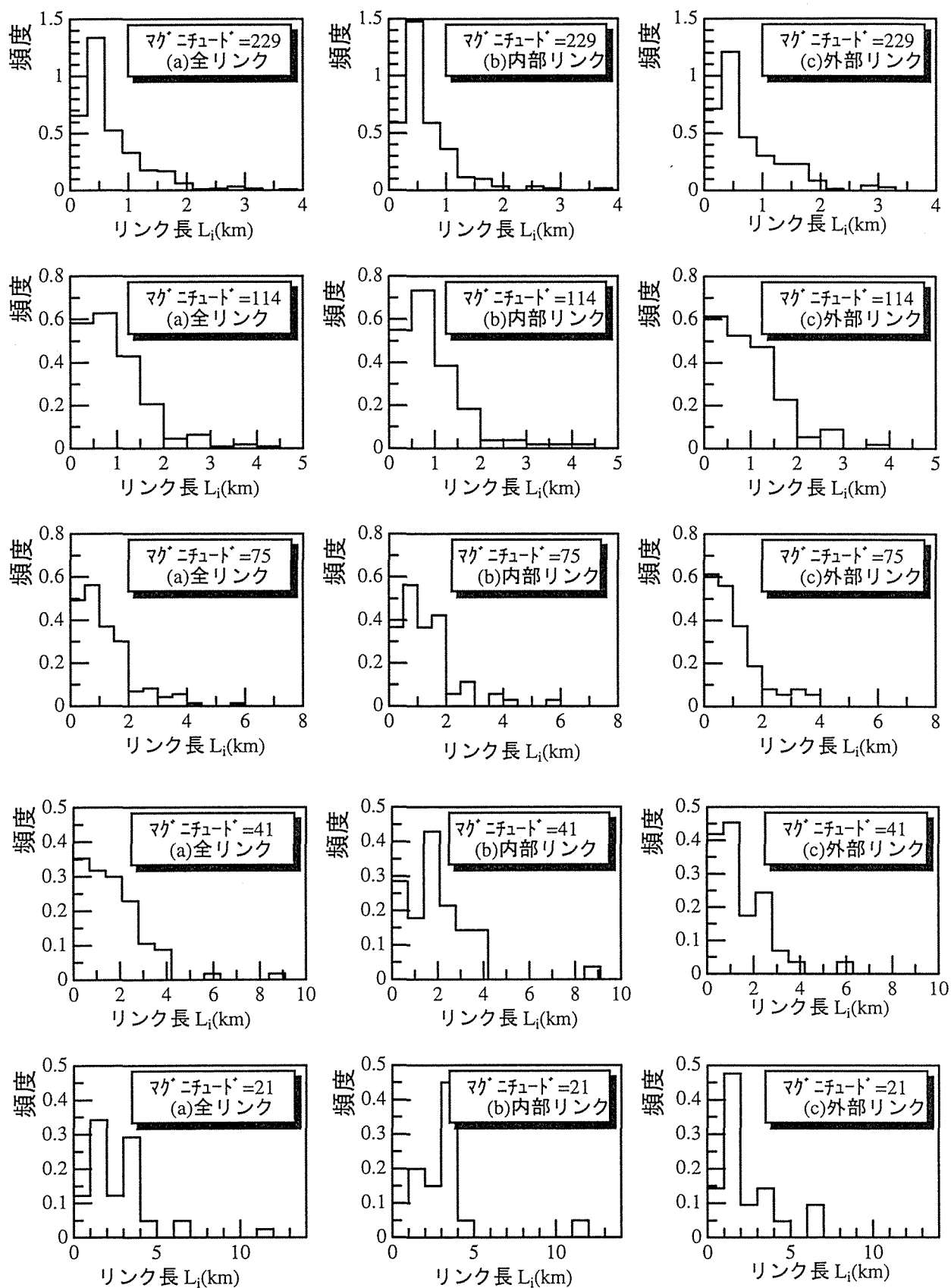


図-2.34 サブ流域のリンク長のヒストグラム (渚滑川滝上流域)

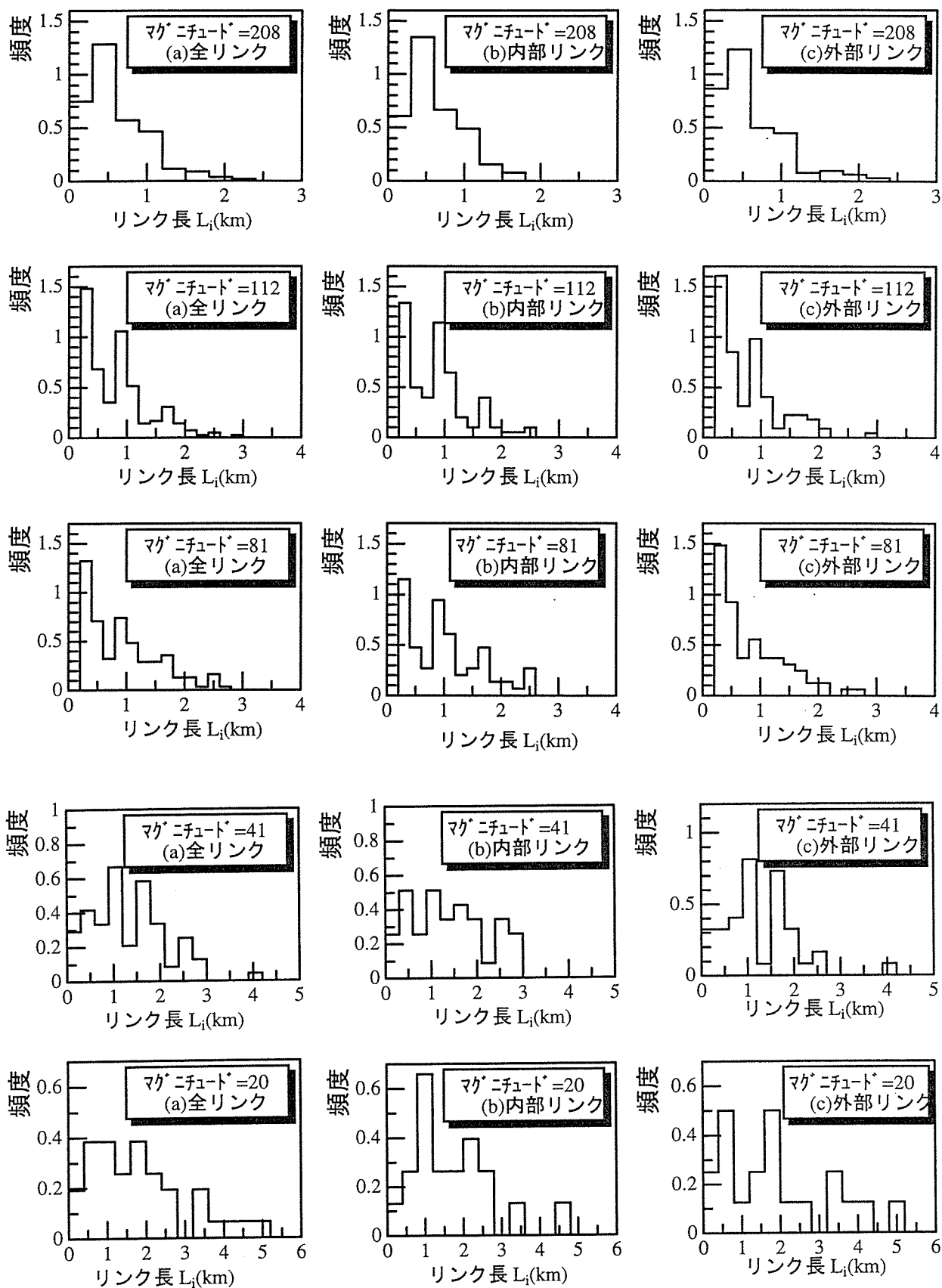


図-2.35 サブ流域のリンク長のヒストグラム (渚滑川立牛川流域)

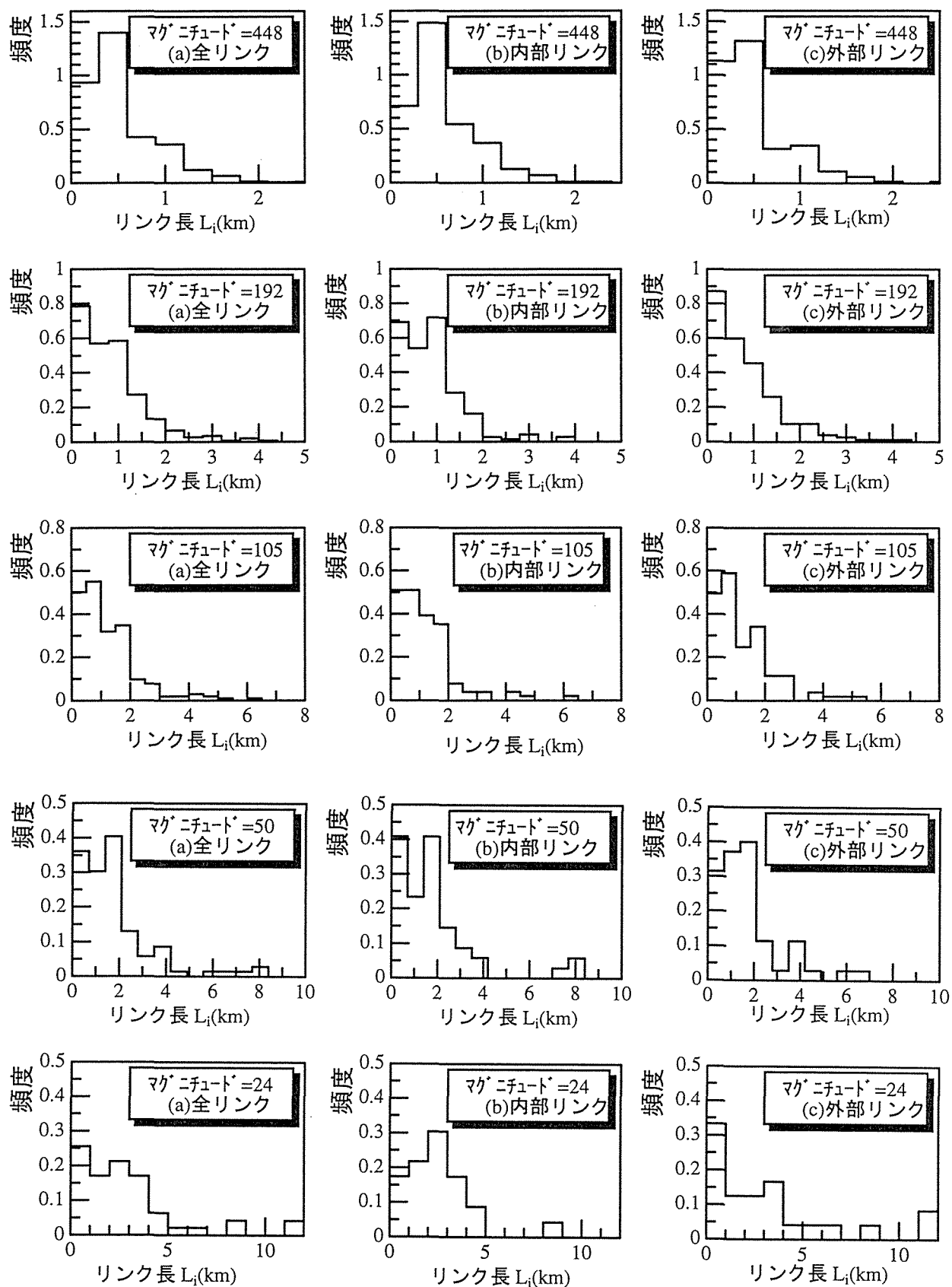


図-2.36 サブ流域のリンク長のヒストグラム（留萌川流域）

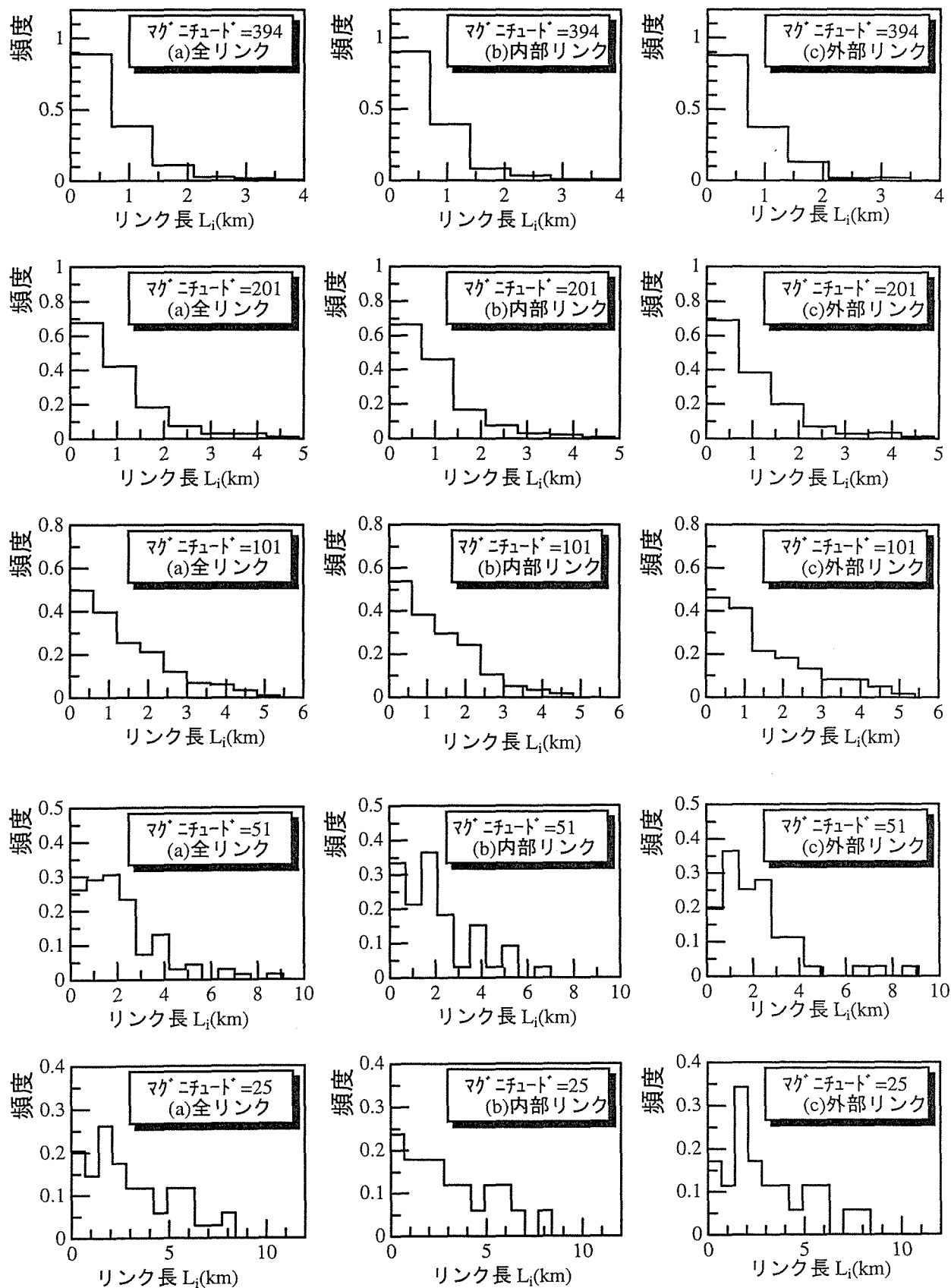


図-2.37 サブ流域のリンク長のヒストグラム (常呂川置戸流域)

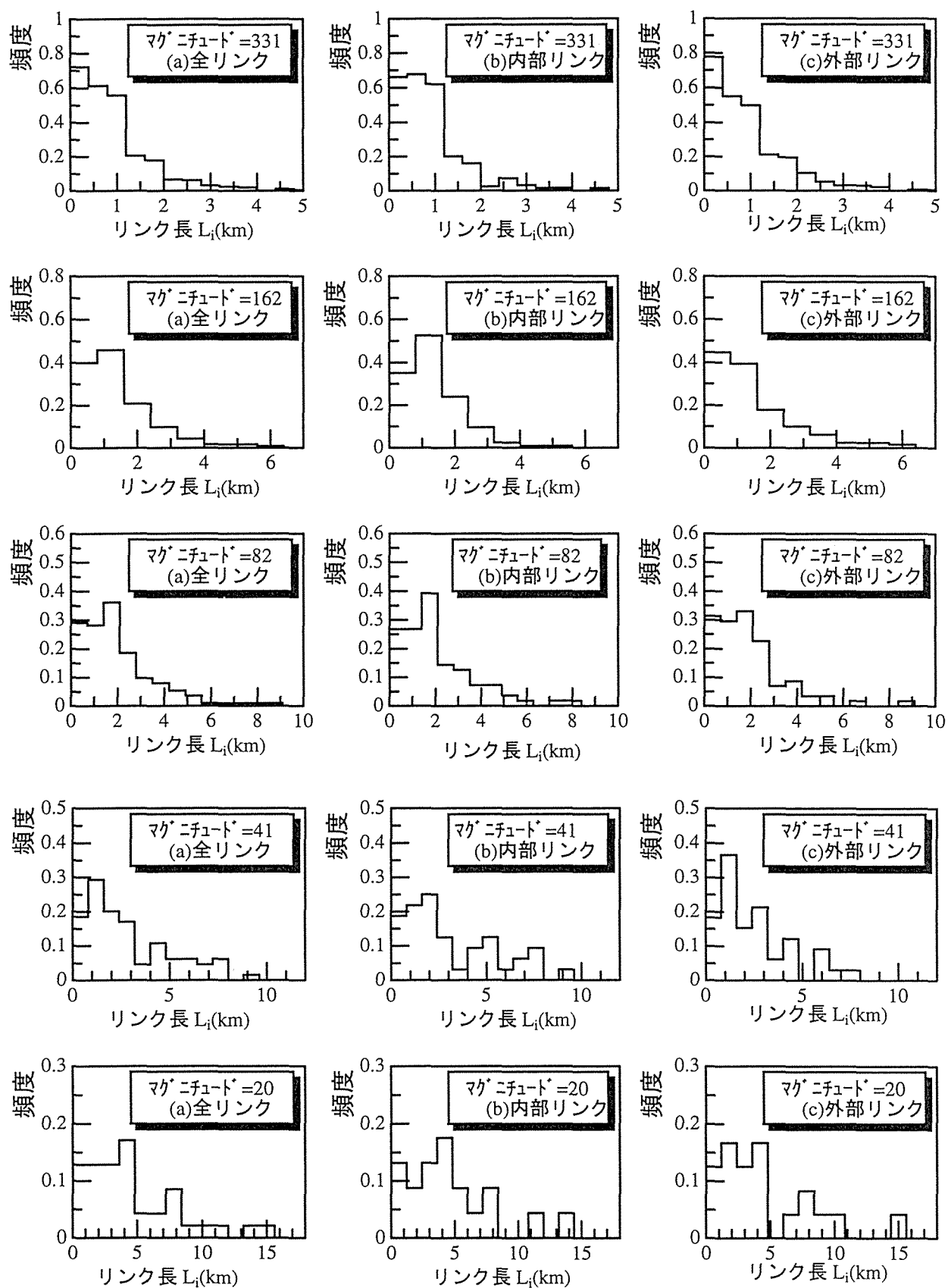


図-2.38 サブ流域のリンク長のヒストグラム (網走川津別流域)

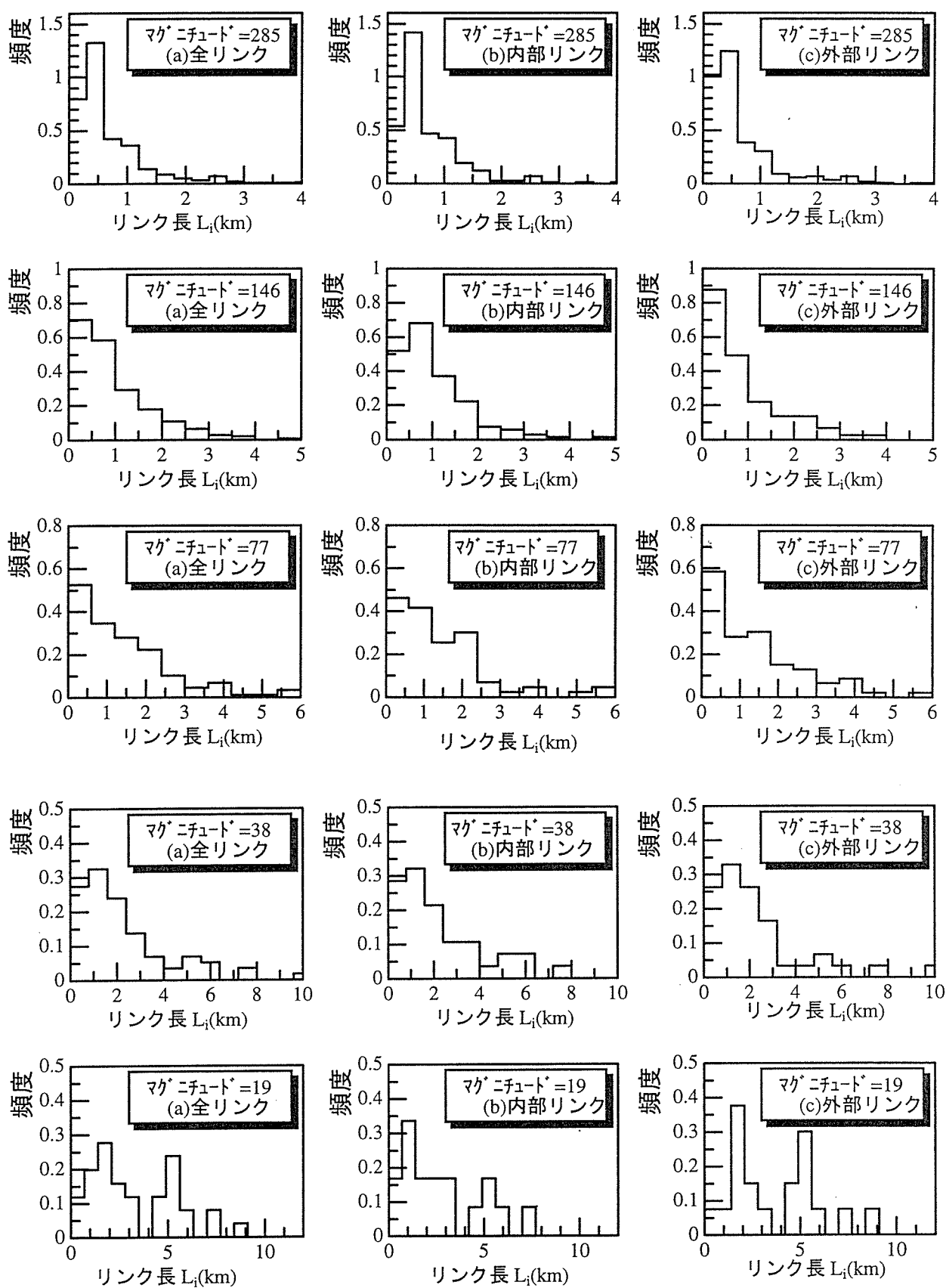


図-2.39 サブ流域のリンク長のヒストグラム (網走川美幌川流域)

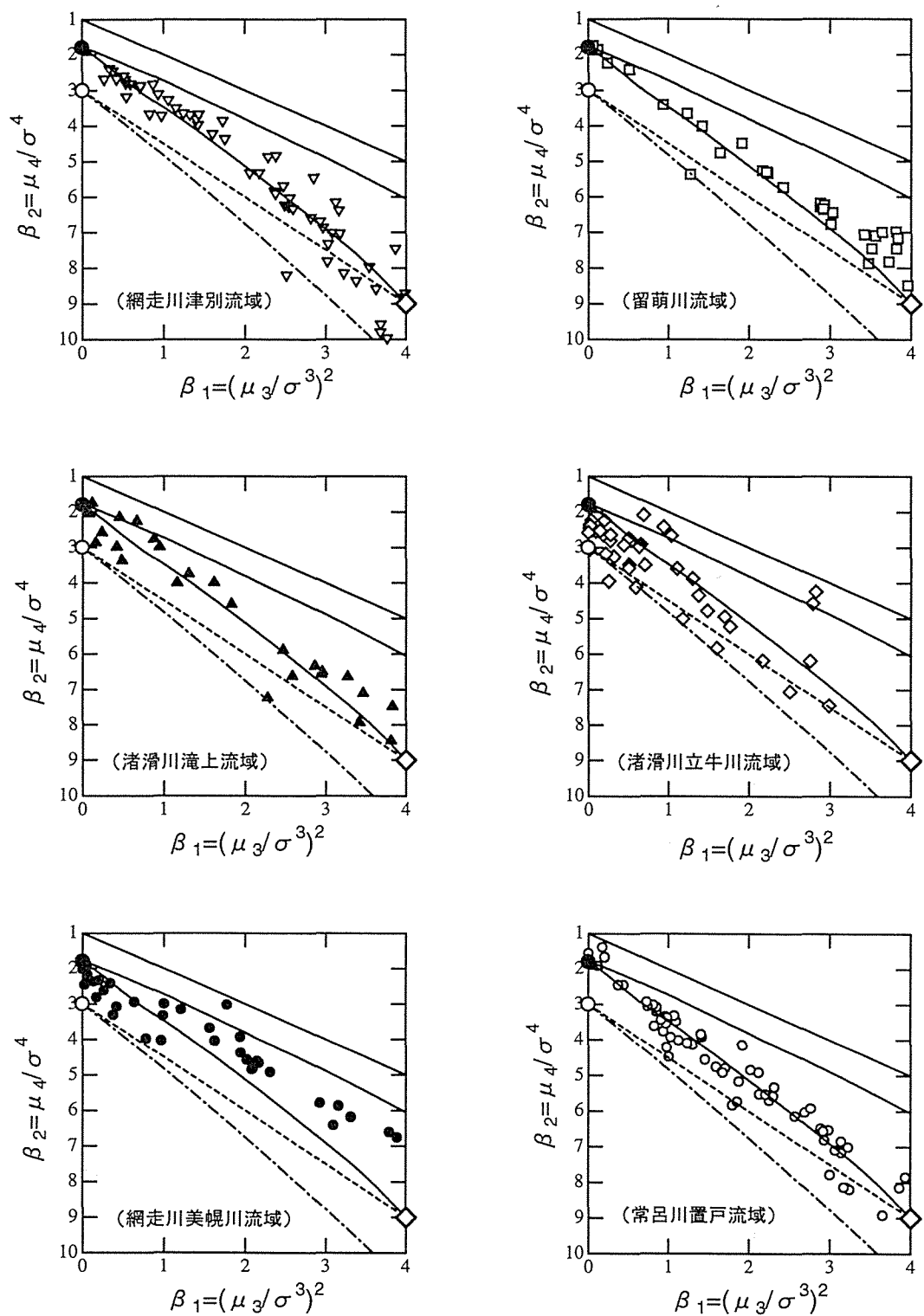


図-2.41 サブ流域の流域面積の3, 4次モーメントの関係

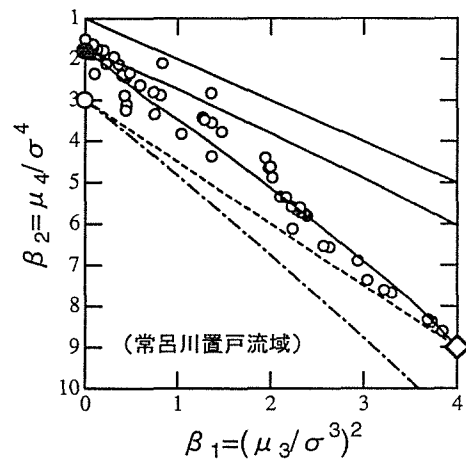
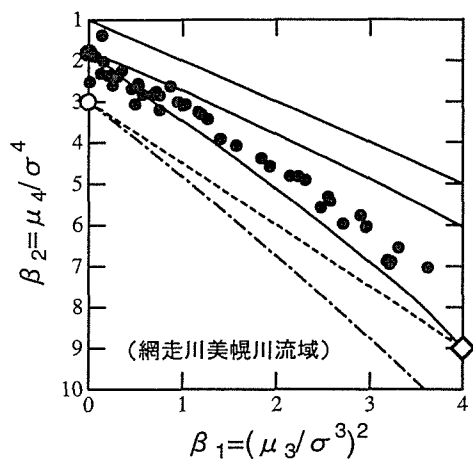
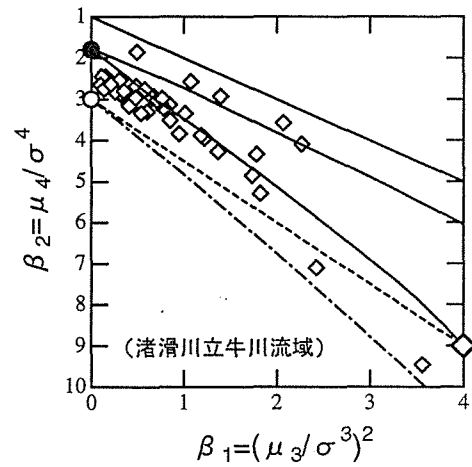
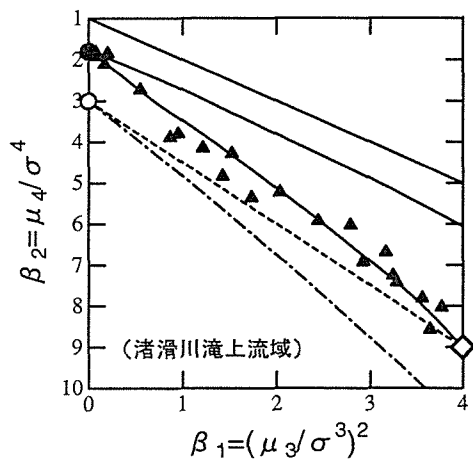
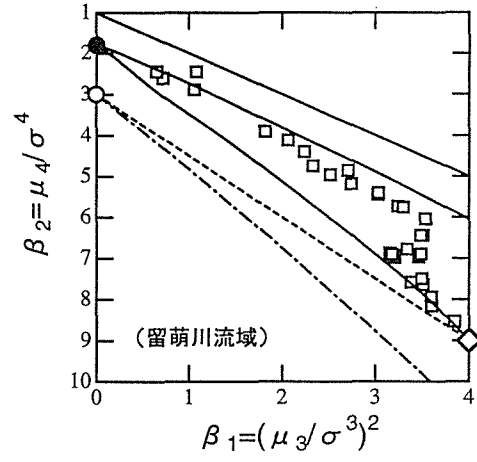
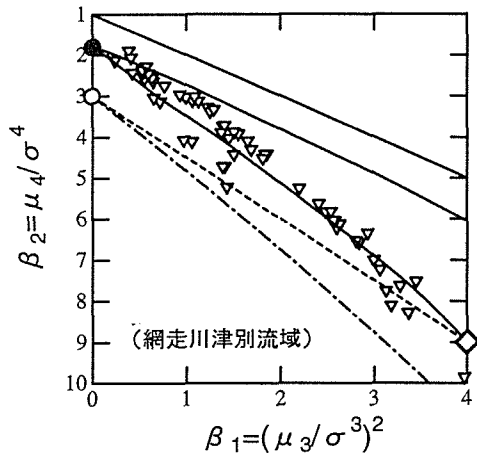


図-2.42 サブ流域のリンク長の3，4次モーメントの関係

[2] マグニチュードに対する地形量の関係

サブ流域の地形量はマグニチュードに応じて変化するので、地形量をマグニチュードの関数で表現することが必要である。流域面積が $At(km^2)$ 、マグニチュードが m である流域を考える。サブ流域の総数は $2m-1$ であるので、サブ流域の流域面積 $A_i(m)$ の平均値 $\bar{A}(m)$ は直ちに

$$\bar{A}(m) = \frac{At}{2m-1} \dots\dots\dots (2.13)$$

となる。また、リンク長 $L_i(m)$ の平均値 $\bar{L}(m)$ は本流長と流域面積の関係を表す *Hack* の式を用いて、次式が提案されている^{11),47)}。

$$\bar{L}(m) = \frac{1.273A_t^{0.6}}{1 + \bar{M}_m} \dots\dots\dots (2.14)$$

ここで、 \bar{M}_m は本流に合流する支流数の期待値で、次式から計算できる。

$$\begin{aligned} \bar{M}_m &= \sum_{i=1}^{[m/2]} P(i, m) (\bar{M}_{m-i} + 1), \quad m \geq 4 \dots\dots\dots (2.15) \\ \bar{M}_1 &= 0, \quad \bar{M}_2 = 1, \quad \bar{M}_3 = 2 \end{aligned}$$

次に地形量の分散とマグニチュードの関係を求めてみよう。ある確率変数 X が k 個集まった総和を Y とおく。

$$Y = \sum_{i=1}^k X_i \dots\dots\dots (2.16)$$

X の平均値 \bar{X} 、分散 σ_X^2 を各々

$$\bar{X} = E[X_i] \left(= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_i \right) \dots\dots\dots (2.17)$$

$$\sigma_X^2 = E[X_i^2] - \bar{X}^2 \dots\dots\dots (2.18)$$

とすると、 Y の平均値 \bar{Y} と分散 σ_Y^2 は、

$$\bar{Y} = k \bar{X} \dots\dots\dots (2.19)$$

$$\begin{aligned} \sigma_Y^2 &= E[Y^2] - \bar{Y}^2 = E \left[\left(\sum_{i=1}^k X_i \right)^2 \right] - k^2 \bar{X}^2 \\ &= \sum_{i=1}^k E[X_i^2] + \sum_{i \neq j}^k \sum_{j=1}^k E[X_i X_j] - k^2 \bar{X}^2 \dots\dots\dots (2.20) \end{aligned}$$

となる。ここで X の相関係数を γ_{ij} とおくと、

$$\gamma_{ij} = \frac{E[X_i X_j] - \bar{X}^2}{\sigma_X^2} \dots\dots\dots (2.21)$$

となり、この関係を用いると Y の分散は、

$$\begin{aligned}\sigma_Y^2 &= k (\sigma_X^2 + \bar{X}) + \sum_{j \neq i}^k \sum_{i \neq j}^k (\sigma_X^2 \gamma_{ij} + \bar{X}^2) - k^2 \bar{X}^2 \\ &= \sigma_X^2 \left(k + \sum_{i \neq j}^k \sum_{j \neq i}^k \gamma_{ij} \right) \dots\dots\dots (2.22)\end{aligned}$$

となる。今、相関係数 γ_{ij} が i, j によらず一定値 γ をとるものと仮定すると、 Y の分散は次式になる。

$$\sigma_Y^2 = k \sigma_X^2 \{1 + (k-1)\gamma\} \dots\dots\dots (2.23)$$

ここで、マグニチュードが m の時の流域地形量の分散を $\sigma_Y^2(m)$ 、 m_1 の分散を $\sigma_Y^2(m_1)$ とすると、上式の k を

$$k = \frac{2m-1}{2m_1-1}, \quad m > m_1 \dots\dots\dots (2.24)$$

とおくことによって、分散の関係式は次式となる。

$$\sigma_Y^2(m_1) = \left(\frac{2m-1}{2m_1-1} \right) \sigma_Y^2(m) \left\{ 1 + \left(\frac{2m-1}{2m_1-1} - 1 \right) \gamma \right\}, \quad m > m_1 \dots\dots\dots (2.25)$$

即ち、上式はマグニチュード m の時の地形量の分散が $\sigma_Y^2(m)$ が既知であるときに、任意のマグニチュード m_1 の分散 $\sigma_Y^2(m_1)$ を与える関係式である。この関係式を実際を利用するときには、マグニチュードが小さい場合 m_1 の方が地形量計測等が容易であるので、以下のようにマグニチュードが大きい場合 m の分散を求めのに実用的である³⁸⁾。

$$\sigma_Y^2(m) = \left(\frac{2m_1-1}{2m-1} \right) \sigma_Y^2(m_1) / \left\{ 1 + \left(\frac{2m_1-1}{2m-1} - 1 \right) \gamma \right\} \dots\dots\dots (2.26)$$

ただし、上式中の相関係数 γ は、実際に計測した分散から推定するしかない。

図-2.43 と図-2.44 はサブ流域の流域面積とリンク長の 1 ～ 4 次モーメントとマグニチュードの関係を図示している。図中の分散の理論式は、最小二乗法から得られた γ の最適値を用いている。この γ の値は表-2.6 に示されているように流域によって変動していることが分かる。即ち、流域地形量の分散とは、その流域の個性を表しているので、 γ の値も当然流域によって変わることになる。

しかし、この γ の平均的な値は、流域面積が $\gamma_A=0.7$ 程度、リンク長が $\gamma_L=0.0$ 程度となる。リンク長の $\gamma_L=0.0$ と言うのは、サブ流域のリンク長同士の相関がほとんどないことを意味している。一方、サブ流域面積は、サブ流域面積の総和（全流域面積）が不変であるので、サブ流域同士の相関は無視できない。

以上のようにサブ流域の流域面積とリンク長の平均値・分散がマグニチュードの関数で表現できたので、式 (2.12) から 3 次、4 次モーメントとマグニチュードの関係を求めることができる。図-2.43 と図-2.44 にこの方法で誘導した理論式がプロットされている。何れの流域でも実測値をかなり良く表現していることが分かる。

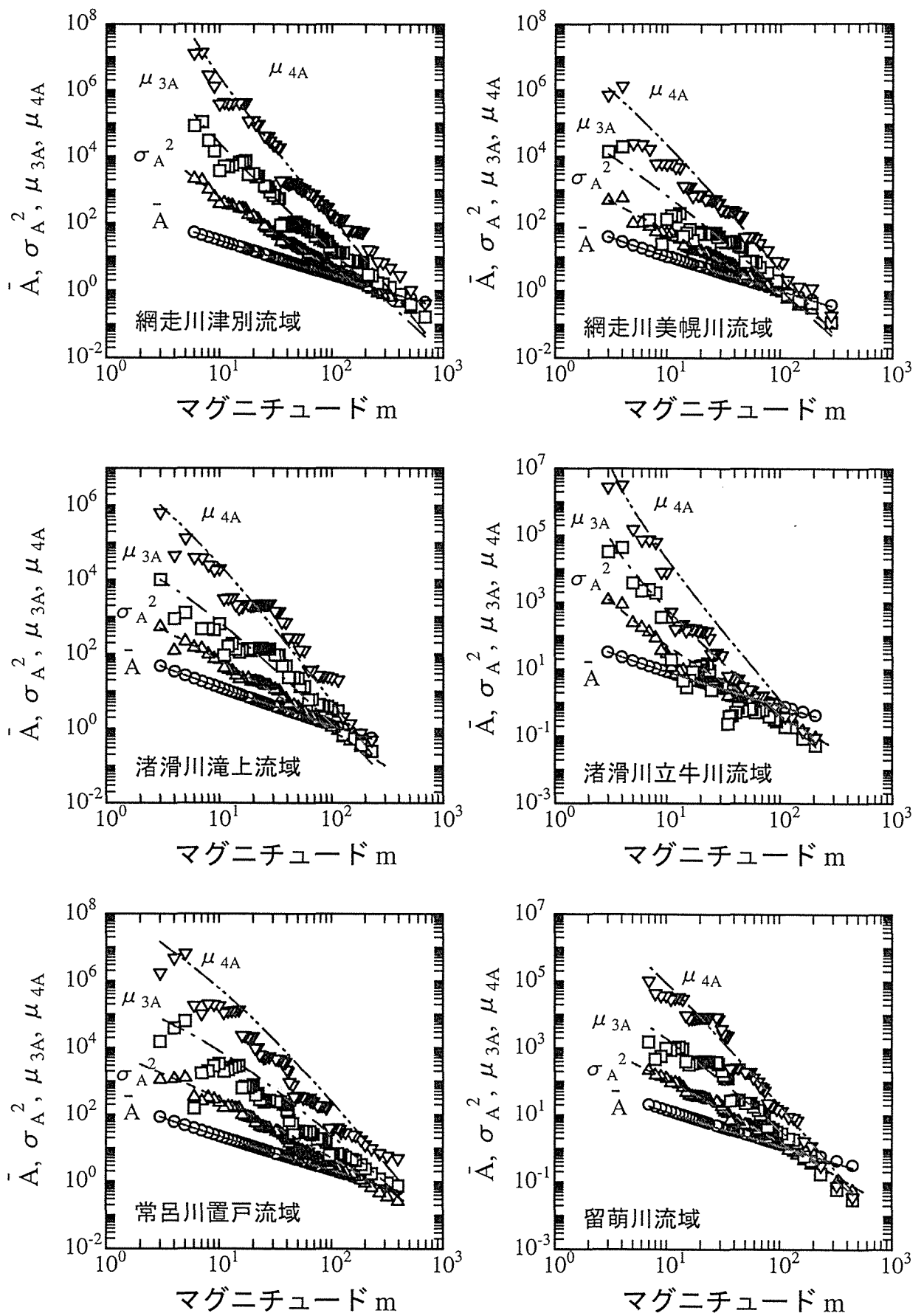


図-2.43 サブ流域の流域面積の統計量とマグニチュードの関係

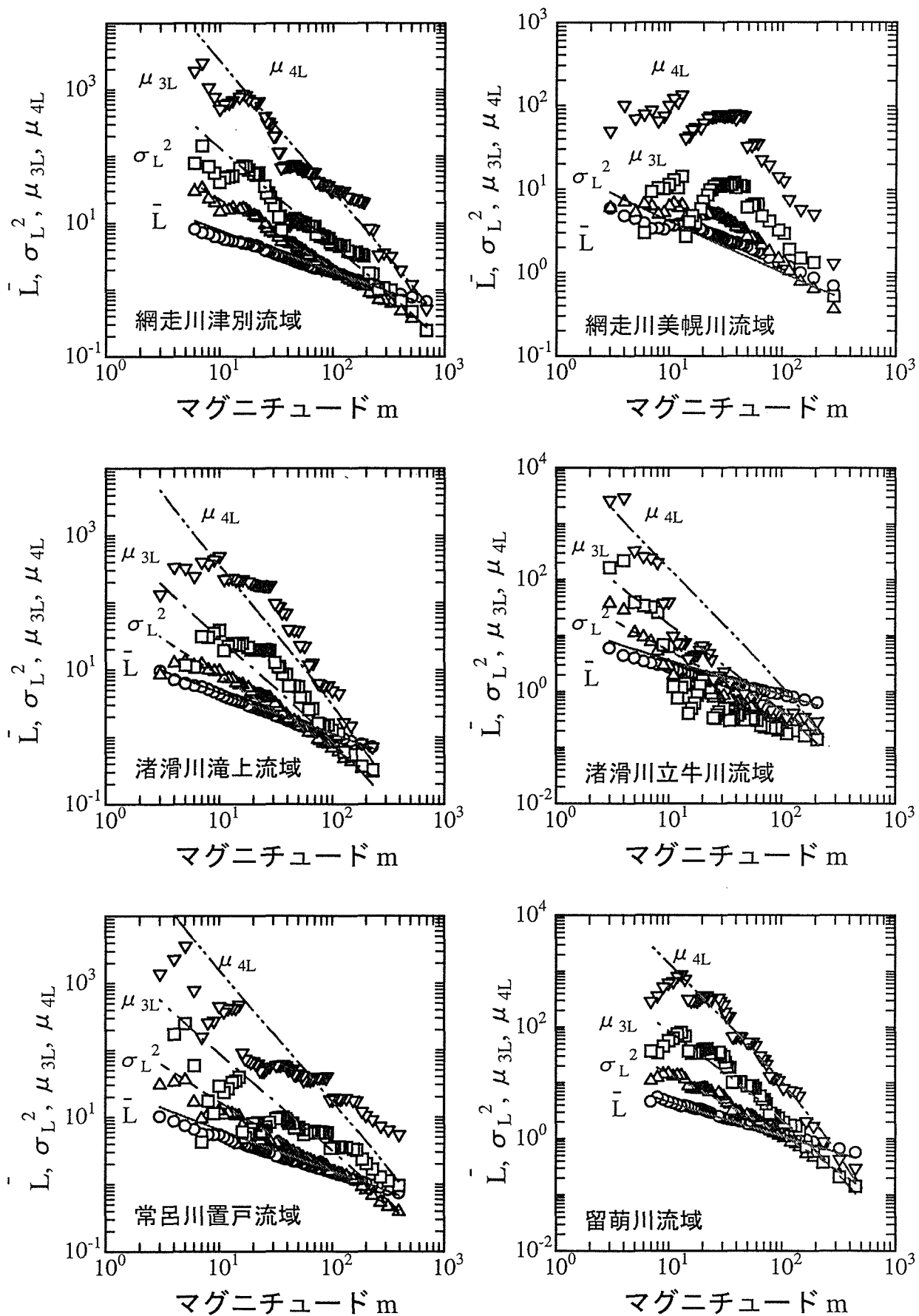


図-2.44 サブ流域のリンク長の統計量とマグニチュードの関係

表-2.6 式(2.26)の相関係数 γ

流域名	相関係数 γ_A	相関係数 γ_L
網走川美幌川流域	0.397($m_1=3, \sigma_A^2=478$)	特定できず
網走川津別流域	1.437($m_1=6, \sigma_A^2=2106$)	0.0001($m_1=7, \sigma_L^2=32.9$)
渚滑川滝上流域	0.468($m_1=5, \sigma_A^2=213.5$)	0.01($m_1=7, \sigma_L^2=12.0$)
渚滑川立牛川流域	1.259($m_1=6, \sigma_A^2=73.2$)	0.01($m_1=6, \sigma_L^2=9.4$)
常呂川置戸流域	0.264($m_1=4, \sigma_A^2=1174$)	0.001($m_1=6, \sigma_L^2=35.6$)
留萌川流域	0.554($m_1=7, \sigma_A^2=215.2$)	0.02($m_1=10, \sigma_L^2=14.5$)
平均	0.72	0.01

2.4.2 サブ流域から流域末端までの流路長

河道網による集水過程を考える上で、河道網末端から各サブ流域までの流路長が必要になる。リンク-マグニチュード方式の河道網理論では、各リンクを基本単位と考えているので、各サブ流域までの流路長はこのサブ流域から出口まで通過する各リンク長の和である。したがって、ここでは i 番目のサブ流域までのリンク長の和の確率分布を考える³⁸⁾。

前節で、リンク長の分散の推定式の相関係数 γ_L がほぼ0であるであったので、リンク長は互いに独立な確率分布と考えられる。室田・江藤ら⁵⁴⁾は互いに独立なガンマ分布の和の分布がガンマ分布で近似できることを示しているので、河道網末端から j 個のリンクを遡った河道長 R_j の確率密度関数 $f_j(R_j)$ は以下のようになる。

$$f_j(R_j) = \frac{\lambda_{R_j}^{\kappa_{R_j}} R_j^{\kappa_{R_j}-1}}{\Gamma(\kappa_{R_j})} e^{-\lambda_{R_j} R_j} \dots\dots\dots (2.27)$$

ここで、流路長の縮尺パラメータ λ_{R_j} と形状パラメータ κ_{R_j} は、サブ流域のリンク長 L_i の縮尺パラメータ λ_L と形状パラメータ κ_L と以下の関係がある。

$$\kappa_{R_j} = j \kappa_L, \quad \lambda_{R_j} = \lambda_L \dots\dots\dots (2.28)$$

したがって、河道長 R_i の確率密度関数 $F_R(R)$ は、式(2.7)の $G(m, j)$ と式(2.27)の $f_j(R_j)$ を組み合わせることにより次式となる。

$$F_R(R) = G(m, 1)\delta(R) + \sum_{j=2}^m f_{j-1}(R_{j-1})G(m, j) \dots\dots\dots (2.29)$$

ここに、 $\delta(x)$ はデルタ関数である。 $G(m, j)$ は河道網におけるサブ流域の空間的配置の確率分布を表しているので、各々の河道網パターン毎に $G(m, j)$ は異なることになり、流路長 R_i

の確率密度関数 $F_R(R)$ も河道網パターン毎に異なる。図-2.45 は前出の留萌川と滝上流域の流路長のヒストグラムと式 (2.29) の確率密度関数を比較したものである。両流域とも上式は実流域の流路長のヒストグラムをほぼ表現しているが、マグニチュードが少ない場合に上流域で差が認められる。この原因として流路長は内部リンクから構成されているのに、式 (2.27) の確率密度関数は全リンクの平均リンク長を用いて算出したためである。実際に流域の内部リンク長と外部リンク長を比較すると、両者に差が認められるので、この点を考慮する補正係数を取り入れる必要があるが、第3章の流出量の確率応答の検討では無視している。

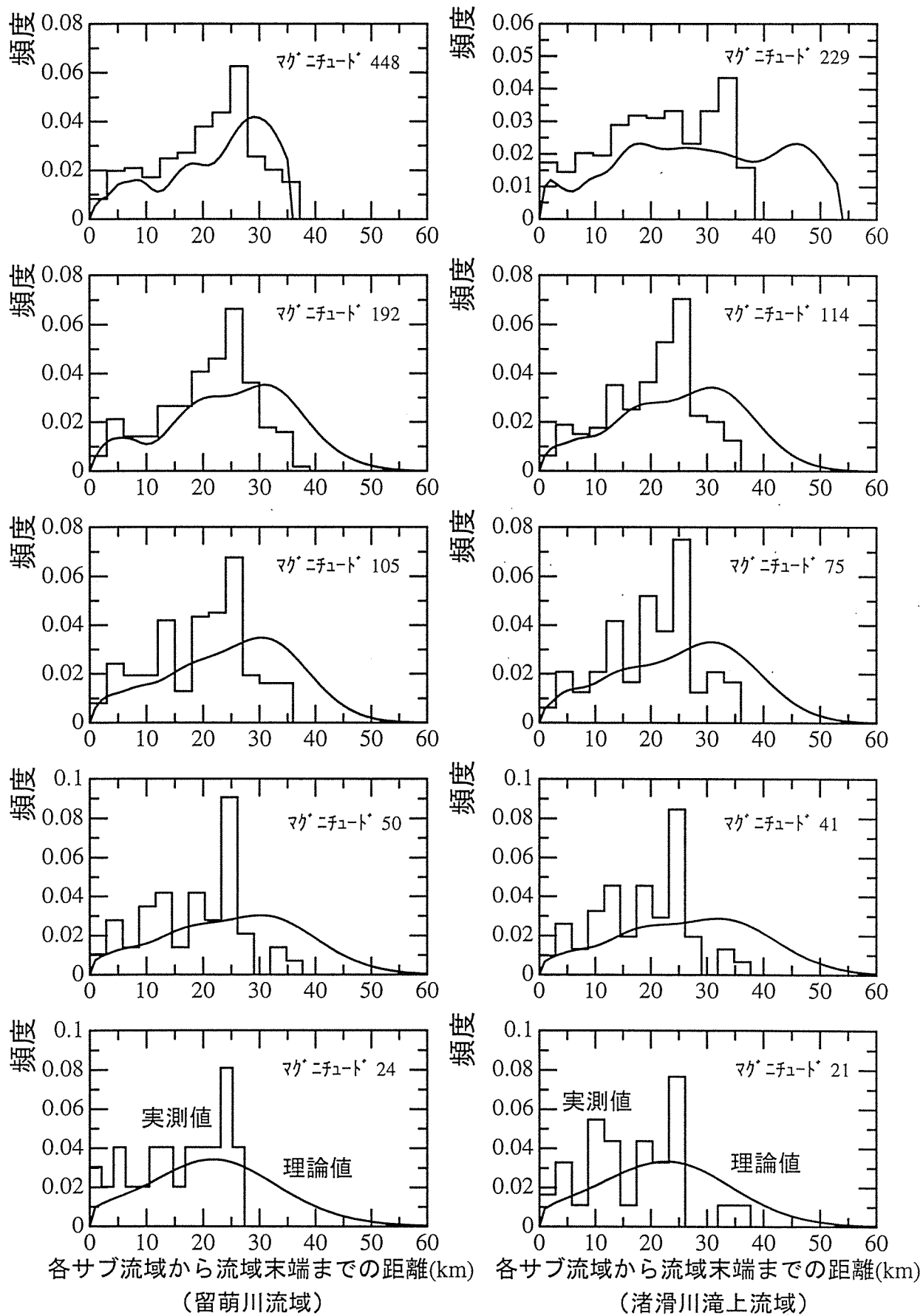


図-2.45 流路長の確率分布

2.4.3 斜面地形量の特性

流域斜面は、降雨を流出量に変換する場であり、流域の降雨流出特性に重要な役割を果たしている。雨水は斜面のいろいろな経路を通して河道に到達するため、様々な流出の形態を生み出している。従来の斜面地形量の解析はほとんどが地形図を手作業により測定しているために、比較的小流域を対象とした解析が多い⁵⁰⁾⁵¹⁾。このように斜面地形量は計測が煩雑であるが故に、実際の流出解析では流域をモデル化して矩形近似した斜面長を用いることが多い。

近年、前述のように数値地形情報を用いた地形量解析が盛んに行われ、立川ら⁵³⁾は擬河道網による流域斜面地形量の解析手法を報告している。本節でも斜面の雨水経路を計測し、その統計的な性質を明らかにすると共に、流域の空間スケールの変化に伴う斜面地形量の変動特性について言及する⁵²⁾。

[1] 斜面地計量の計測方法

斜面地形量は立川ら⁵³⁾と同様に国土数値情報の250mメッシュ標高データを基に作成した擬河道網を解析対象とした。擬河道網は前節で述べた面積閾値によるものと w/l によるものを使用する。

落水線図から河道となるグリッド点が決定されると、それ以外のグリッド点は全て斜面域とみなされる。斜面域のグリッド点から河道へ流入する落水線に沿った長さを、ここでは雨水経路長と定義する。図-2.46に示す様に、この経路長は、グリッド点の面積範囲（図の斜線部分）の代表長さと考えられる。したがって、計測は斜面域の全ての点から河道までの経路長を測定し、河道部分も左右岸に斜面長125mの斜面が付随していると考えて、その代表長さを62.5mとした。なお、流域をモデル化して矩形近似した斜面の長さを、ここでは斜面長と定義する。

一方、斜面勾配は雨水経路の落差を経路長で除して算出する。サブ流域の平均斜面勾配は加重平均勾配 $s = \sum h / \sum l_s$ (h : 落差, l_s : 経路長) を用い、河道部分に付随する斜面の雨水

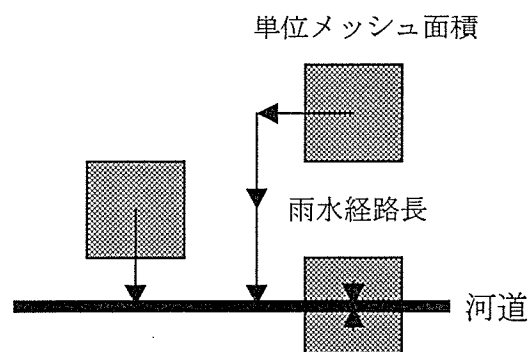


図-2.46 雨水経路長の定義と計測方法

経路勾配は平坦と仮定した。

[2] 雨水経路長の特性

ここでは、2.2.3 節で解析した 6 流域の 2 万 5 千分の 1 地形図の河道網とほぼ等しいマグニチュードを持つ擬河道網の雨水経路長とその勾配の統計的性質を調べる。

図-2.47～図-2.52 は各々 6 流域の雨水経路長のヒストグラム（総リンク、内部リンク、外部リンク別）であり、図中の実線は経路長の平均値からパラメータを推定して描いた指数分布である。雨水経路長の分布形はどの流域も面積閾値、 w/ℓ 閾値共に、指数分布に近い形状を呈している。また、内部リンク、外部リンク別に見ると、内部リンクの方が、0 付近の割合が大きく、より指数分布に近い分布をしている。外部リンクの方は、中央付近の階級値の割合が大きくなる傾向にあるが、 w/ℓ 閾値を用いた場合は、外部リンクもよく指数分布に一致している。

また、閾値の違いによって分布形状はさほど違いが認められない。ただし、 w/ℓ 閾値による擬河道網は集水面積によらない河道であるため、表-2.4 に示したように平均サブ流域河道長は面積閾値と差はないが、面積閾値よりも様々な長さの河道長が発生する可能性が高い。その結果、雨水経路長もヒストグラムに示すように分散が大きく、割合としては少ないが、雨水経路の長いものが存在しているようである。

立川ら⁵³⁾の計測結果でも擬河道網の斜面長は指数分布になることを報告しているが、角屋ら⁵⁰⁾や藤田⁵¹⁾の地形図を計測した斜面長は、ガンマ分布、あるいは対数正規分布になるとの報告がある。それは、地形図による斜面長と、擬河道網による雨水経路長の定義の方法が違うことが影響している。簡単に言うと、流路経路長は各グリッド点から河道までの距離であり、斜面長は流域界から河道までの距離である。

図-2.53 は、流域形状が矩形である場合の斜面長と経路長の関係である。経路長は斜面長と比較すると、河道近傍の点を重複して計っていることになるため、指数分布のように短い距離の割合が多くなっているものと考えられる。したがってこの図から、斜面長の約 8 割の長さが経路長になることが分かる。

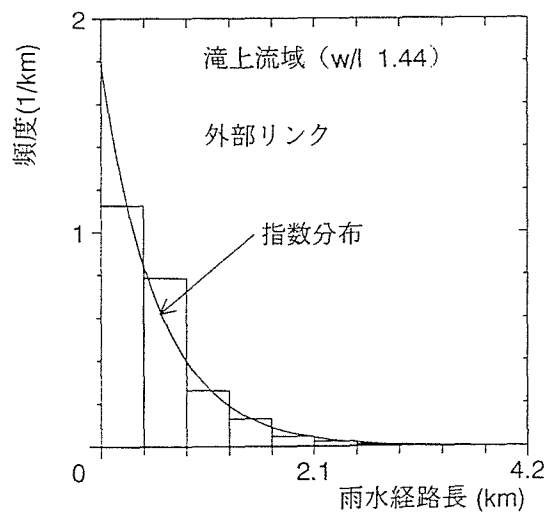
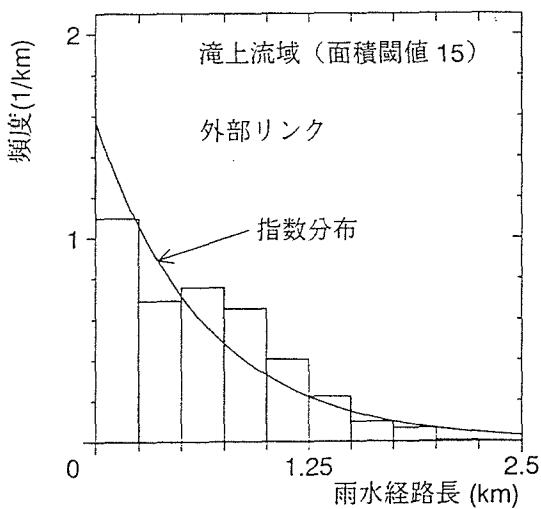
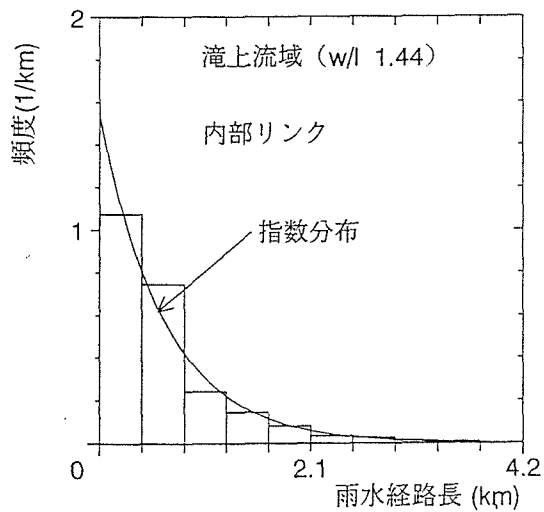
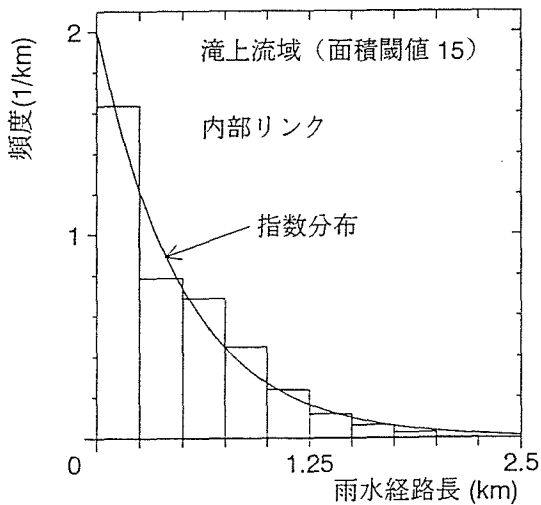
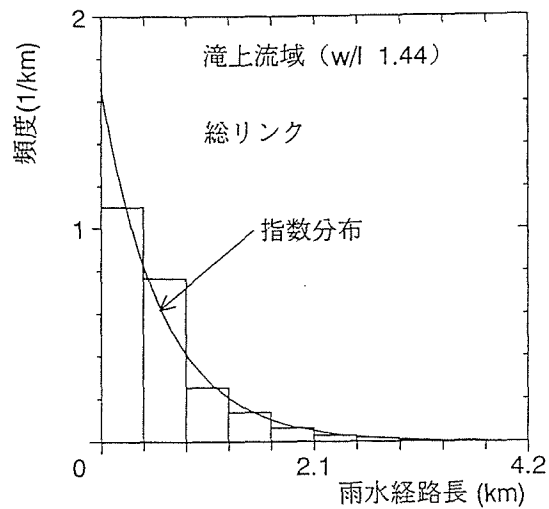
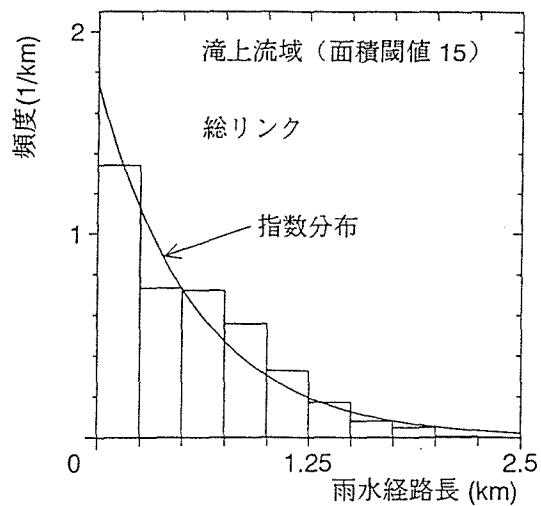


図-2.47 雨水経路長のヒストグラム (渚滑川滝上流域)

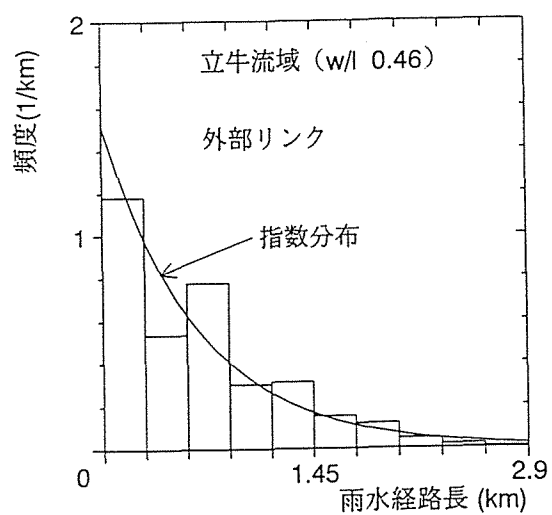
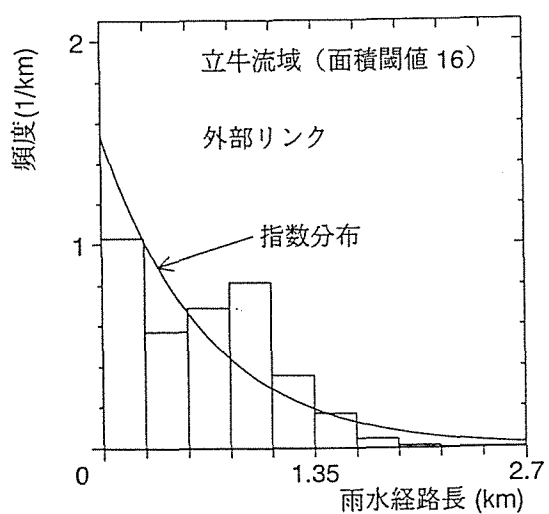
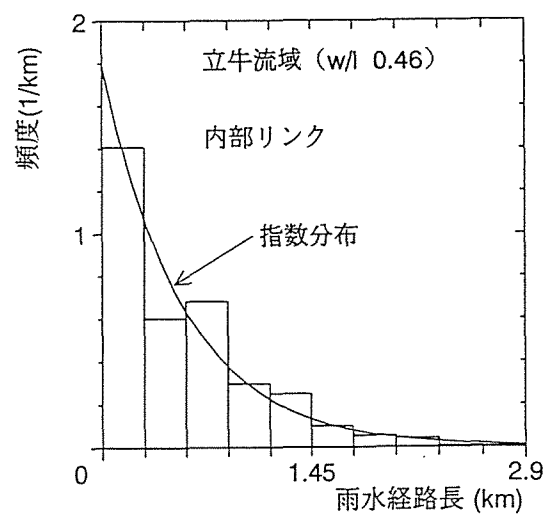
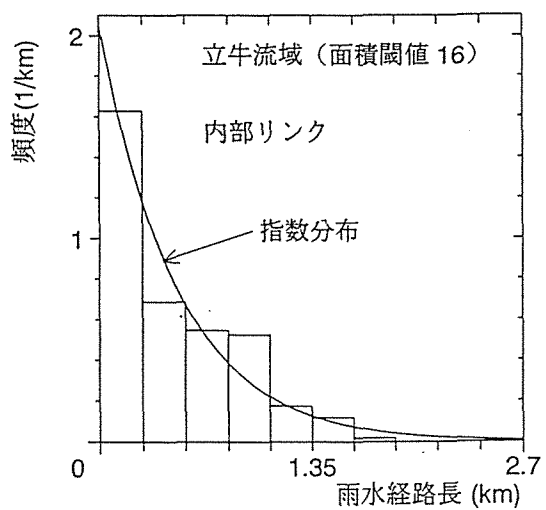
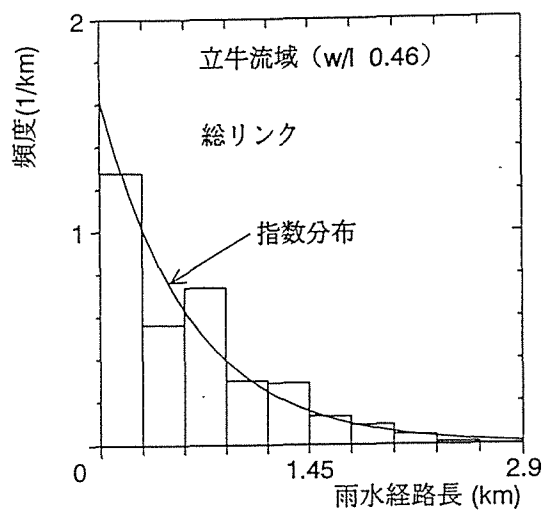
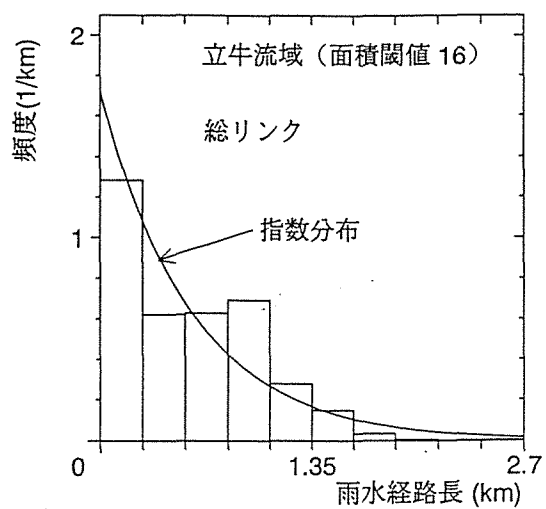


図-2.48 雨水経路長のヒストグラム (渚滑川立牛川流域)

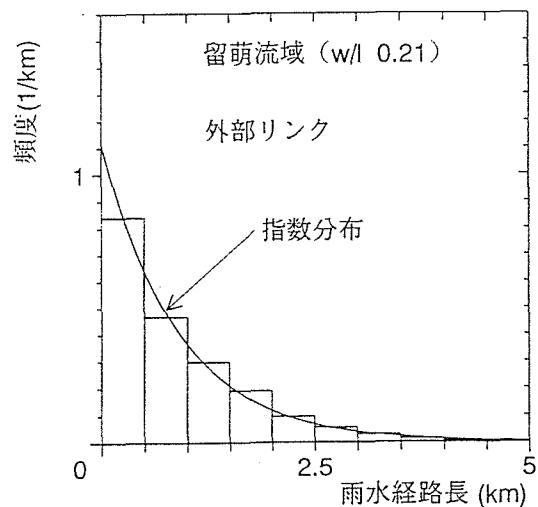
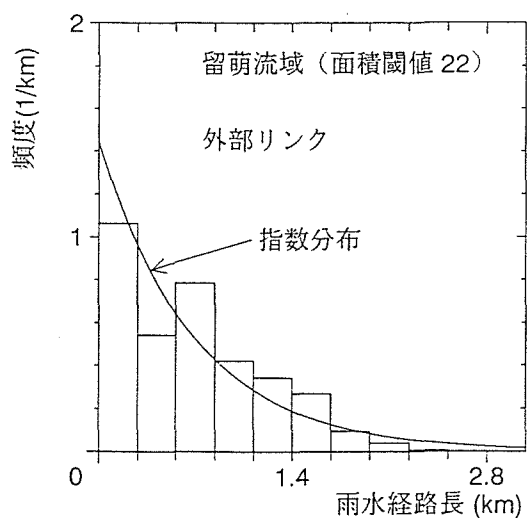
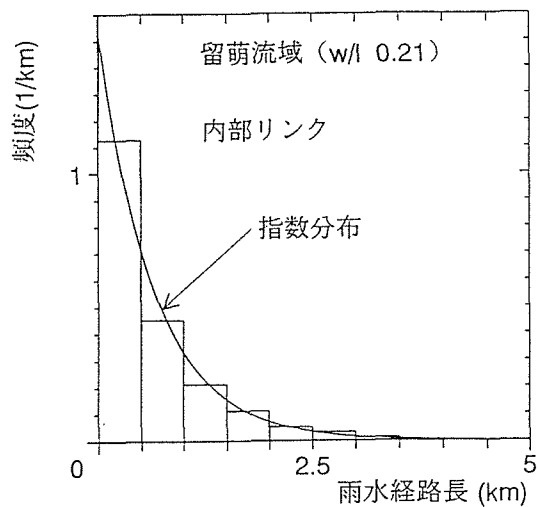
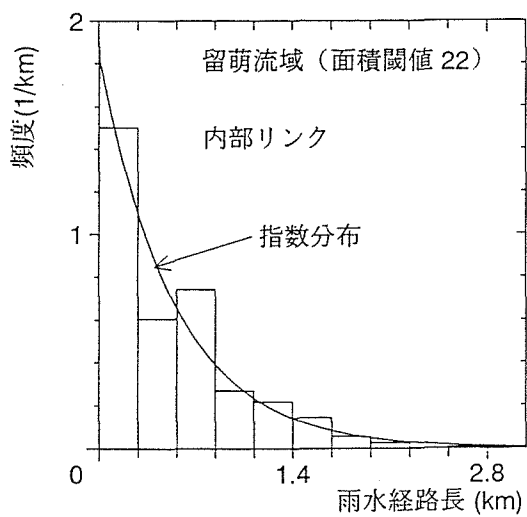
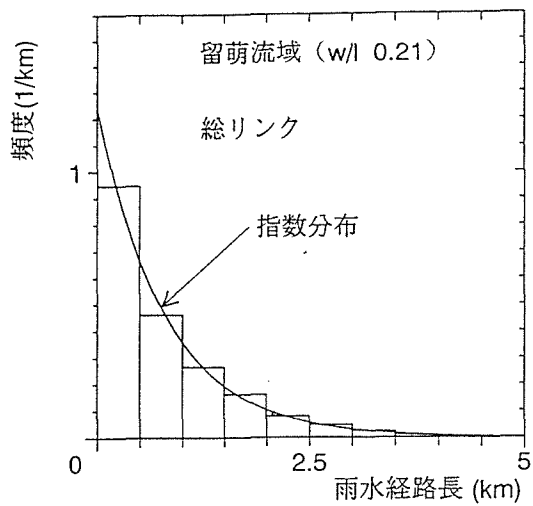
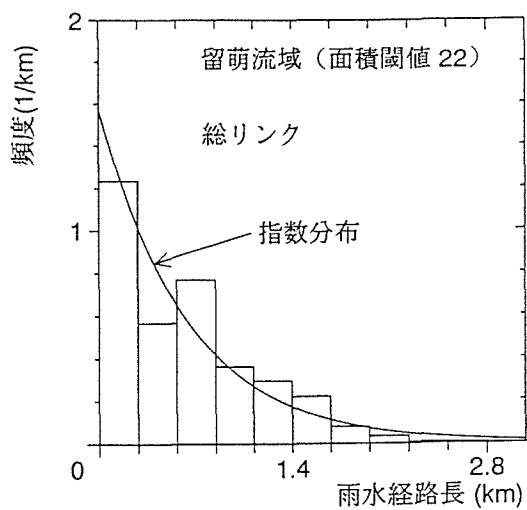


図-2.49 雨水経路長のヒストグラム (留萌川流域)

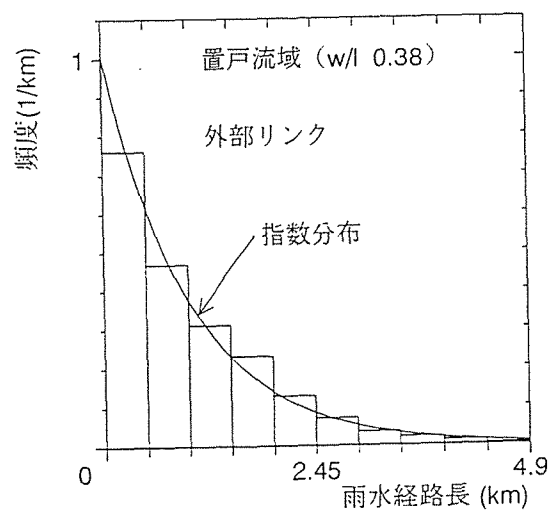
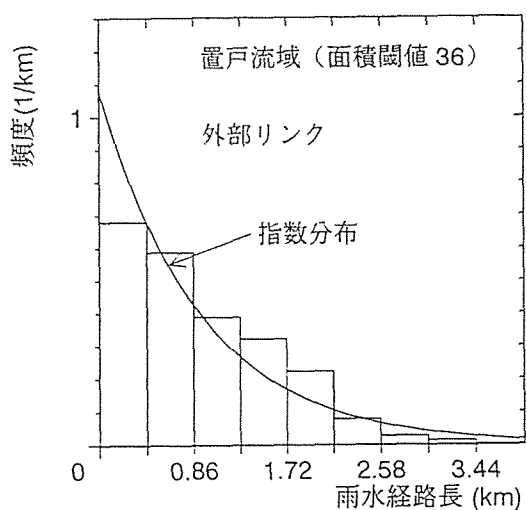
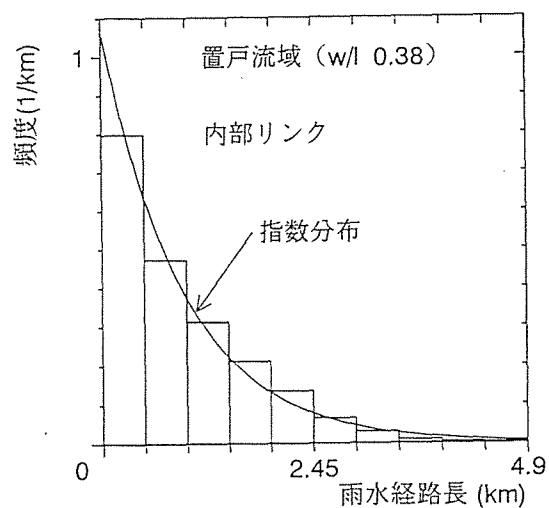
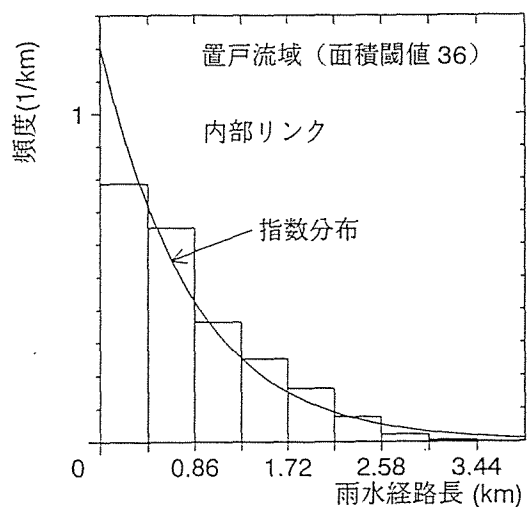
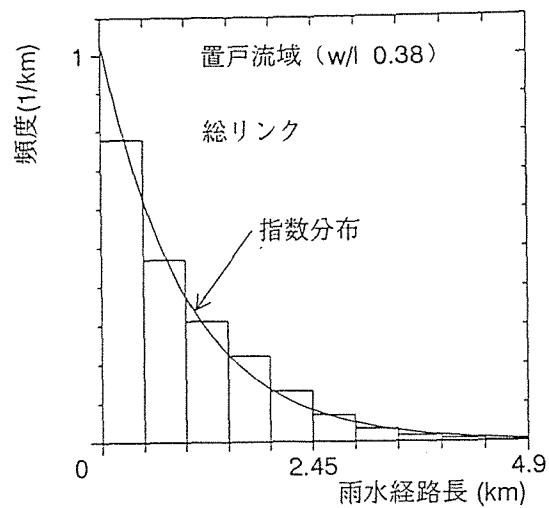
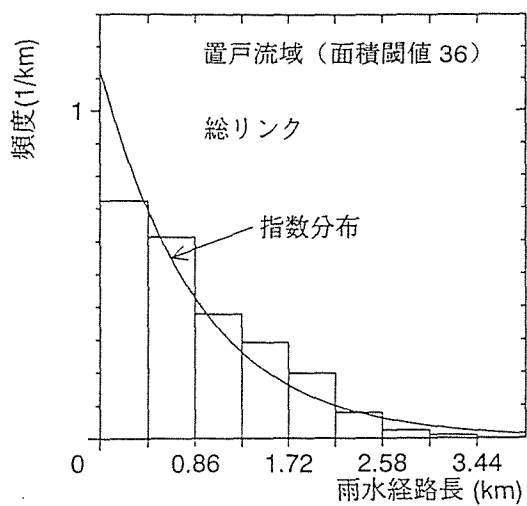


図-2.50 雨水経路長のヒストグラム (常呂川置戸流域)

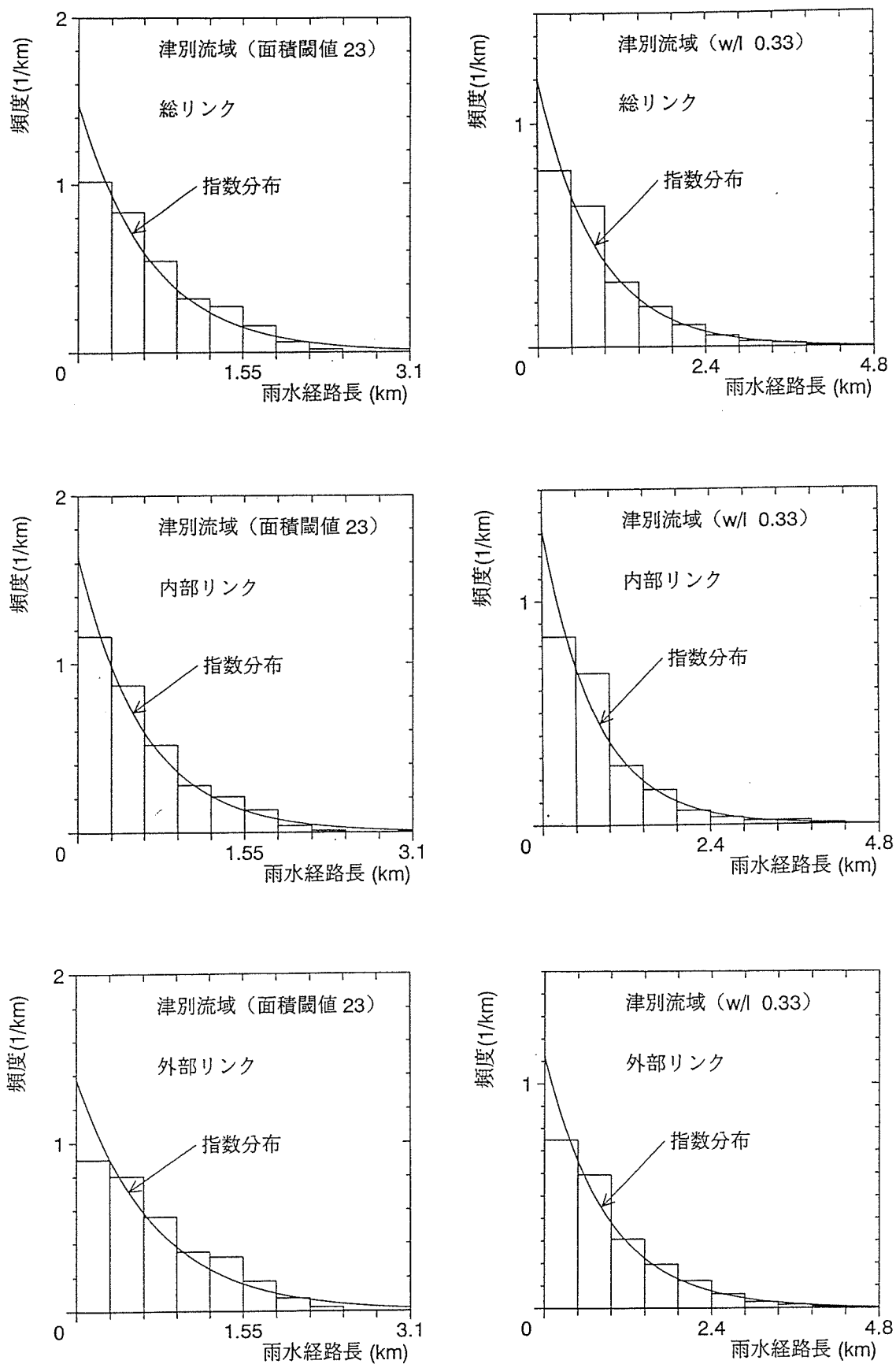


図-2.51 雨水経路長のヒストグラム (網走川津別流域)

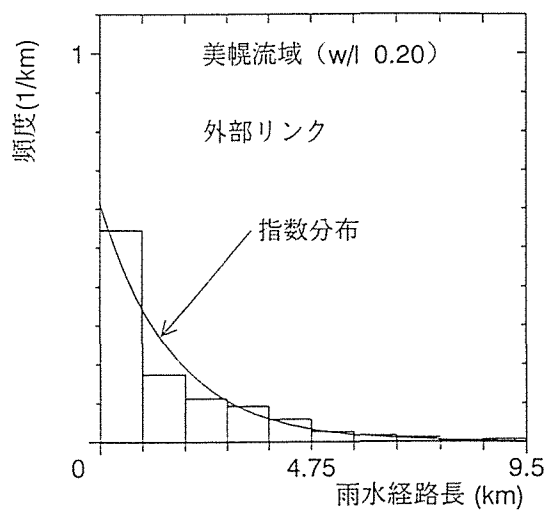
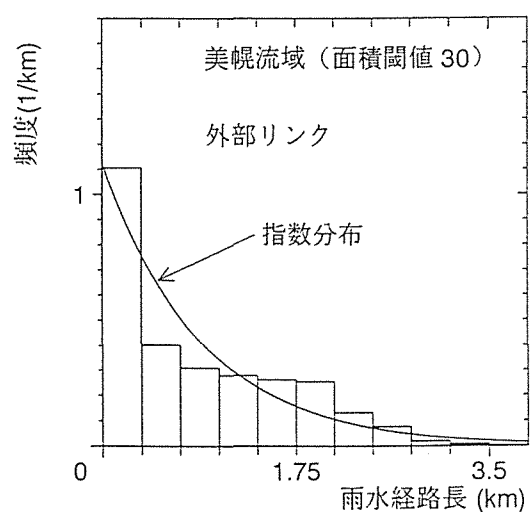
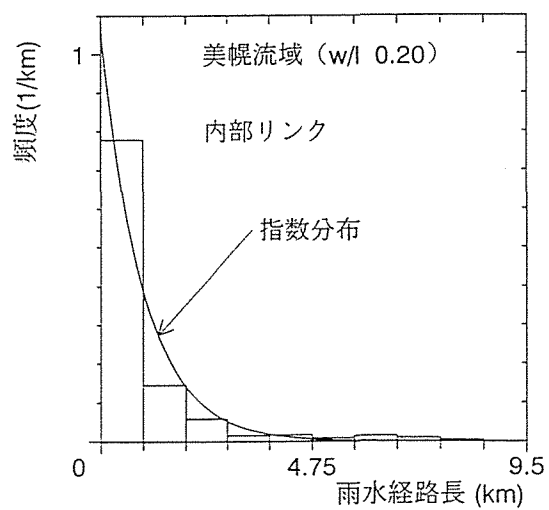
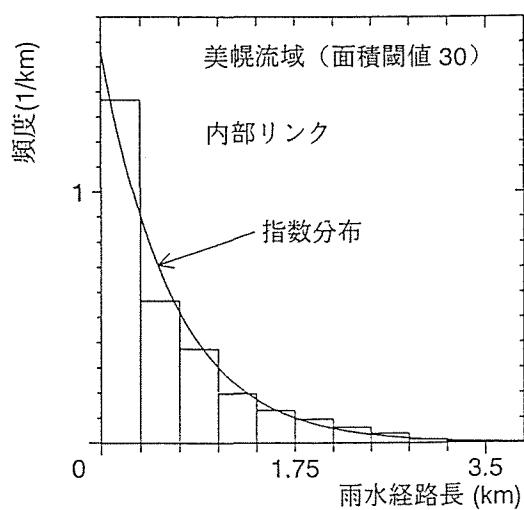
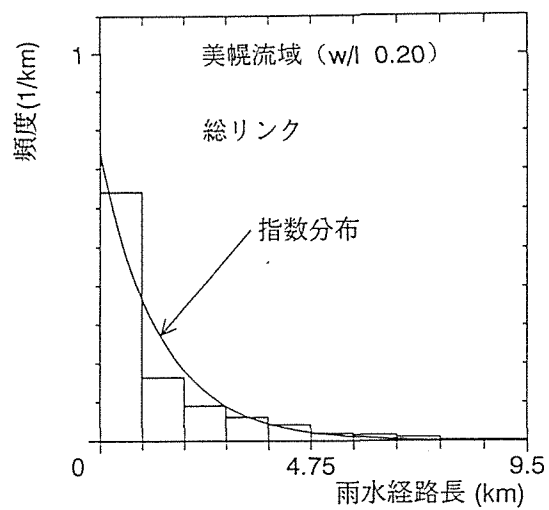
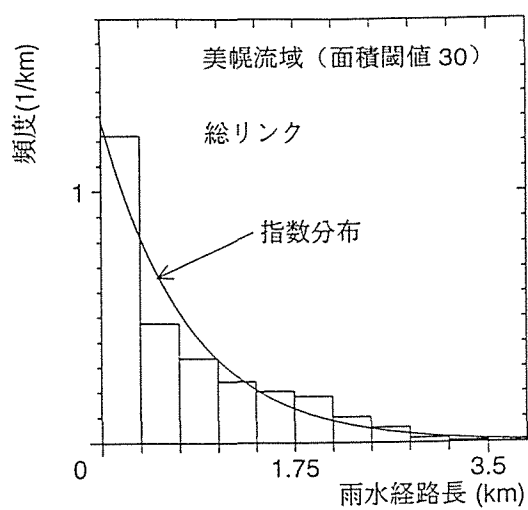


図-2.52 雨水経路長のヒストグラム (網走川美幌川流域)

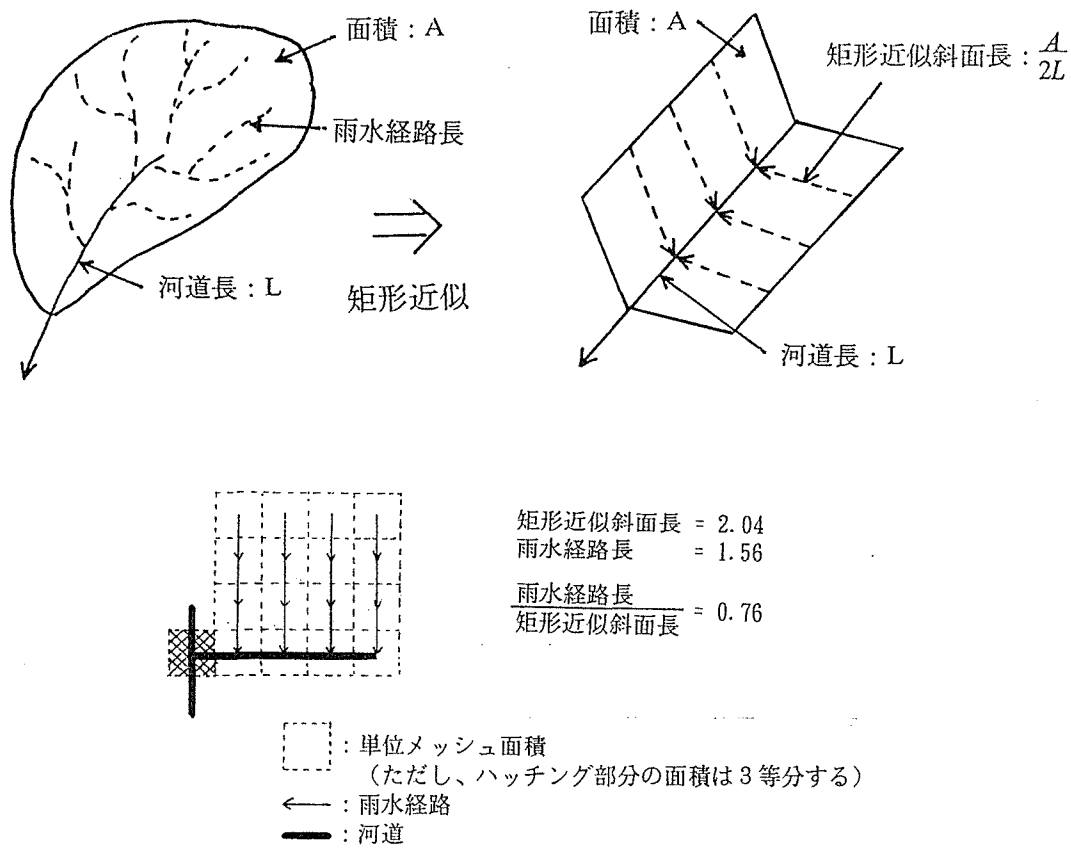


図-2.53 矩形近似斜面長と雨水経路長の関係

[3] 雨水経路勾配の特性

経路勾配の分布形は図-2.54～図-2.59 に示すように対数正規分布やガンマ分布の様に左に歪んだ分布形をしている。図中の実線は経路勾配の平均値と分散からパラメータを推定して描いた対数正規分布であるが、ヒストグラムは対数正規分布によく一致していることが分かる。内部リンク、外部リンク共に対数正規分布に近い形状をしているが、外部リンクの方がより対数正規分布に近い分布をしている。

また、美幌、留萌、滝上流域は内部リンクが指数分布のように一様に減少する分布形を示し、他の流域よりも0付近の割合が多い。これは、図-2.60 に示した斜面勾配とヒストグラムの関係から、河道付近の斜面勾配が緩いことを示唆している。

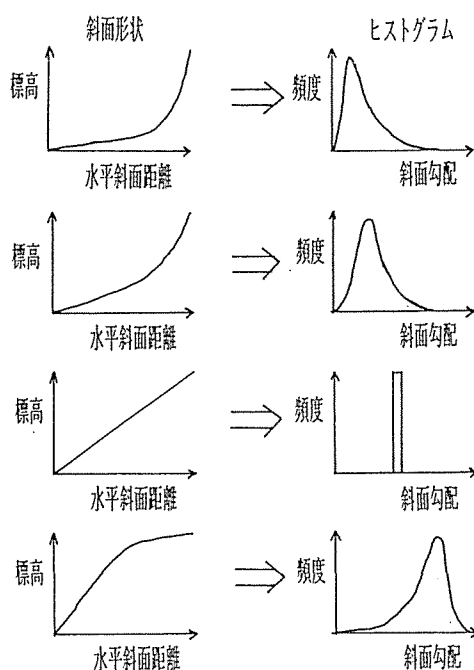


図-2.60 斜面勾配とそのヒストグラムの関係

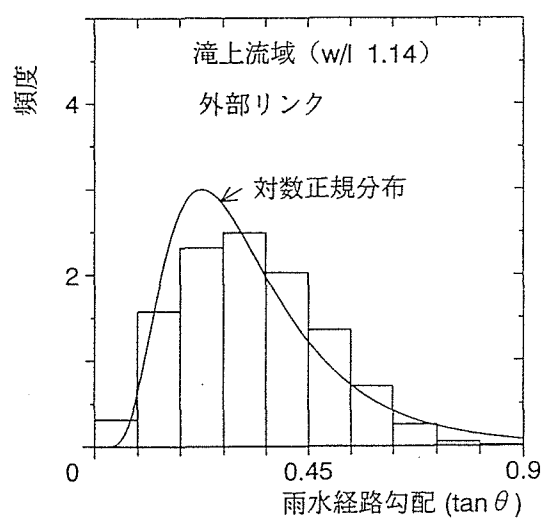
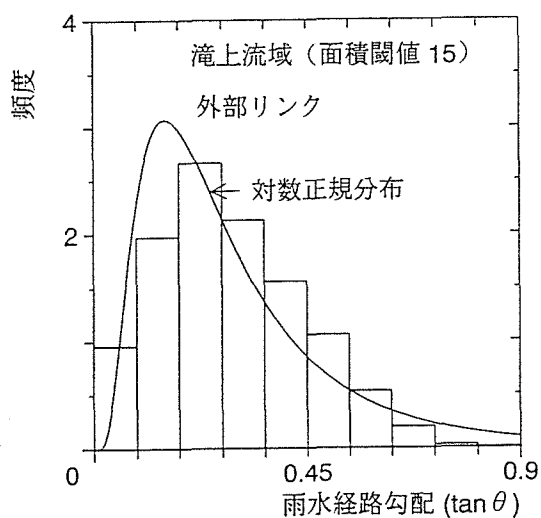
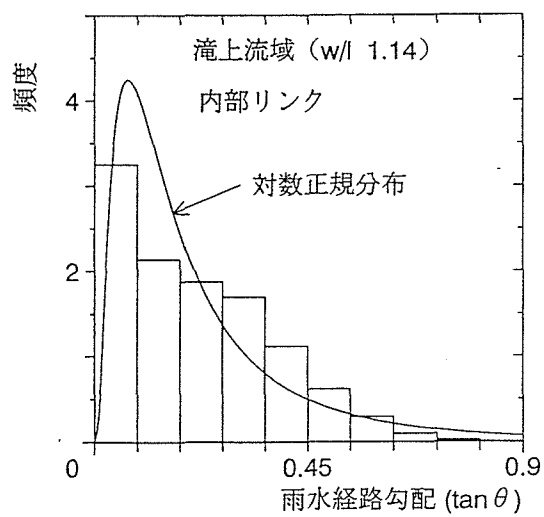
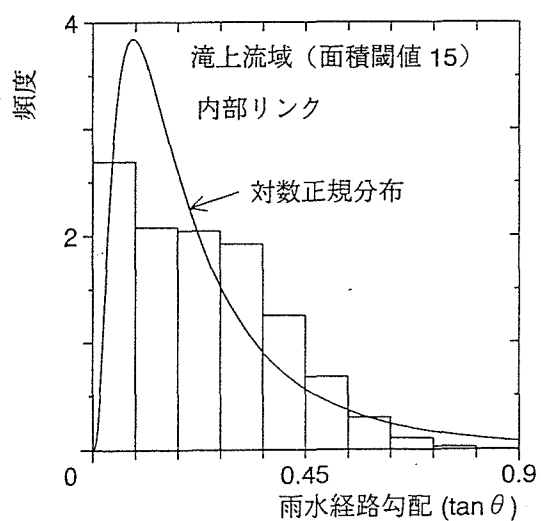
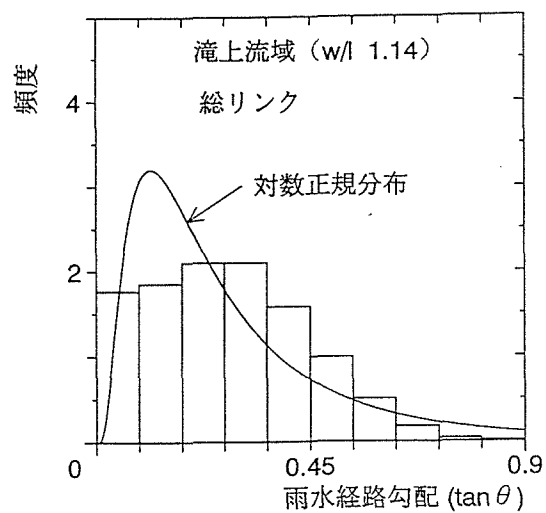
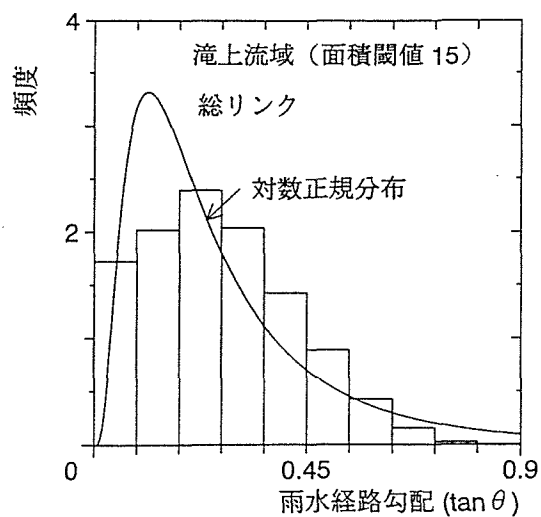


図-2.54 雨水経路勾配のヒストグラム (渚滑川滝上流域)

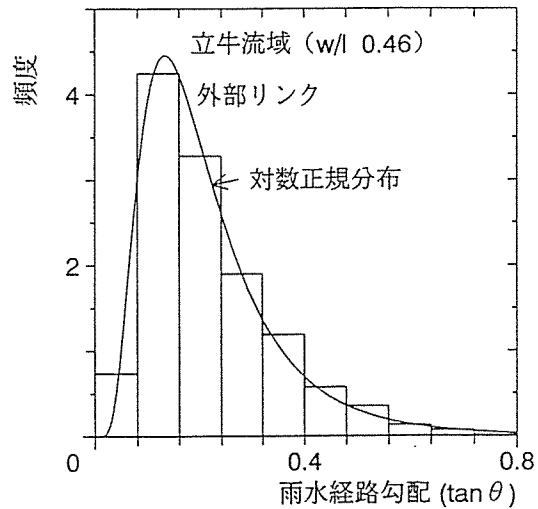
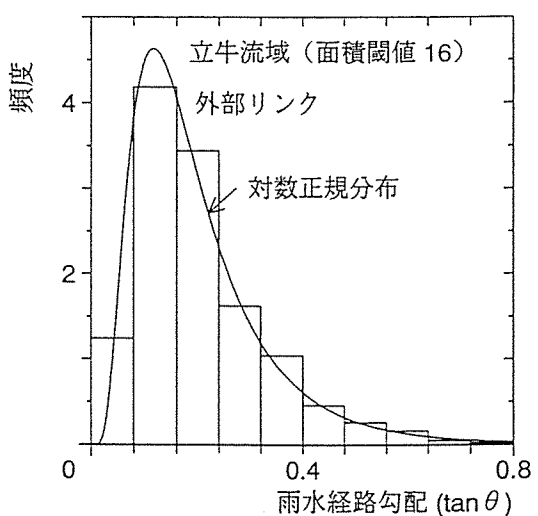
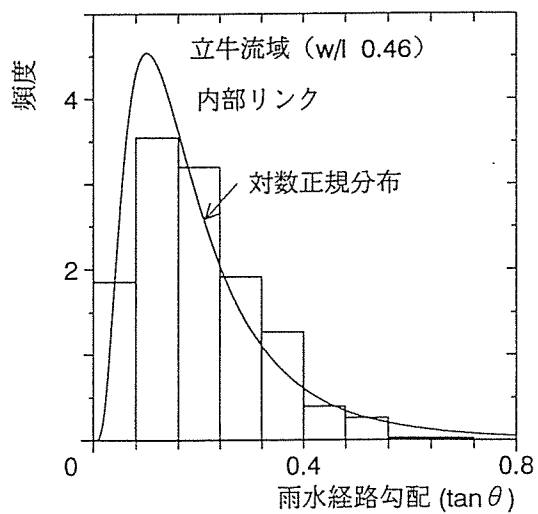
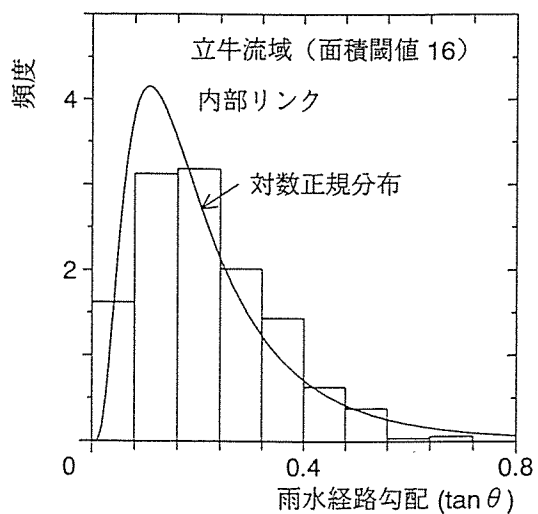
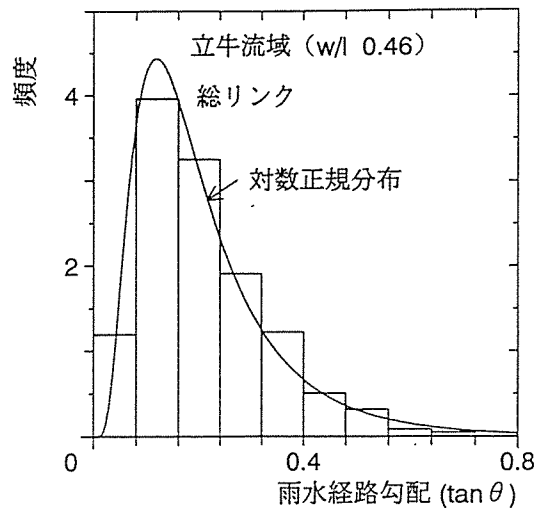
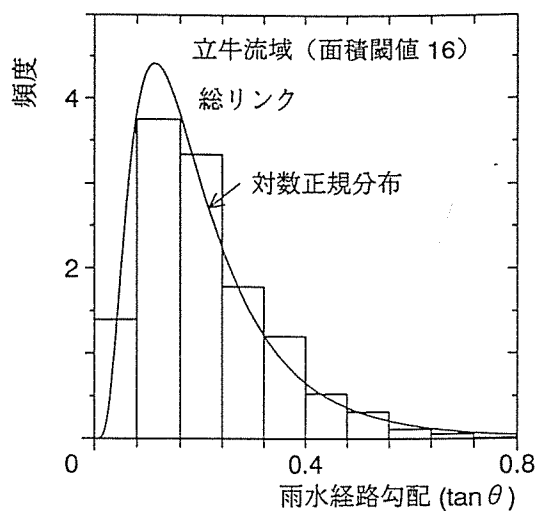


図-2.55 雨水経路勾配のヒストグラム (渚滑川立牛川流域)

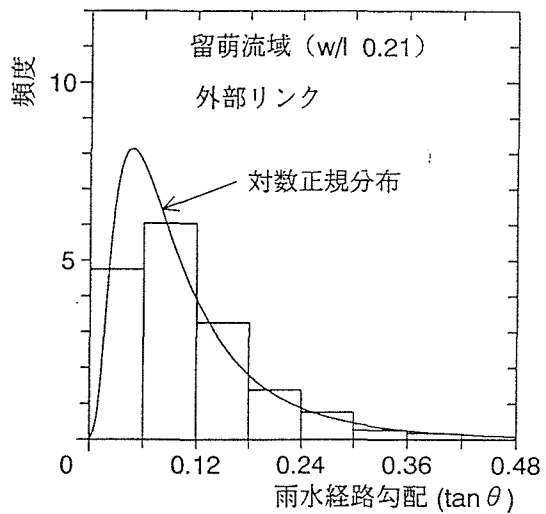
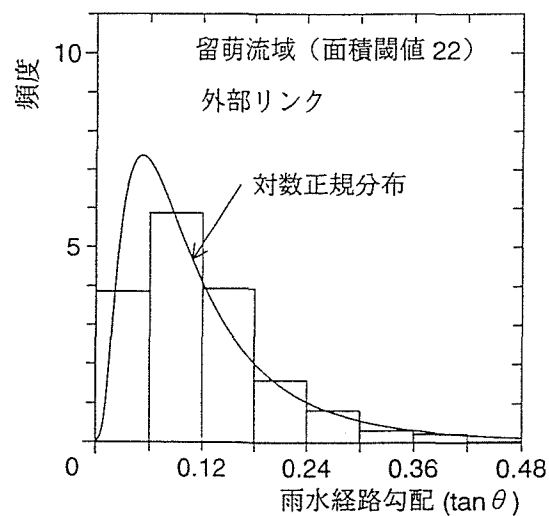
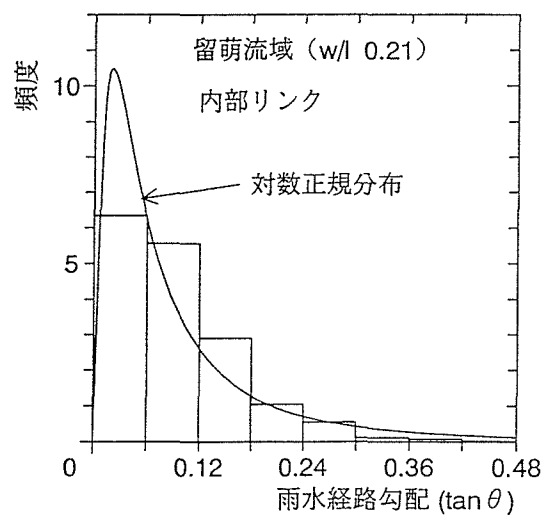
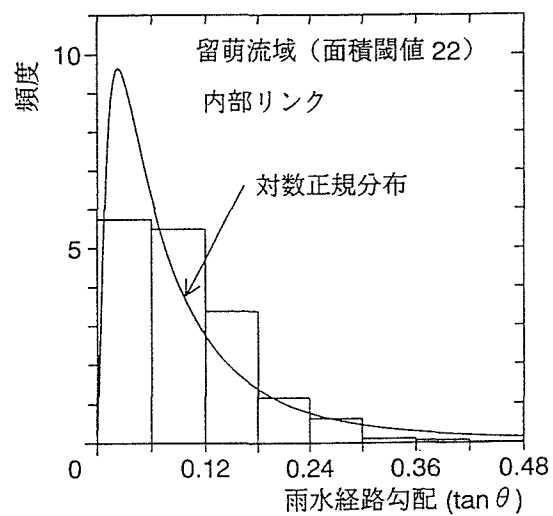
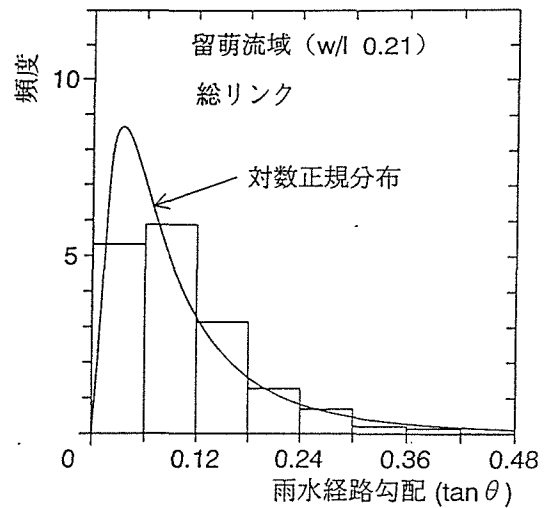
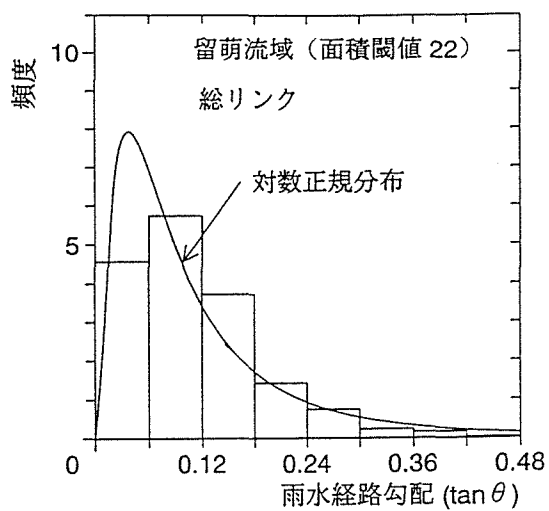


図-2.56 雨水経路勾配のヒストグラム (留萌川流域)

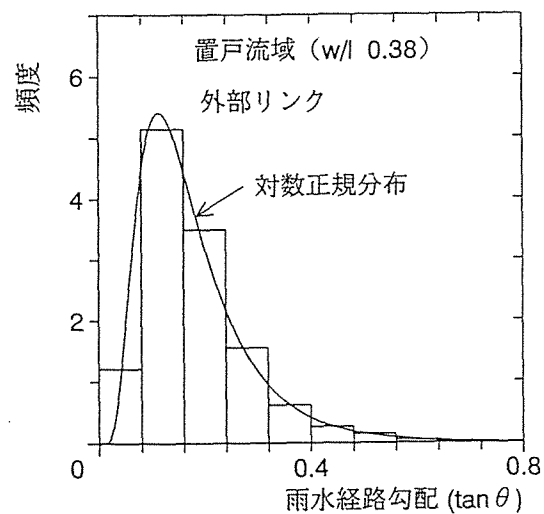
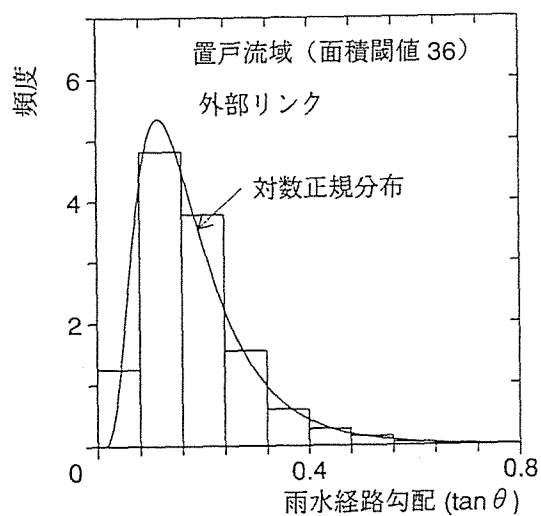
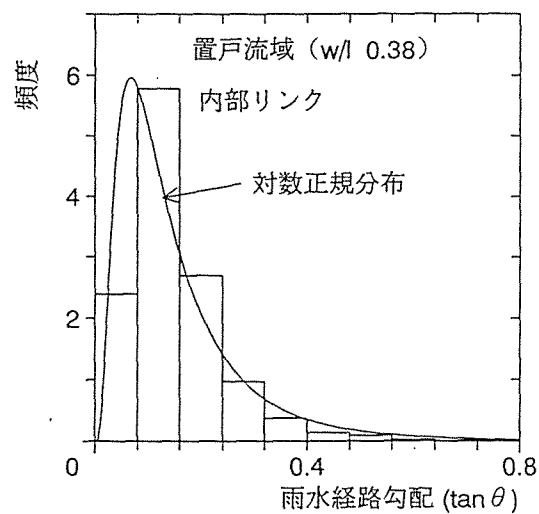
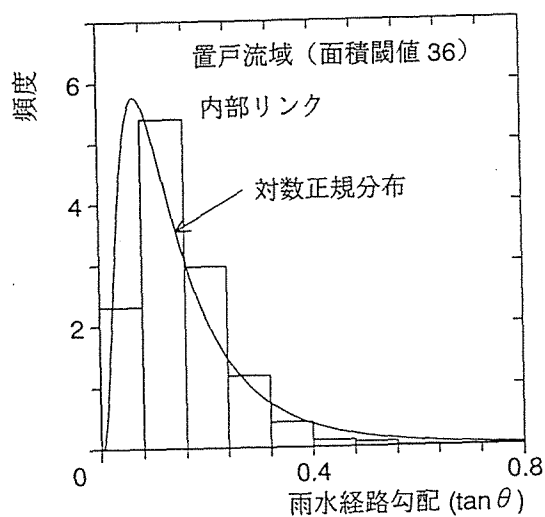
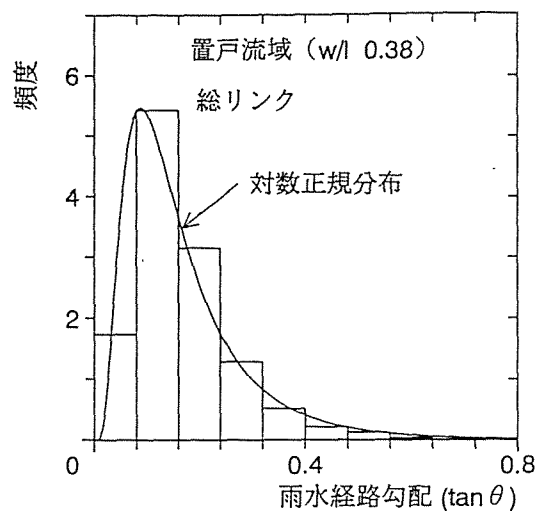
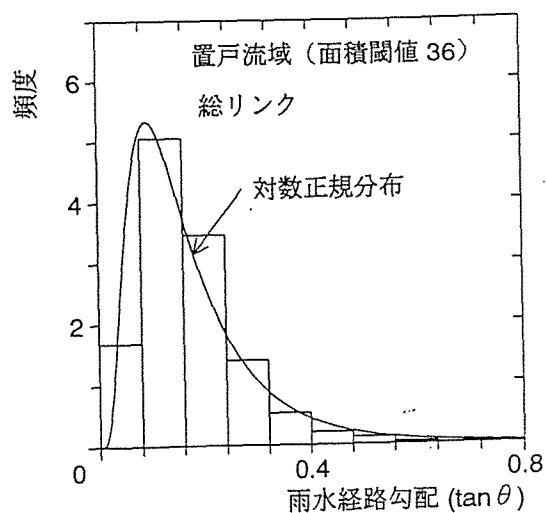


図-2.57 雨水経路勾配のヒストグラム (常呂川置戸流域)

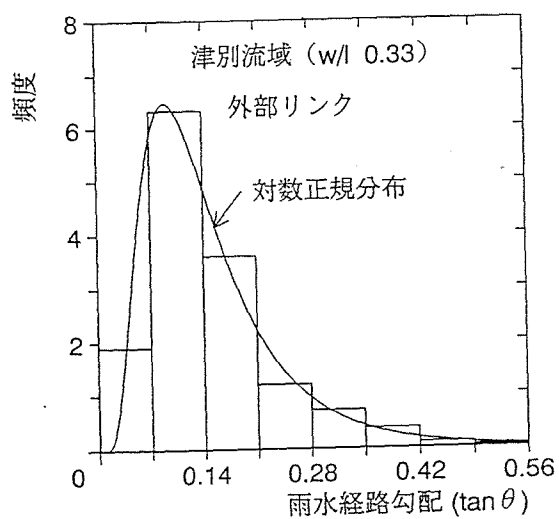
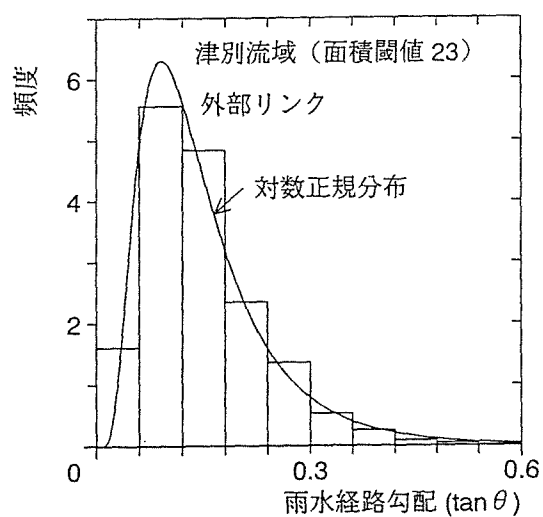
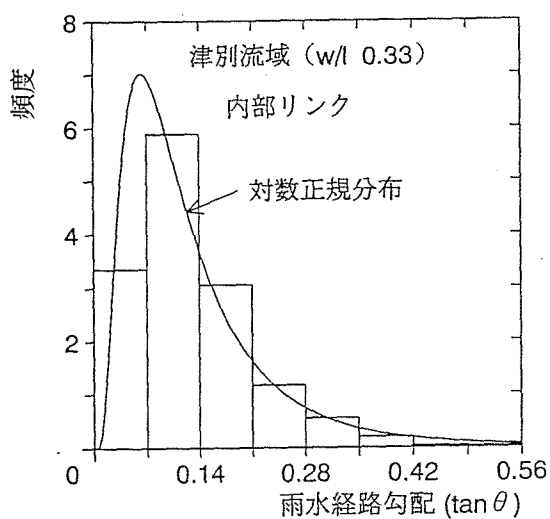
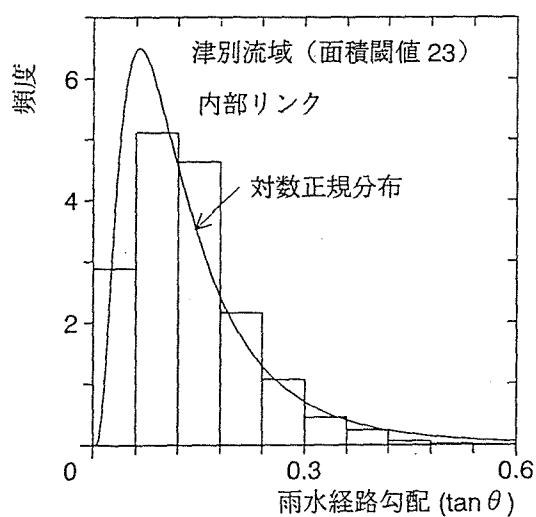
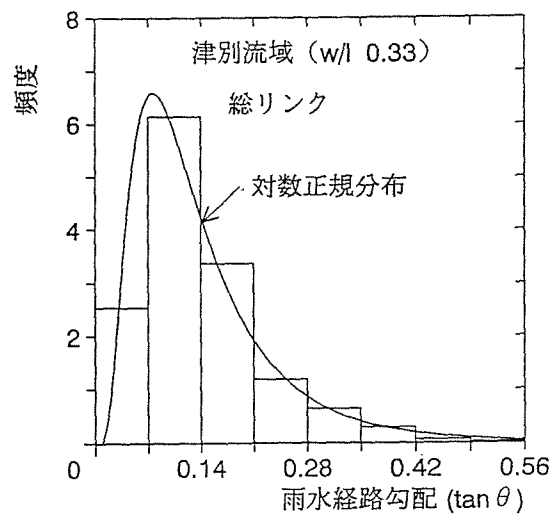
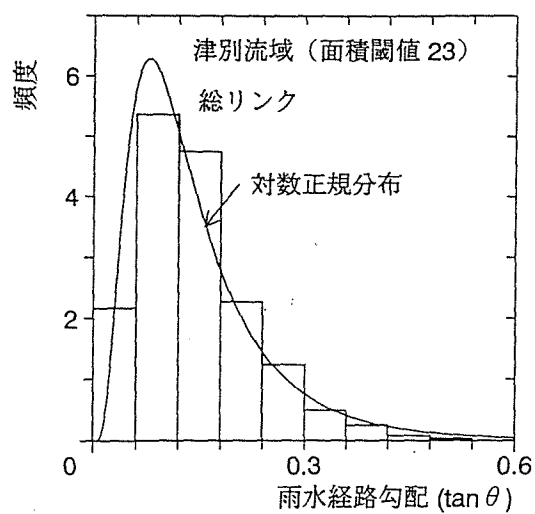


図-2.58 雨水経路勾配のヒストグラム (網走川津別流域)

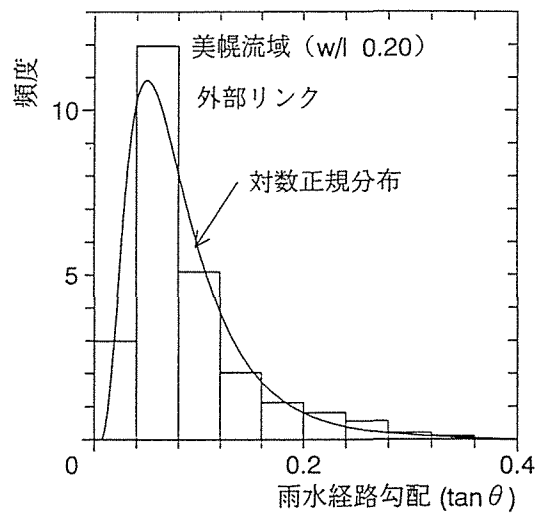
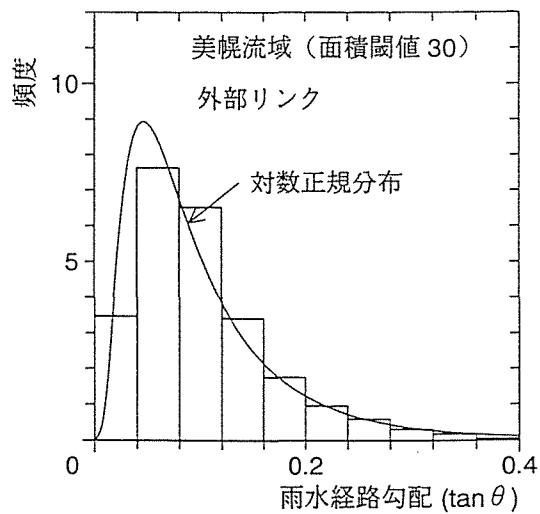
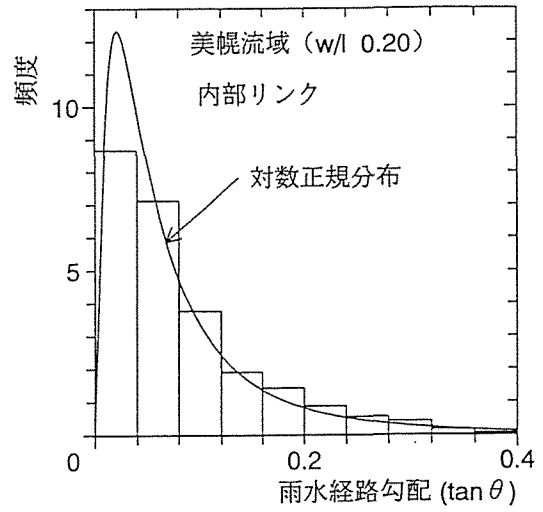
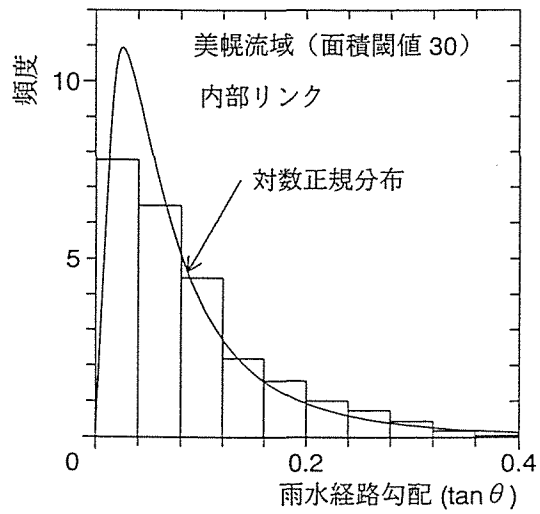
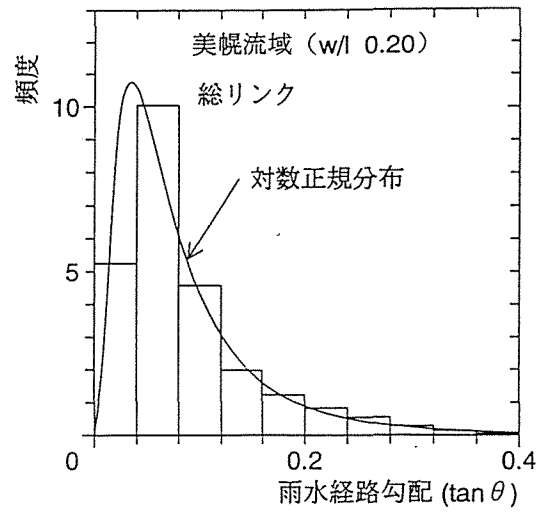
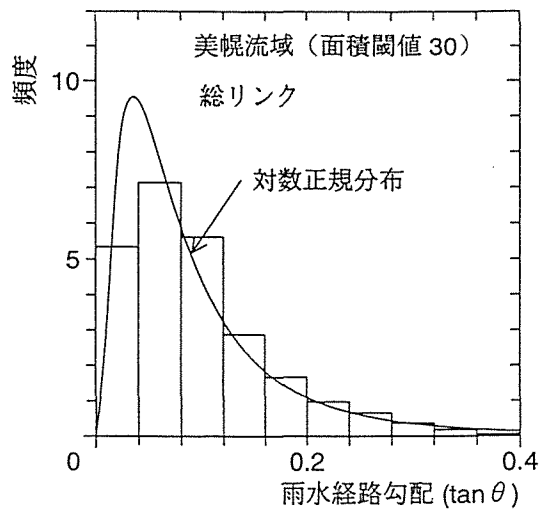


図-2.59 雨水経路勾配のヒストグラム（網走川美幌川流域）

[4] 河道網のマグニチュードの変化にともなう斜面地形量の変動特性

擬河道網は、前述のように閾値を変化させることによって任意の縮尺の河道網を作ることができる。ここでは種々の閾値の河道網から経路長と勾配を計測し、マグニチュードの変化に伴う変動特性を検討する。なお、以下の検討では空間スケールの指標としてサブ流域の平均流域面積を用いた。

図-2.61～図-2.66 は各々 6 流域について、2 万 5 千分 1 の地形図のマグニチュードと、20 万分 1 の地勢図のマグニチュード、そして、その中間のマグニチュードを持つ擬河道網の雨水経路長のヒストグラムで、図-2.67～図-2.72 が雨水経路勾配のヒストグラムである。実線が総リンクによるもの、ハッチング部分は内部リンクによるものである。これらの図を見ると、河道網が密な状態から疎な状態に変化しても、雨水経路長は指数分布形であり、雨水経路勾配は対数正規分布形を保持していることが分かる。

図-2.73 は各々 6 流域の平均雨水経路長と平均斜面長の平均サブ流域面積に対する関係をしている。面積閾値、 w/l 閾値の両者共に流域スケールを大きくすると、平均斜面長と平均経路長の差が少しずつ開いているが、平均サブ流域面積が 10km^2 を越えると、この差が僅かになったり、逆に平均経路長の方が極端に長くなる傾向も見られる。

これは、20 万分 1 地勢図における比較的粗い河道網でも、平均サブ流域面積が $7\sim 8\text{km}^2$ もあるので、面積閾値による擬河道網のサブ流域の河道は、これ以上の流域スケールになっても徐々に河道網が発達していく傾向がある。しかし、 w/l 閾値による擬河道網は、縦横断勾配の比が変化する場所からを河道としているため、突然長い河道が生じたり、流域スケールを小さくしても、サブ流域河道の縦横断勾配はそれほど変化せずに、いつまでも短い河道のままであったりする。この様に w/l 閾値の擬河道網は河道の発生が不安定であるため、平均経路長の方が長くなってしまいう現象が起こるものと考えられる。

図-2.74(a) は立牛流域の w/l 閾値による擬河道網であるが、サブ流域面積が大きいにも関わらず、短い河道が存在する。図-2.74(b) のように面積閾値による擬河道網では、このような極端なサブ流域面積と河道長は発生していない。つまり、粗い河道網を再現する際には、水源部の縦横断勾配の関係が不安定であるために、 w/l 閾値は河道網の再現にあまり適さないと思われる。

図-2.75 は 6 流域の斜面長と経路長の比と平均サブ流域面積の関係を示している。平均サブ流域面積が大きくなると、経路長は徐々に増加していくのに対し、斜面長は経路長より上下に変動しながら増加している。このため、図の比の変化も上下に変動しながら増加している。 w/l 閾値によるものは、サブ流域面積が小さい場合、どの流域も比の値が約 0.8 であり、面積閾値による擬河道網の場合 (図-2.75(b)) よりも平均サブ流域面積を大きくしたときの比の変化が少ない。これからも、密な河道網を再現するには w/l 閾値の方が適しているのが

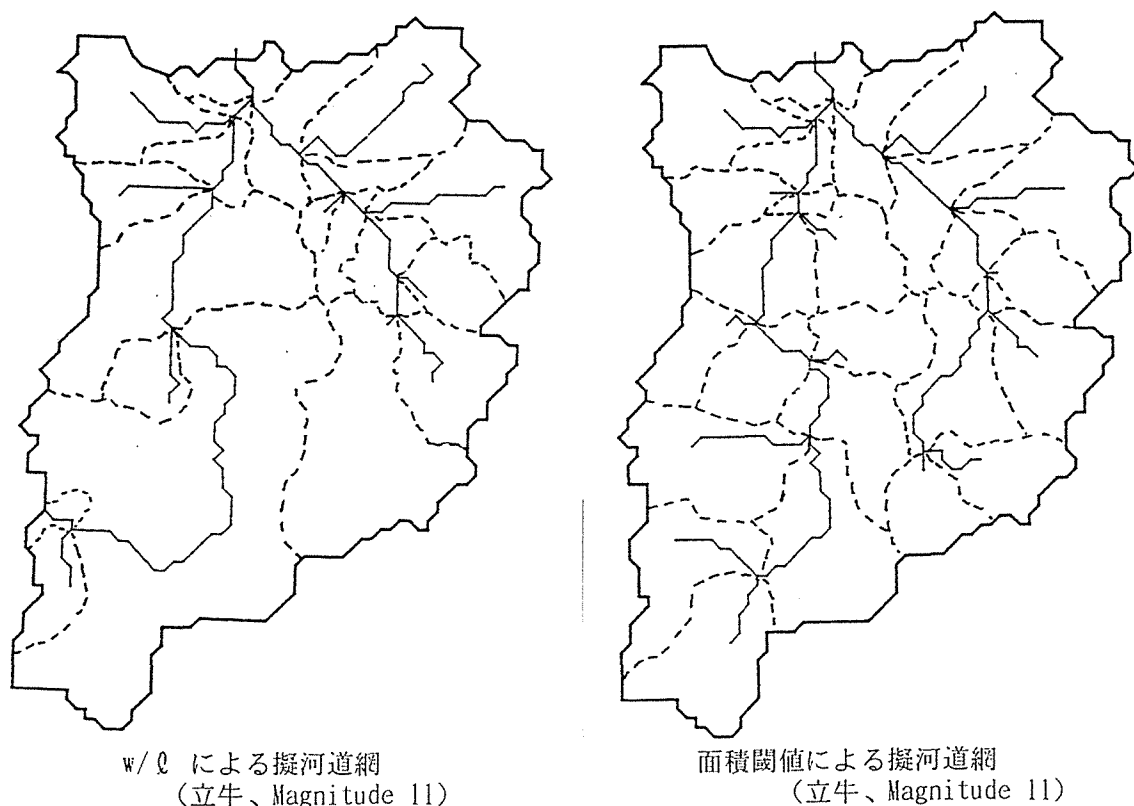


図-2.74 立牛川流域の閾値の違いによる擬河道網

分かる。また、平均サブ流域面積を大きくしていくと、次第にこの比が急激に大きくなる地点が存在するが、その地点は流域毎に異なり、流域の斜面地形量特性の違いを示している。

次に図-2.76 は各々 6 流域の平均経路勾配及び平均河道勾配と、平均サブ流域面積の関係を示している。面積閾値によるものと w/l 閾値による擬河道網の平均経路勾配、平均河道勾配の違いはあまり見られない。各々の流域毎の違いを見ると、留萌流域は河道の出口が海に面しているために、河道勾配が他の流域よりも緩いこと、美幌流域は斜面経路勾配が他の流域よりも緩いことが分かる。

図-2.77 は 6 つの流域のサブ流域面積に対する経路勾配と河道勾配の比を示したグラフである。美幌流域を除いて他の 5 流域は平均サブ流域面積が大きくなると、この比も大きくなる傾向がある。また、美幌流域は他の流域よりも全体的に見てこの経路勾配と河道勾配の比が小さい。これはこの流域の斜面勾配が緩いために雨水経路が蛇行し易くなり、経路長が長くなったものと考えることが出来る。図-2.73 を見ても分かるように、他の 5 つの流域よりも小さい流域スケールのときに斜面長と経路長の比が 1 を越えている。このことが、 w/l 閾値を用いて擬河道網を作成したとき、河道がなかなか上流まで延びて行かなかった原因と考えられる。

また、前出の経路勾配のヒストグラムの図を見ても、留萌、滝上流域は他の流域と比べて

雨水経路勾配が0に近い値が多くあることがわかる。これは勾配の緩やかな内部リンクの河道からは、河道が発生しにくいことを意味している。

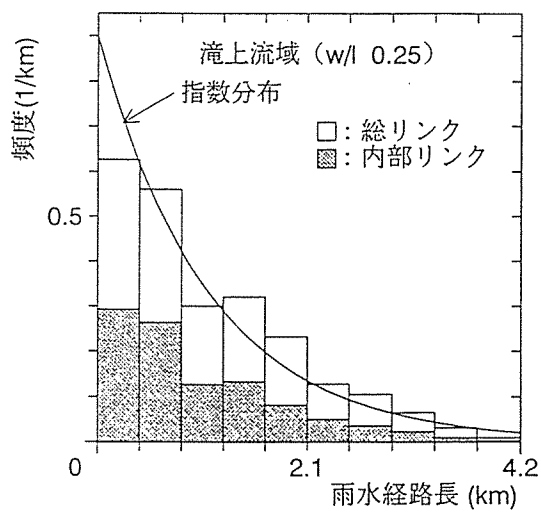
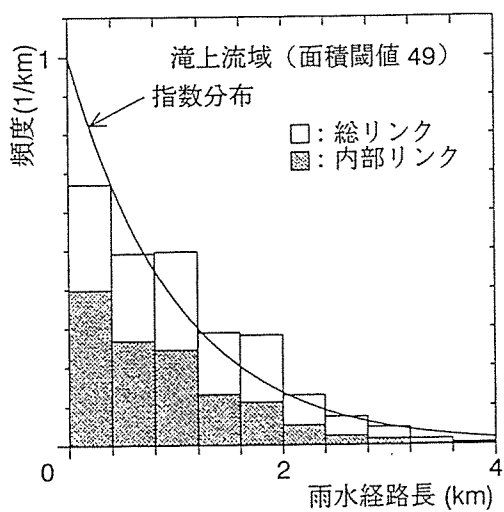
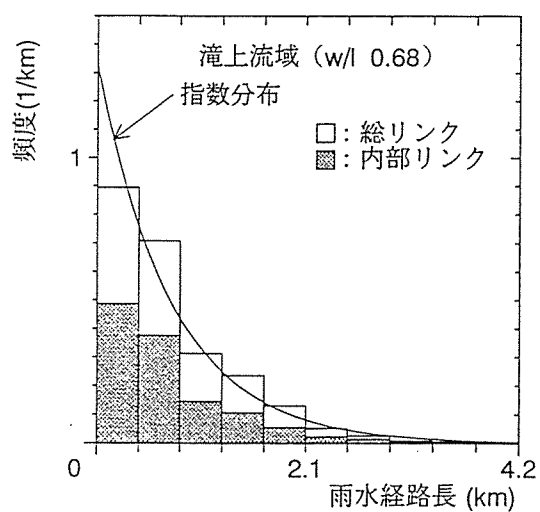
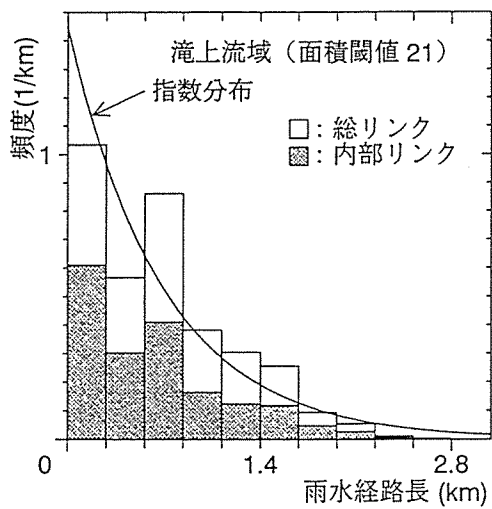
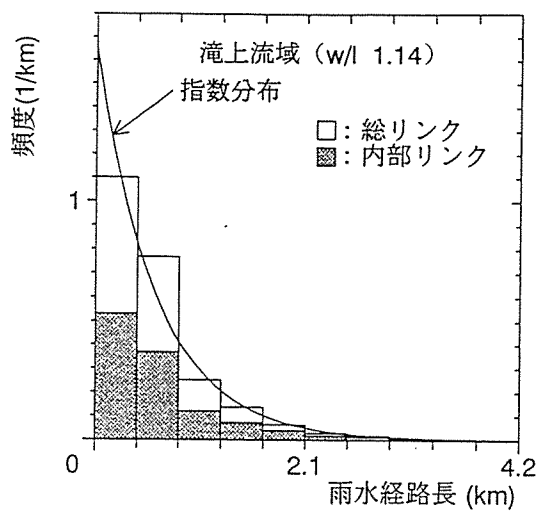
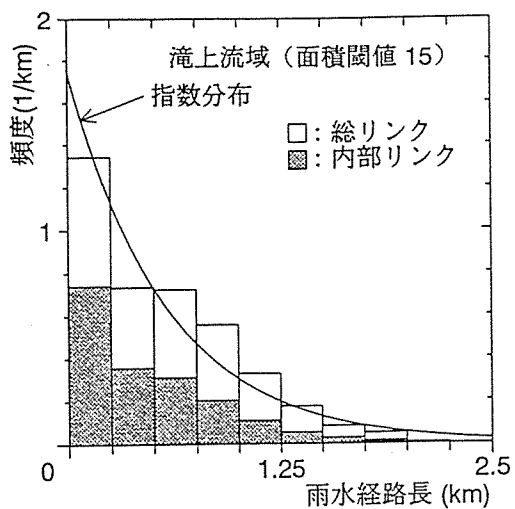


図-2.61 雨水経路長のヒストグラム (渚滑川滝上流域)

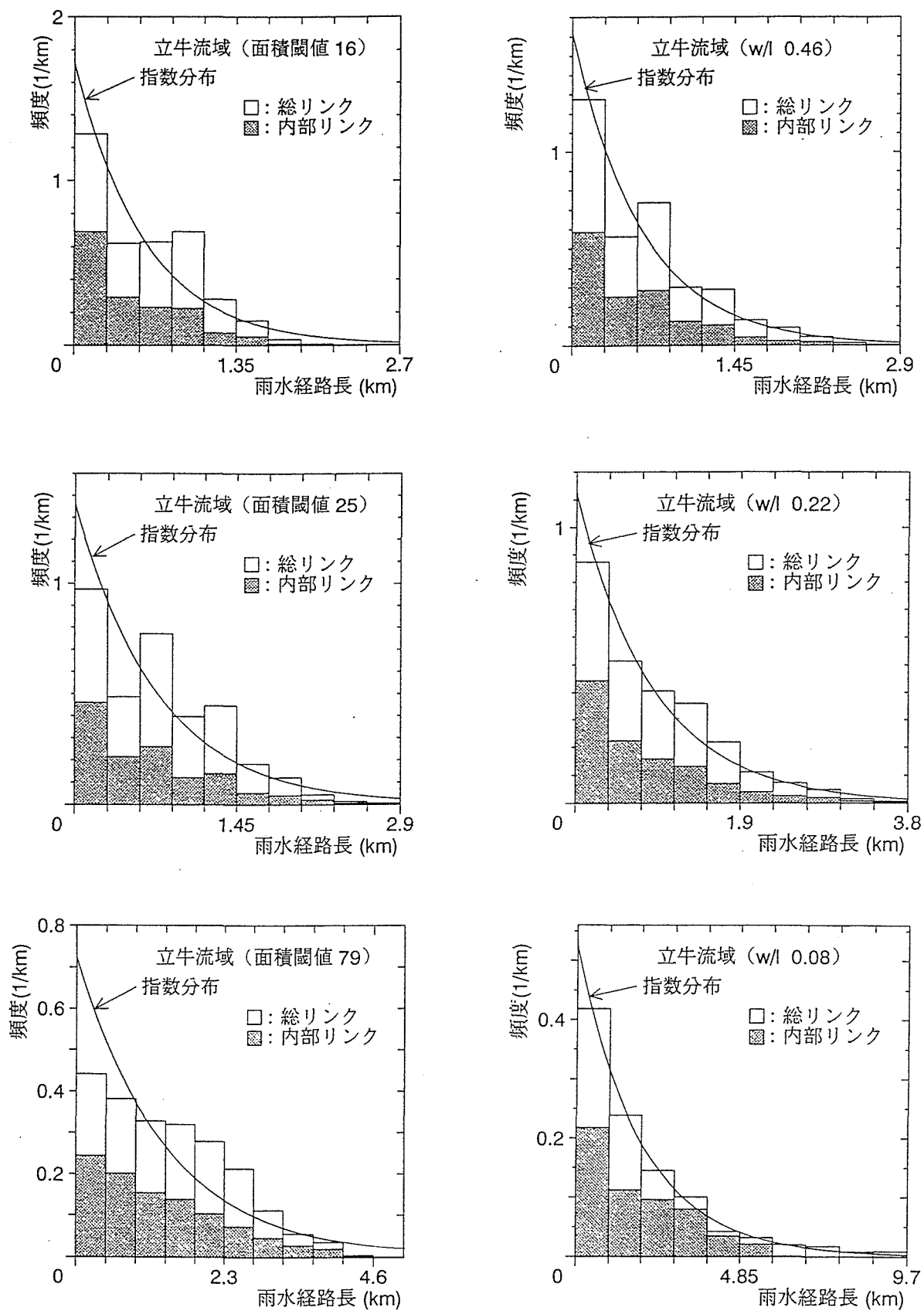


図-2.62 雨水経路長のヒストグラム (渚滑川立牛川流域)

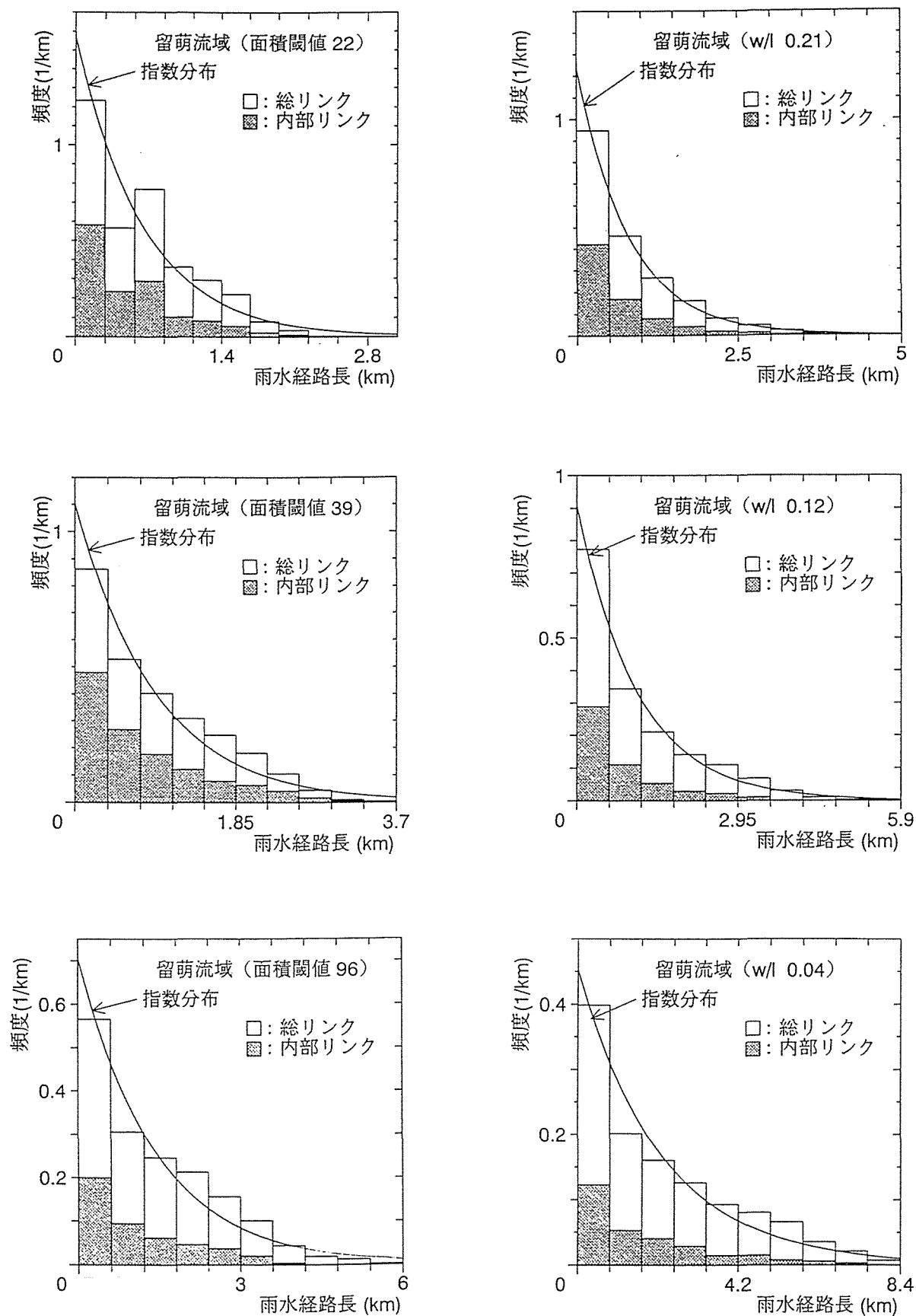


図-2.63 雨水経路長のヒストグラム (留萌川流域)

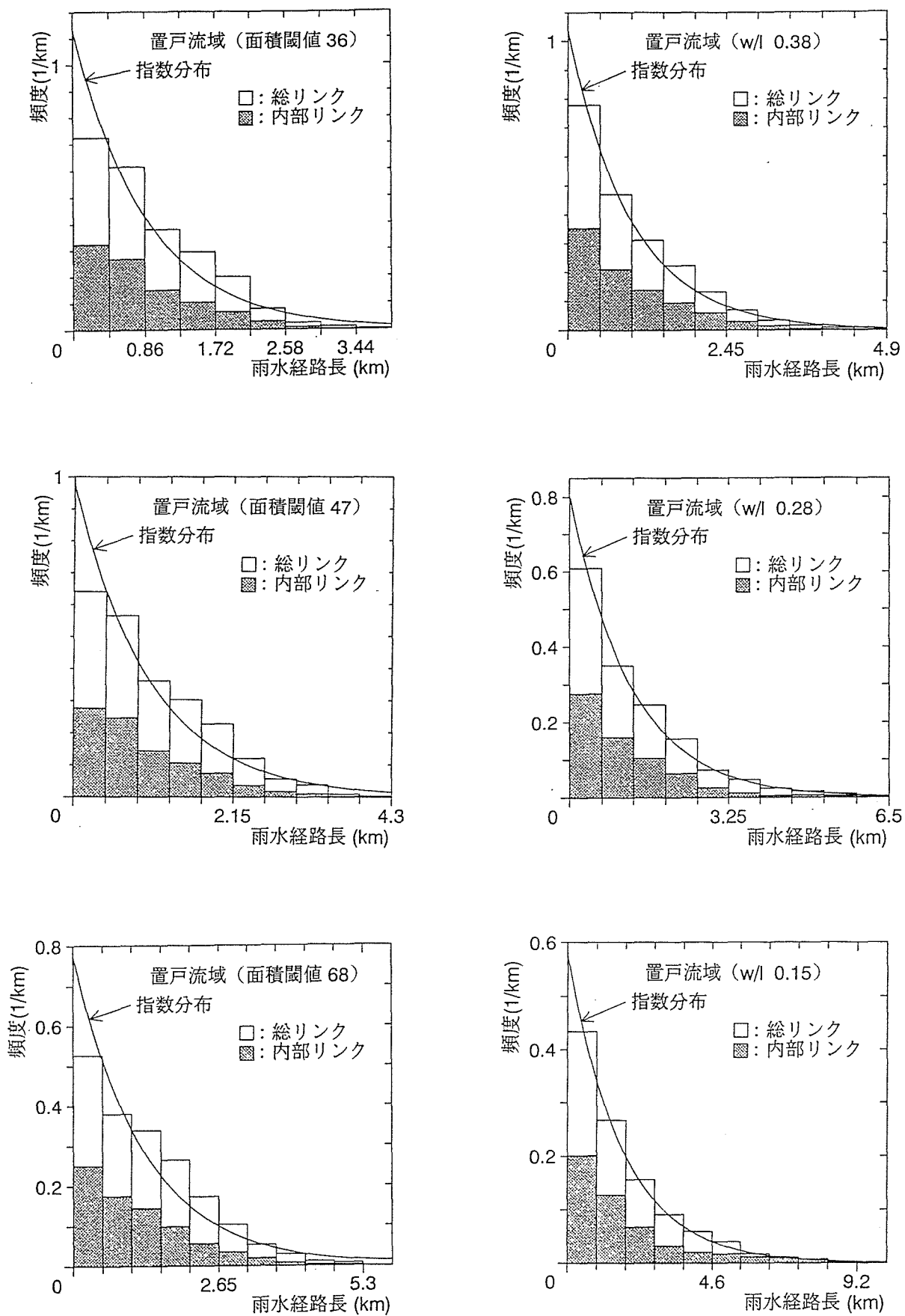


図-2.64 雨水経路長のヒストグラム (常呂川置戸流域)

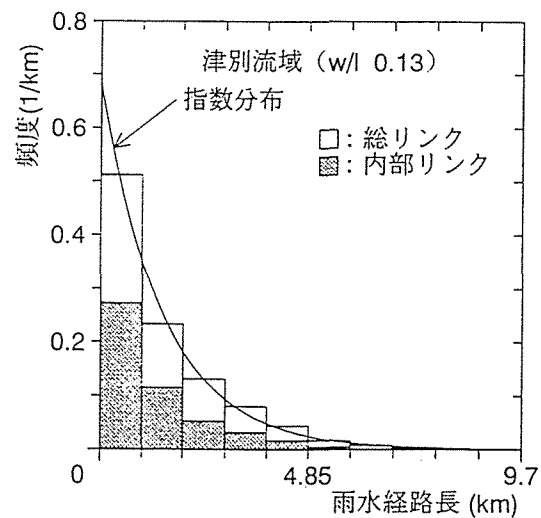
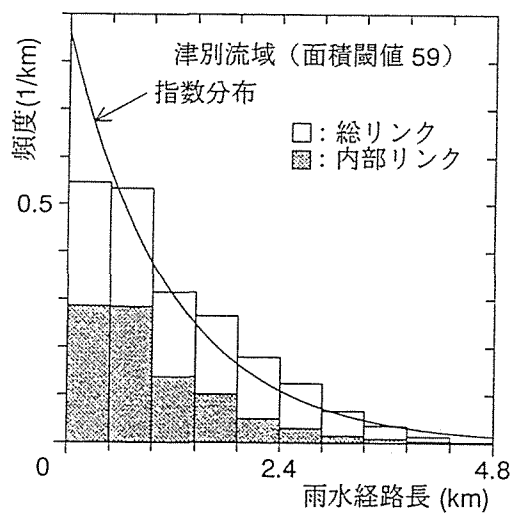
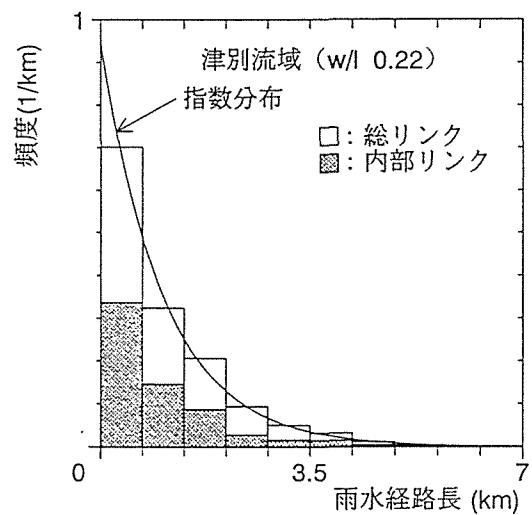
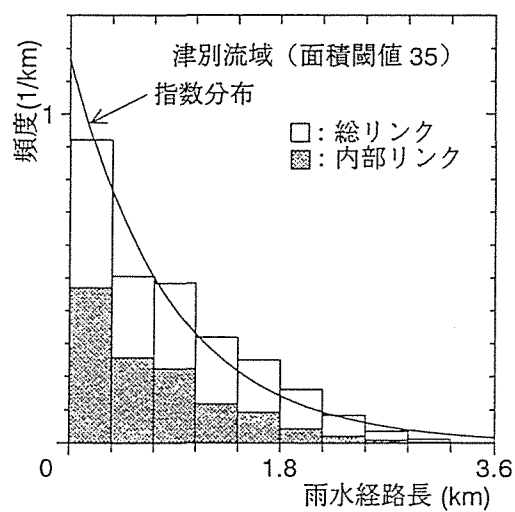
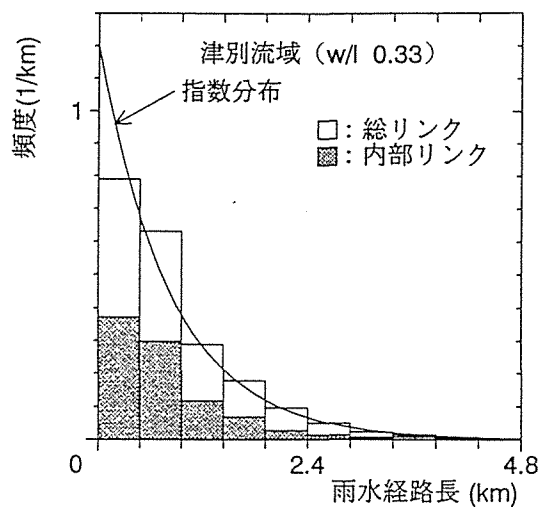
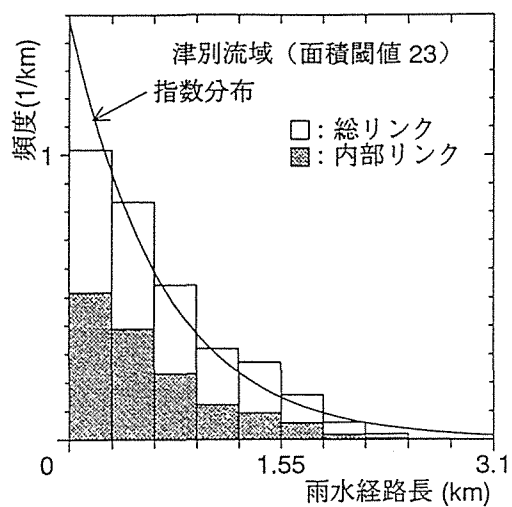


図-2.65 雨水経路長のヒストグラム (網走川津別流域)

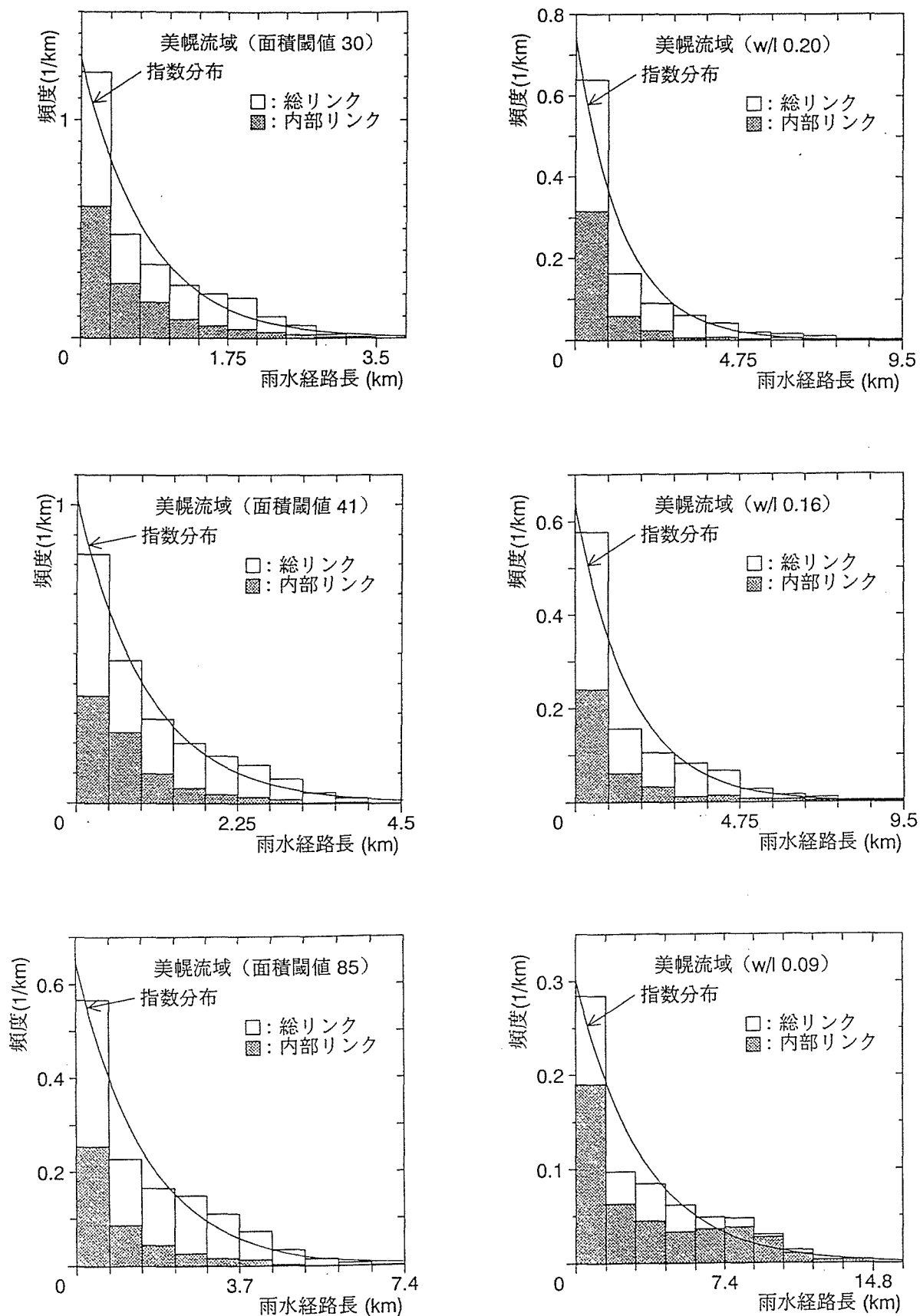


図-2.66 雨水経路長のヒストグラム (網走川美幌川流域)

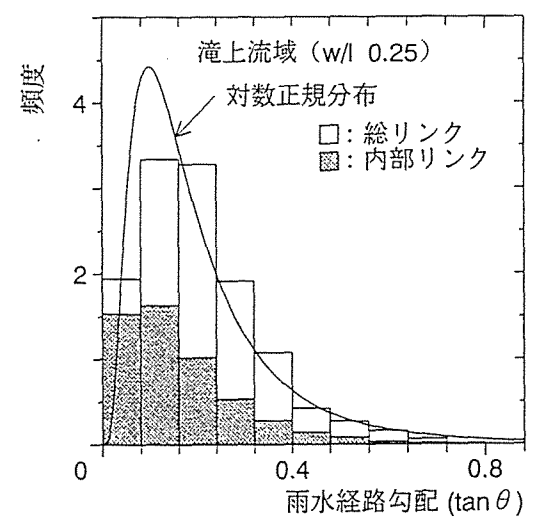
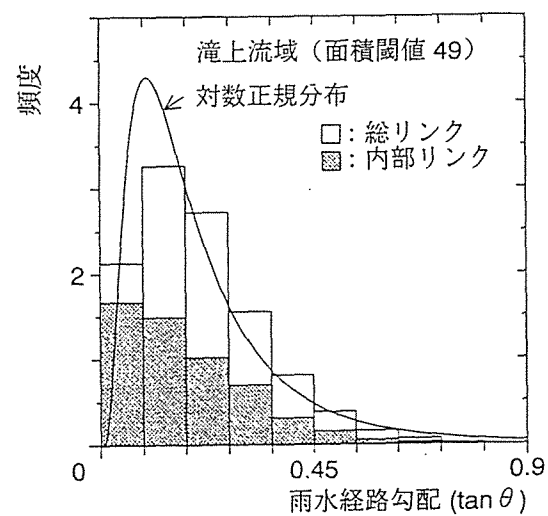
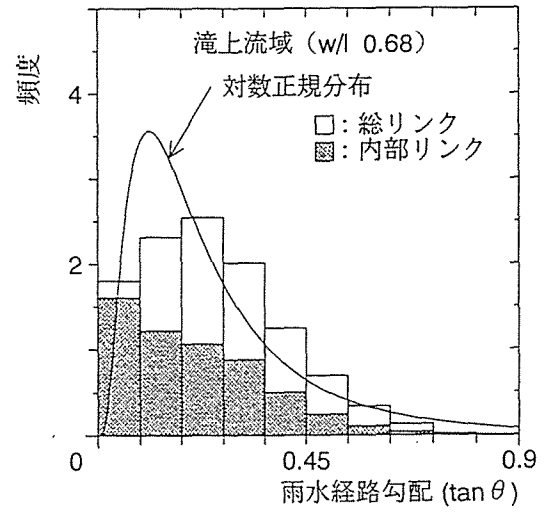
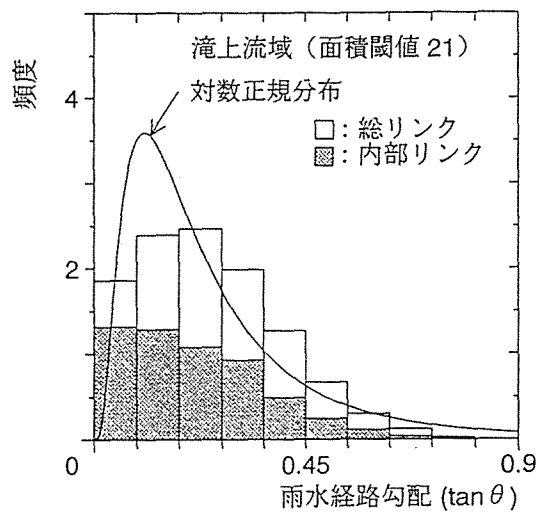
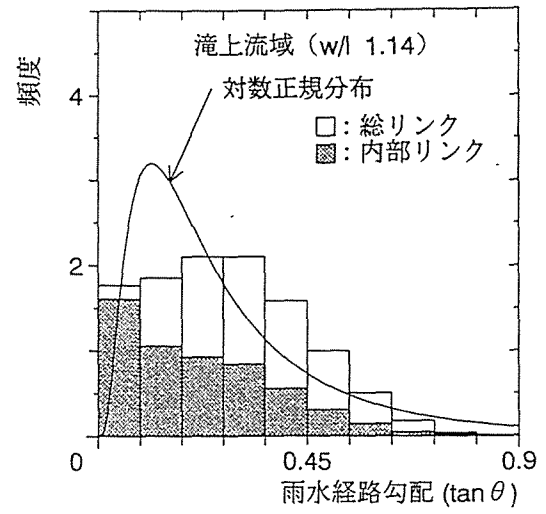
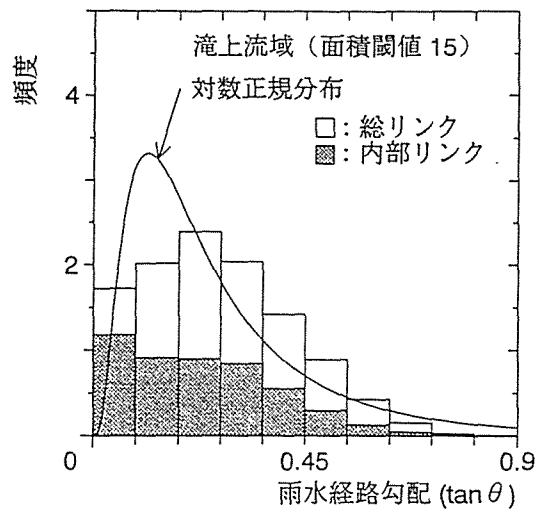


図-2.67 雨水経路勾配のヒストグラム (渚滑川滝上流域)

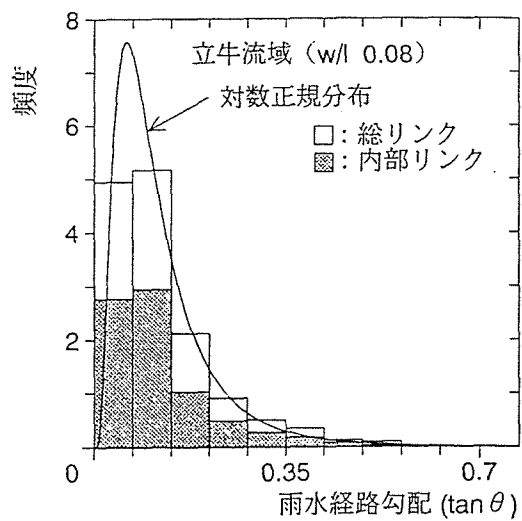
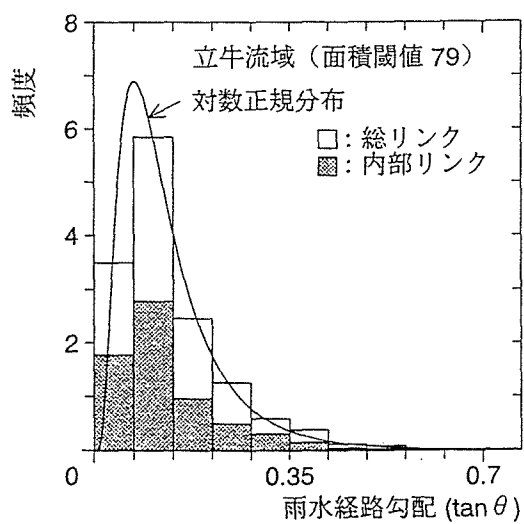
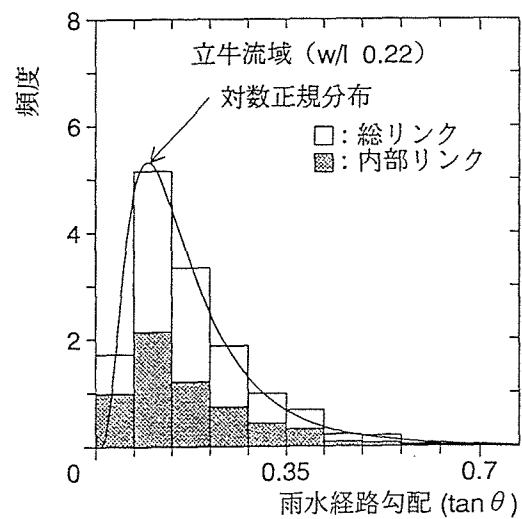
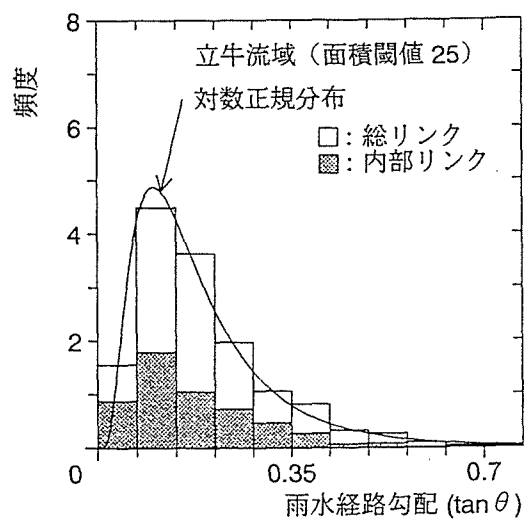
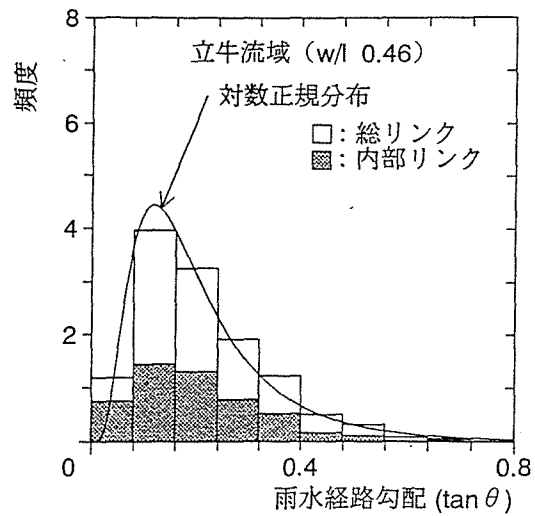
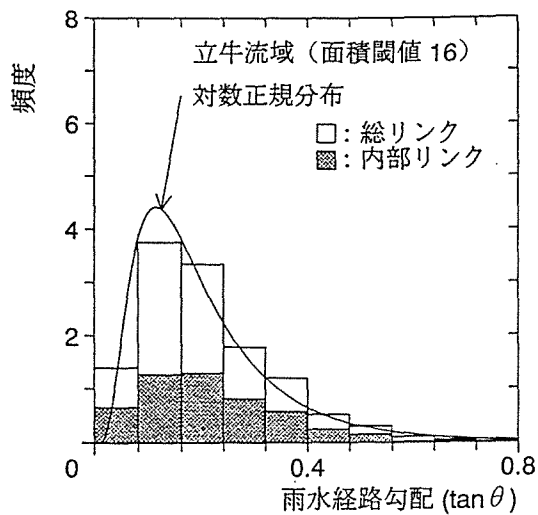


図-2.68 雨水経路勾配のヒストグラム (渚滑川立牛川流域)

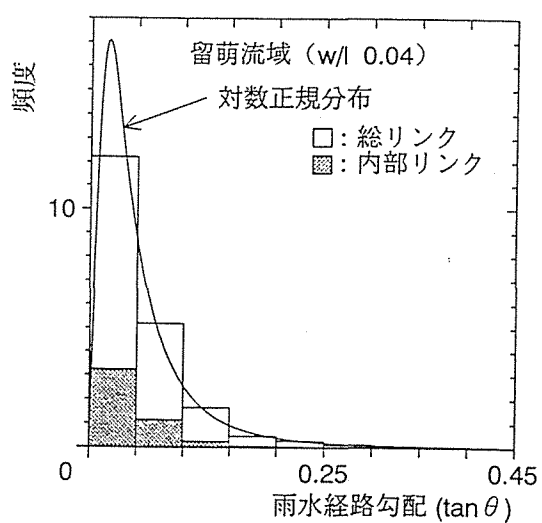
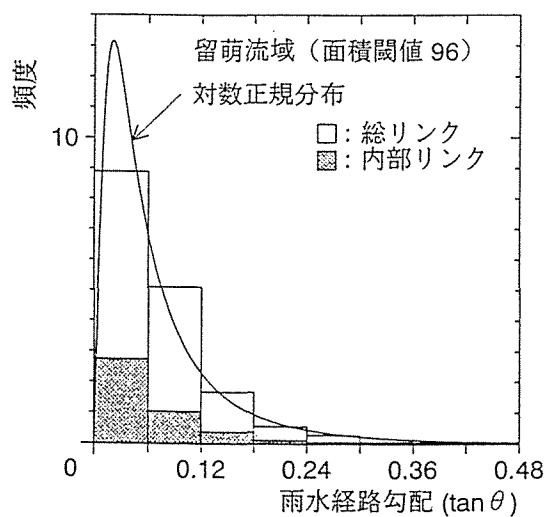
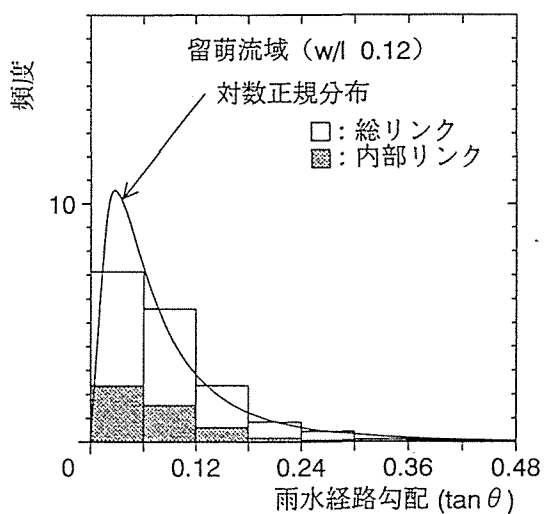
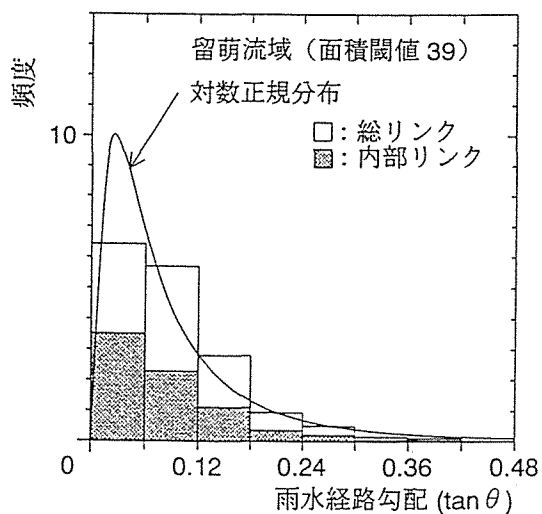
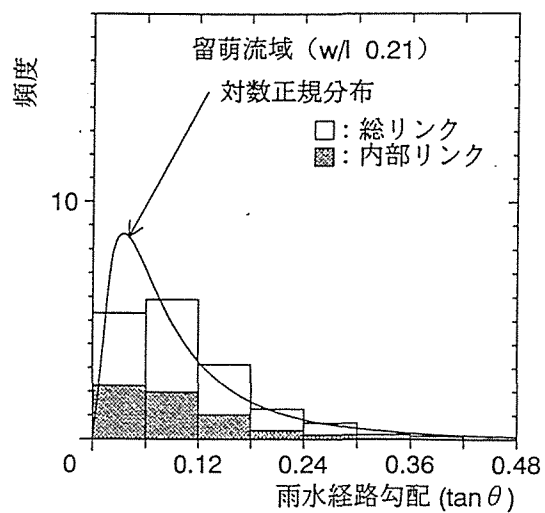
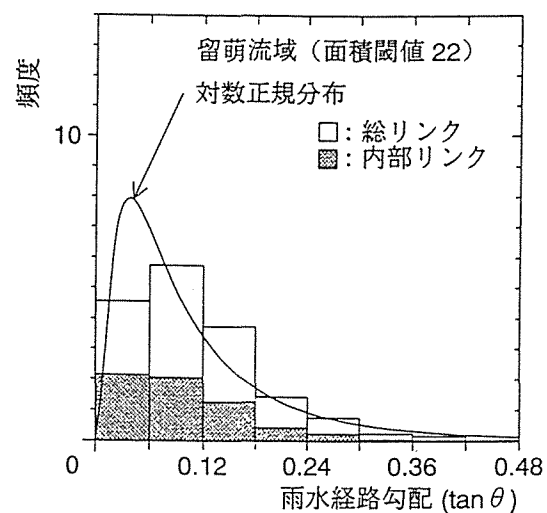


図-2.69 雨水経路勾配のヒストグラム（留萌川流域）

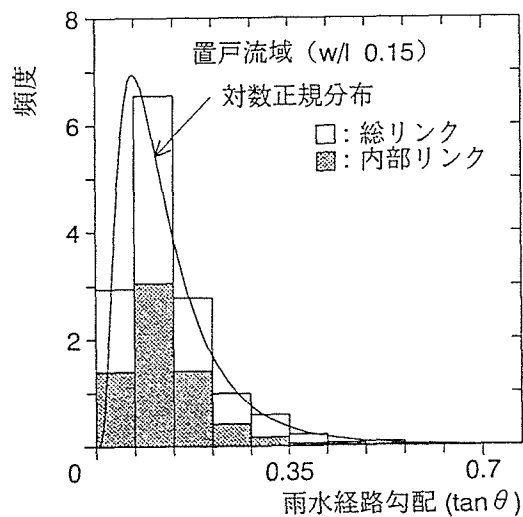
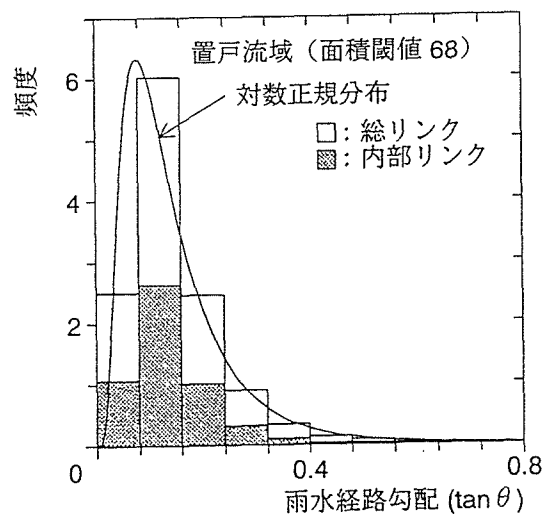
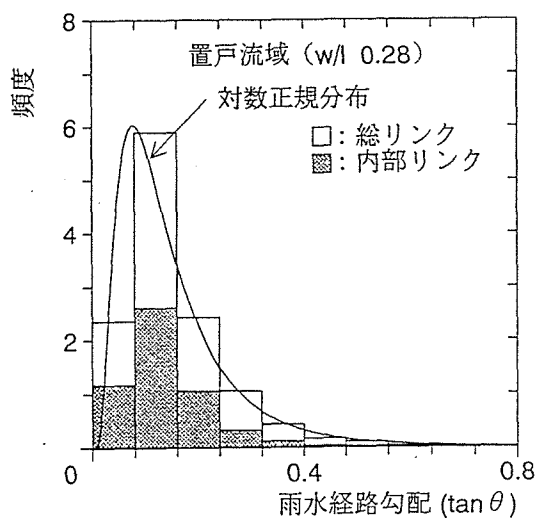
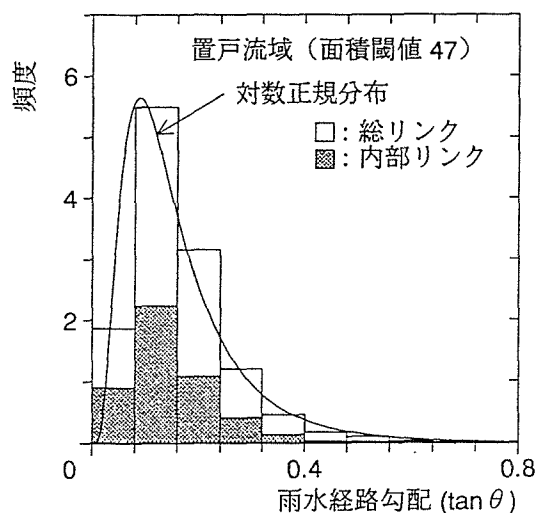
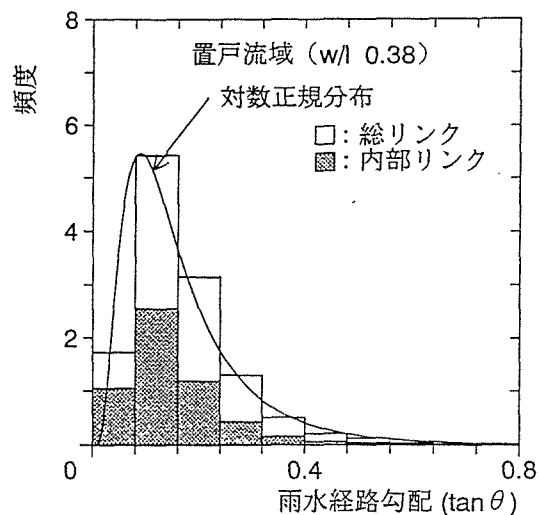
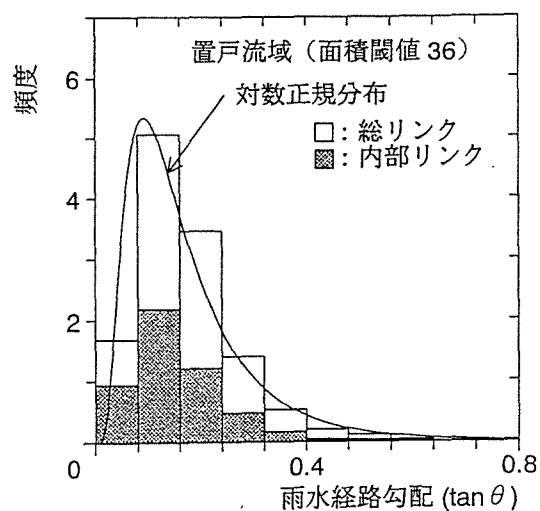


図-2.70 雨水経路勾配のヒストグラム (常呂川置戸流域)

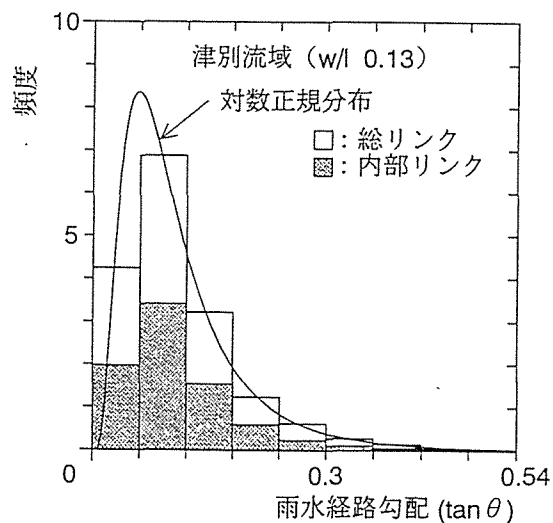
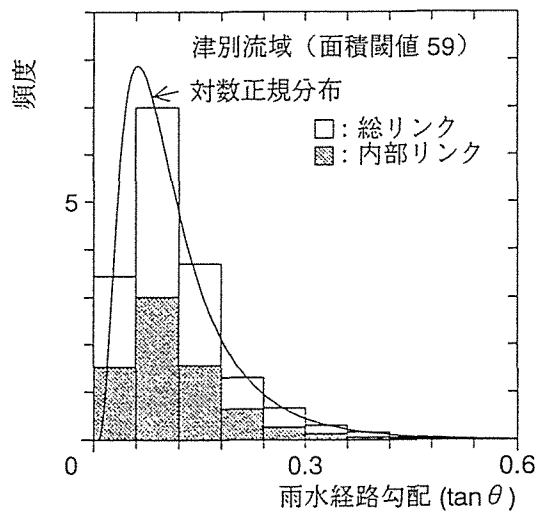
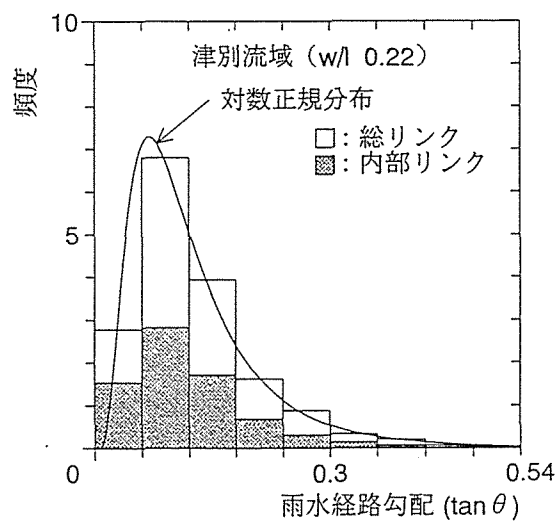
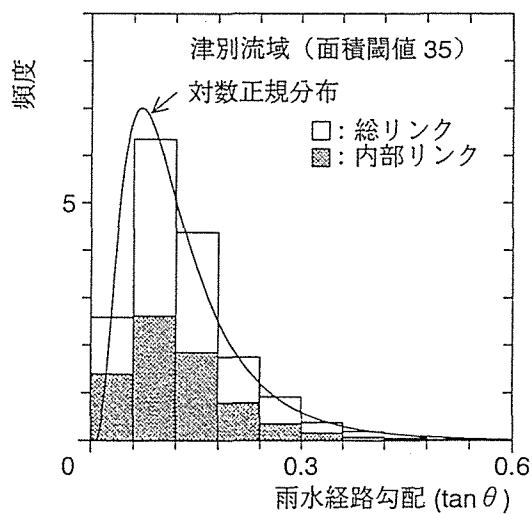
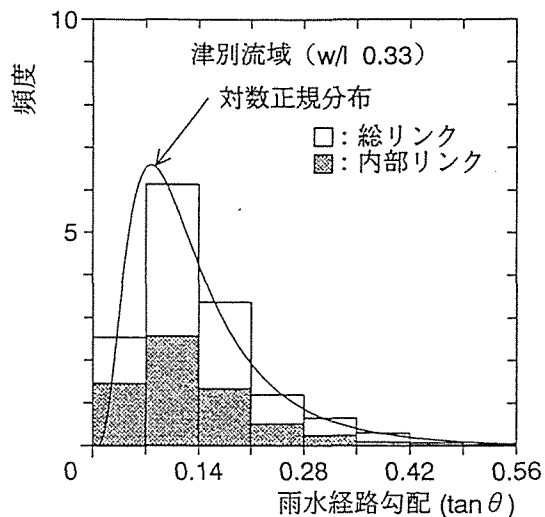
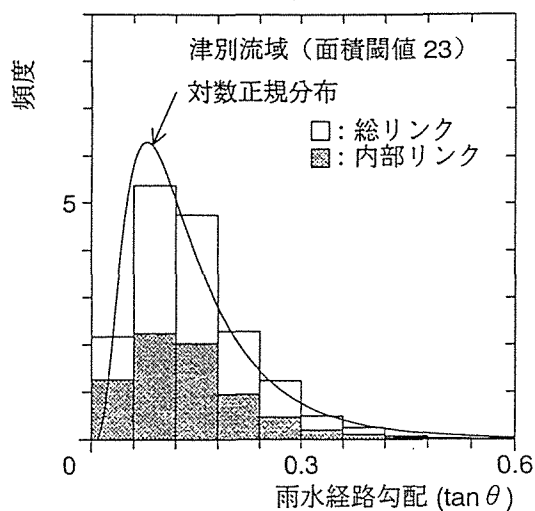


図-2.71 雨水経路勾配のヒストグラム (網走川津別流域)

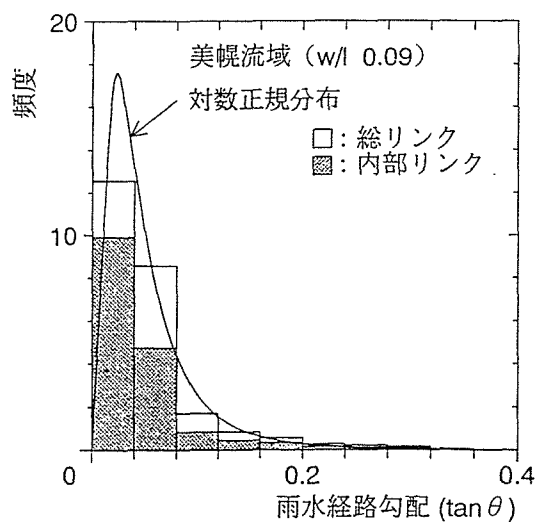
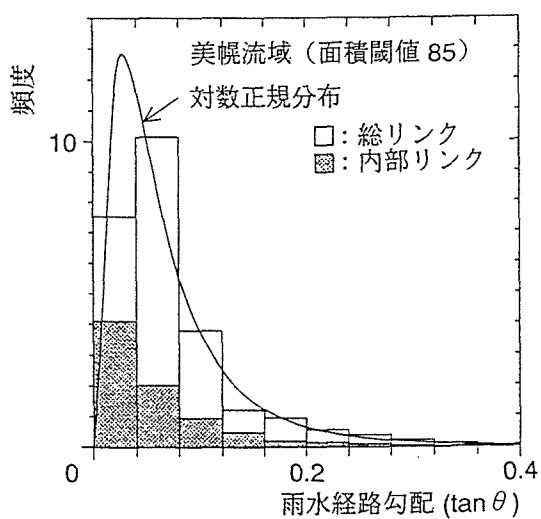
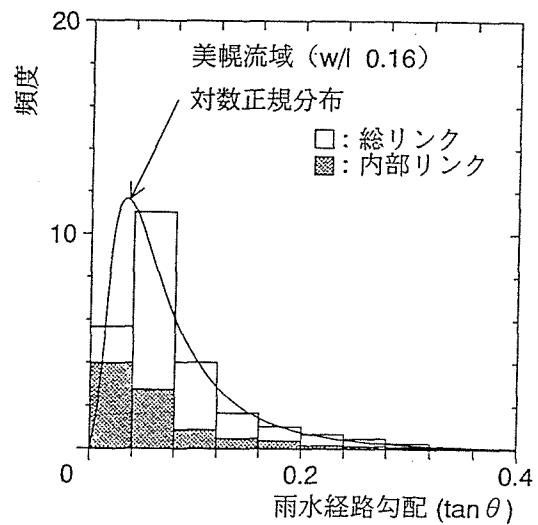
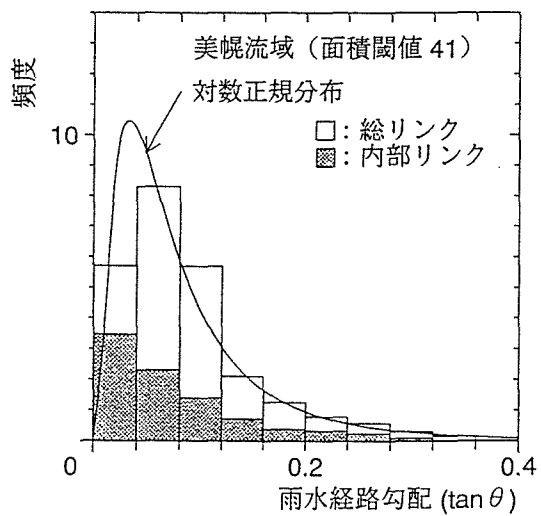
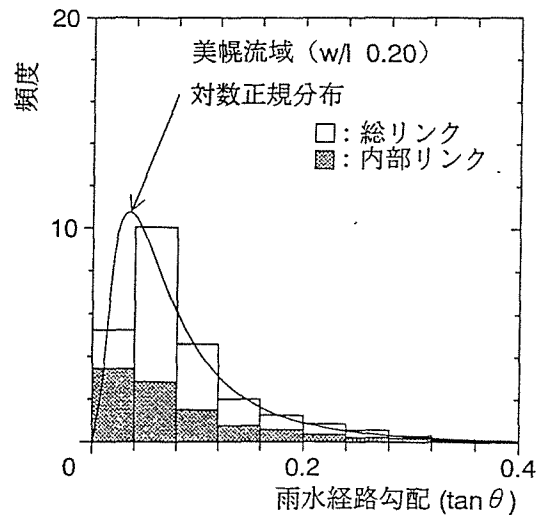
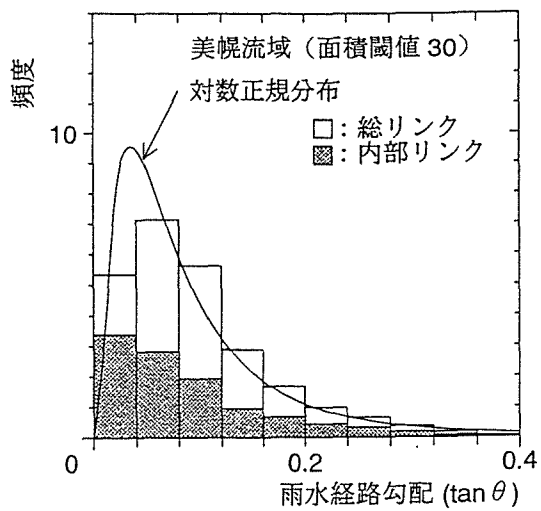


図-2.72 雨水経路勾配のヒストグラム (網走川美幌川流域)

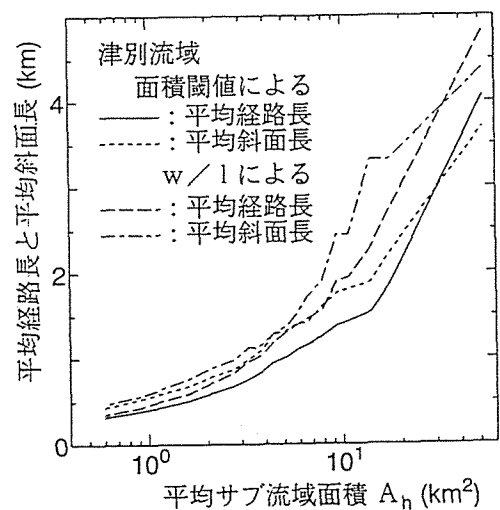
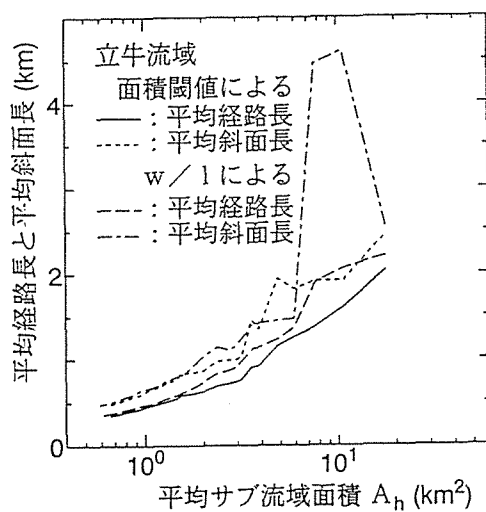
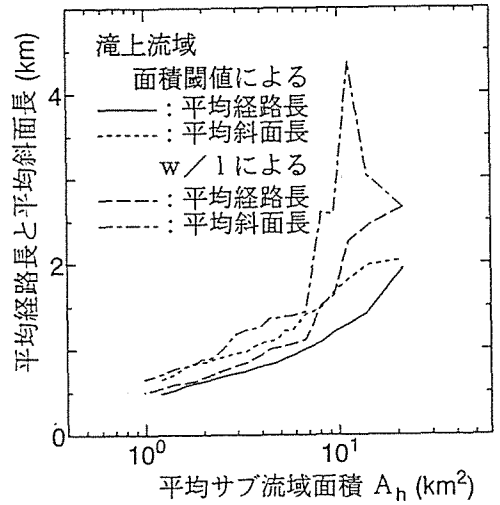
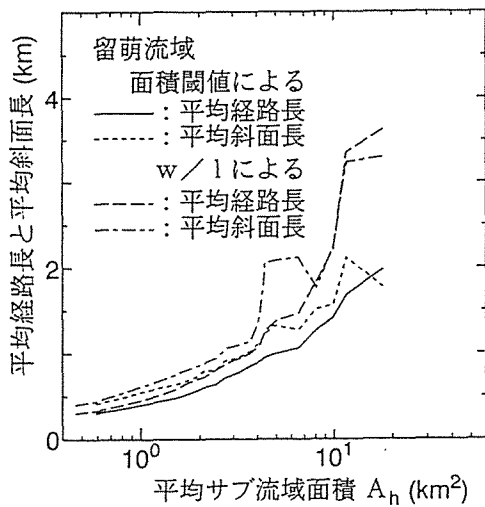
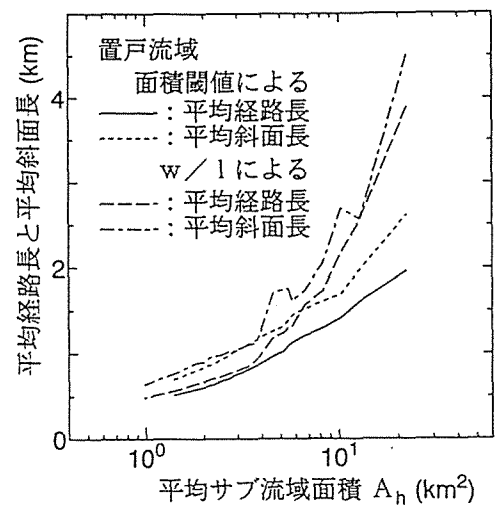
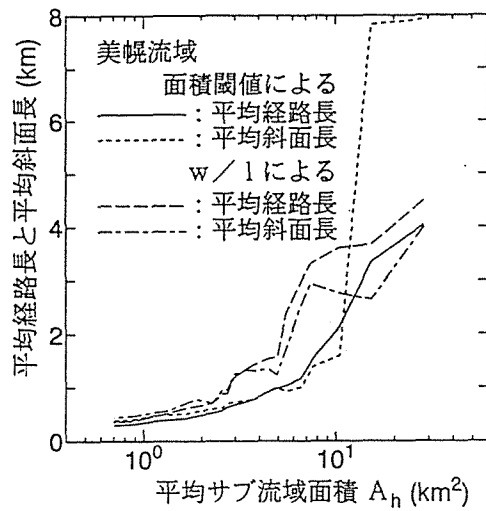


図-2.73 6流域毎のサブ流域面積に対する経路長と斜面長

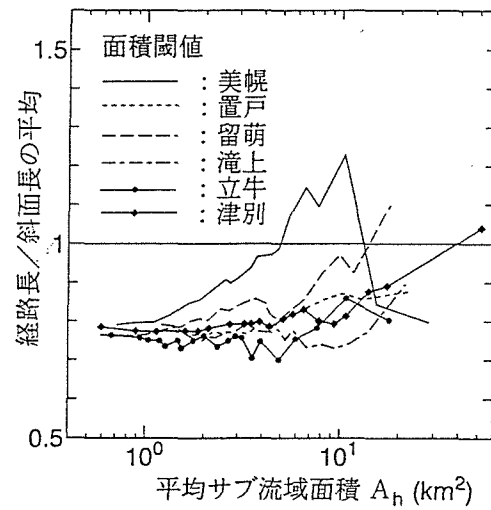
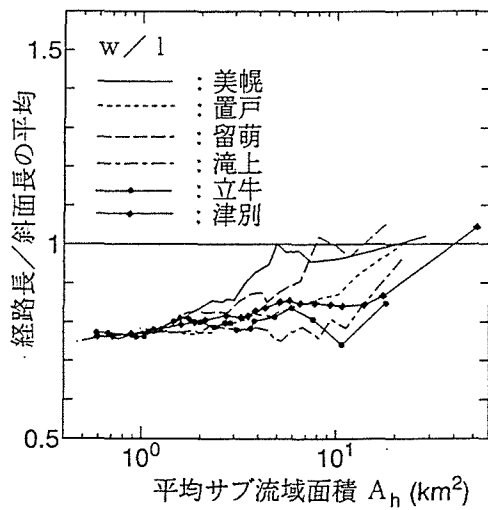


図-2.75 6流域のサブ流域面積に対する経路長と斜面長の比

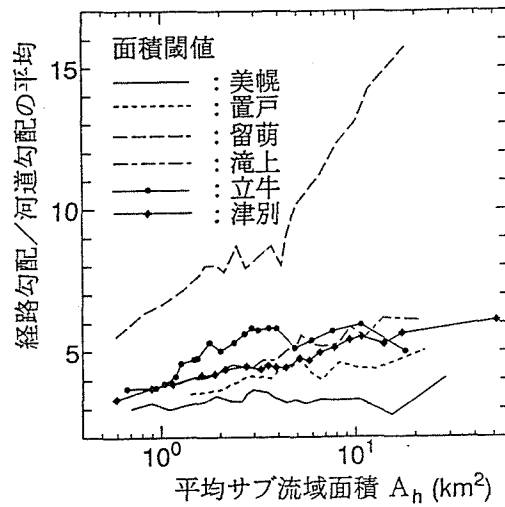
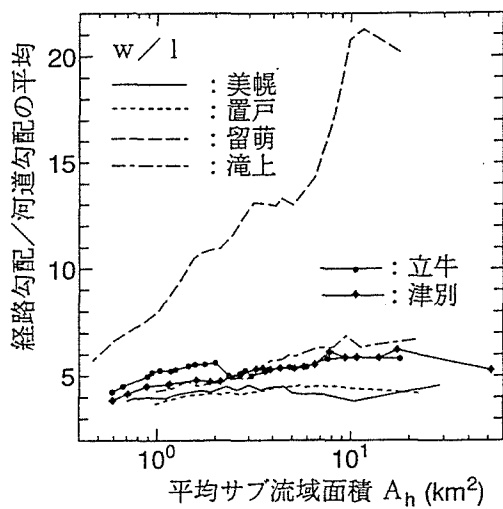


図-2.77 6流域のサブ流域面積に対する経路勾配と河道勾配の比

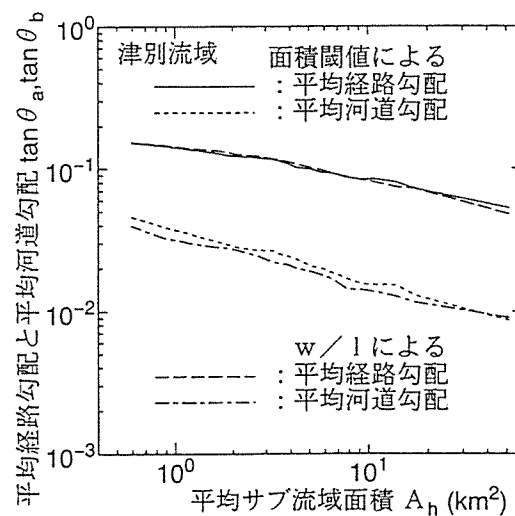
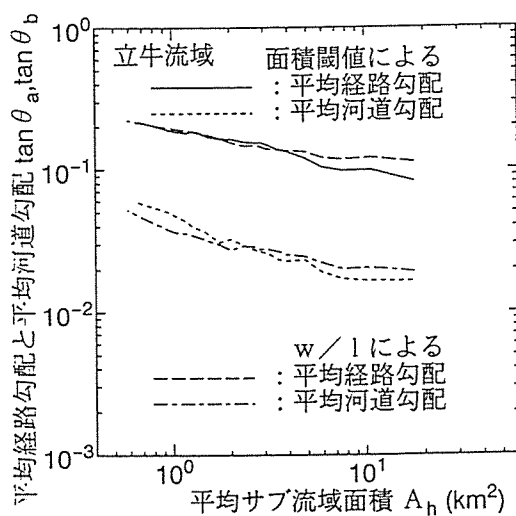
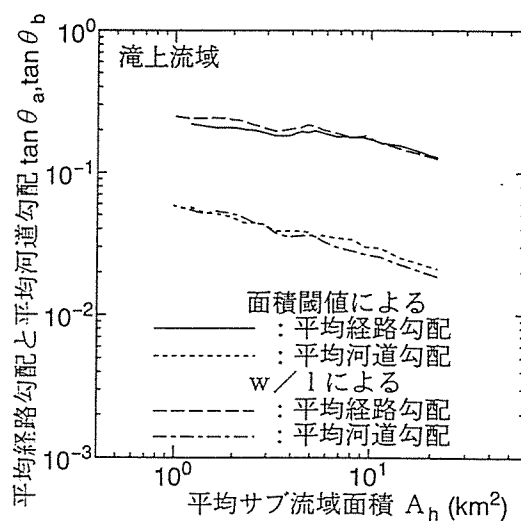
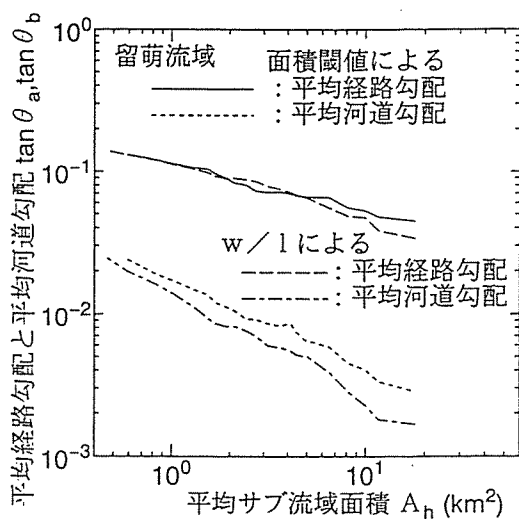
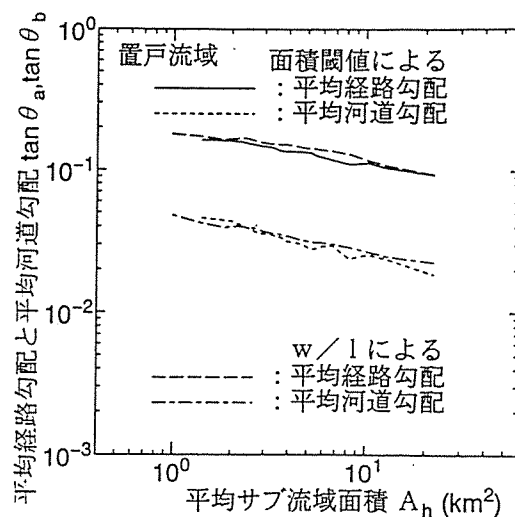
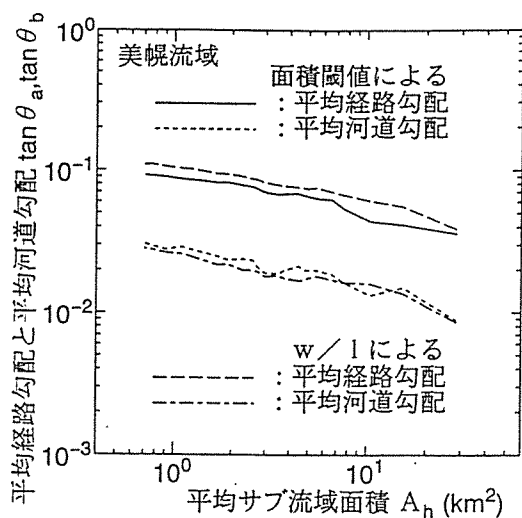


図-2.76 6流域毎のサブ流域面積に対する経路勾配と河道勾配

2.5 第2章のまとめ

本章では流域地形量の解析手法として、数値標高データから擬河道網を抽出して地形量の自動計測までの手法を示した。次に、流域のサブ流域のスケールが変化して密な河道網から疎な河道網に変化したときの地形量の変動特性について検討した。以下に本章の成果を要約する。

2.5.1 数値地図による流域地形量解析

- 1) 数値標高データから雨水の落水線図を作成する際に生じる窪地処理の方法を改良して、平行に流れる落水線を解消できた。
- 2) 角屋が地形図による地形量解析で提案した谷幅とわん入長の比 (w/ℓ) を擬河道網抽出の閾値として適用できることを示した。
- 3) 面積閾値で作成した河道網も w/ℓ 閾値で作成した河道網も、河道網の形態にあまり違いが見られないが、流域面積とリンク長の関係や水源までの集水面積に違いがみられ、 w/ℓ 閾値の定義の方が地形図とよく一致することが分かった。
- 4) 雨水経路勾配が緩やかで平坦な流域や、経路勾配と河道勾配の比がそれ程変化しない流域は、 w/ℓ 閾値による水源の定義の場合、閾値を変えても河道の伸長が起こり難く、河道網が発達しないことが分かった。
- 5) 面積閾値も w/ℓ 閾値も、おおよそ地形図に記載されている河道網を再現できてはいるが、これ以上よく河道網を再現するためには、(a) 今回、富里ダム流域で行ったように数値標高データのメッシュのサイズの細密化、(b) 面積閾値と w/ℓ 閾値の両方のメリットを組み合わせた水源の定義、(c) 土壌や植生などの流域の場の特性を考慮した閾値の設定、などが必要である。
- 6) 擬河道網のマグニチュードは地図の縮尺に相当し、擬河道網を用いると任意の縮尺の河道網を容易に得ることができる。したがって、マグニチュードはサブ流域の流域スケールを示す指標とも考えることができる。

2.5.2 河道網パターンの確率変動特性

- 1) 河道網構造を定量化するため、河道網パターンに関する幾つかの確率分布関数を新たに提案した。
- 2) 河道網はサブ流域スケールが変化すると、粗な河道網から密な河道網へ変化する。この河道網パターンの移行過程を定式化した。

2.5.3 サブ流域の地形量特性

- 1) サブ流域の流域面積，リンク長は何れも左に偏った確率分布になり，対数正規分布やガンマ分布で近似できる．本研究ではガンマ分布を採用し，実流域のサブ流域面積，リンク長の1～4次モーメントがガンマ分布で良く近似できることを示した．
- 2) 任意のマグニチュードのときのサブ流域の流域面積，リンク長とその勾配と流路長の確率分布特性を調べ，地図の縮尺に相当するマグニチュードとの関係を明らかにした．その結果を基に，任意のマグニチュードの平均値，分散等を推定する式を提案した．
- 3) サブ流域の斜面地形量として雨水経路長とその勾配を計測した．その結果，雨水経路長の確率分布形は指数分布に，雨水経路勾配の分布形は対数正規分布に類似している．また，内部リンクと外部リンクでは確率分布に違いがみられた．
- 4) 雨水経路長に対し，矩形近似した求めた斜面長は外部リンクにおける河道長（リンク長）の変動が激しいため，極端に長い斜面長が発生する可能性がある．特に，平均サブ流域面積が大きくなるほどその傾向は強く，平均サブ流域面積が大きくなると，経路長と斜面長の比は大きくなり，その増加傾向は流域毎に違いがみられた．

参考文献

- 1) Horton, R. E.: Erosional development of streams and their drainage basins : Hydrophysical approach to quantitative morphology, *Geol. Soc. Amer.*, Bull.56, 1945.
- 2) Strahler, A, N.: Hypsometric (Area-altitude) analysis of erosional topography, *Bull. G. S. A.*, Vol. 63, pp.1117-1142, 1952.
- 3) Shreve, R. L.: Statistical law of stream numbers, *J. Geology*, Vol.74(1), pp.17-37, 1966.
- 4) Mandelbrot, N.: *Trees and Networks in Biological Models*, John Wiley, New York, 1983.
- 5) Tarboton, D. G., Bras, R. L., and Rodriguez-Iturbe, I.: The fractal nature of river networks, *Water Resources Research*, Vol. 24, No. 8, pp.1317-1322, 1988.
- 6) Barbera, P. L. and Rosso, R. On the fractal dimension of stream networks, *Water Resources Research*, Vol. 25, No. 4, pp.735-741, 1989.
- 7) 宝馨, 高棹琢馬, 杉原宏章: 数値地形情報に基づく河川流域のフラクタル次元について, 水工学論文集, 第 35 巻, pp.135-142, 1991.
- 8) 岩佐義朗, 小林信久: マグニチュード理論による河道網の連結構造に関する統計則と指標, 土木学会論文報告集, 第 273 号, pp.35-46, 1978.
- 9) 岩佐義朗, 小林信久: マグニチュードに基づく流域地形統計則およびその位数理論との関連性, 土木学会論文報告集, 第 273 号, pp.47-58, 1978.
- 10) 石原藤次郎, 高棹琢馬, 瀬能邦雄: 河道配列の統計則に関する基礎的研究, 京都大学防災研究所年報, 第 12 号 B, pp.345-365, 1969.
- 11) 藤田睦博: 流域地形構造とその統計則に関する基礎的研究, 土木学会論文報告集, 第 234 号, pp.73-82, 1975.

- 12) 高棹琢馬, 宝馨, 溝渕伸一, 杉原宏章: コンピュータを用いた水文地形解析序論, 京都大学防災研究所年報, 第 31 号 B-2, pp.325-340, 1988.
- 13) 宝馨, 高棹琢馬, 溝渕伸一, 杉原宏章: 国土数値情報を用いた水文地形解析に関する基礎的研究, 京都大学防災研究所年報, 第 32 号 B-2, pp.435-454, 1989.
- 14) 星 仰, 地形情報処理学, 森北出版, 1991.
- 15) 国土庁計画・調整局, 建設省国土地理院, 国土数値情報, 大蔵省印刷局, 1987.
- 16) 立川康人, 椎葉充晴, 高棹琢馬: 三角形要素網による流域地形の数値表現に関する研究, 平成 7 年度文部省科学研究費 (試験研究 (B)) 研究成果報告書「流域特性のメッシュ集中化によるマクロ水文モデルの開発」, pp.19-34, 1996.
- 17) Konecny, G., Lohmann, P., Engel, H., and Johnson, D.L.: Evaluation of SPOT imagery on analytical photogrammetric instruments, *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, Vol. 53, pp. 1223-1230, 1987.
- 18) Moore, I.D., Grayson, R.B., and Ladson, A.R.: Digital Terrain modelling: a review of hydrological, geomorphological, and biological applications, *Hydrological Processes*, Vol. 5, pp.3-30, 1991.
- 19) O'Callaghan, J. and D. M. Mark: The extraction of drainage networks from digital elevation data, *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, Vol. 28, pp.323-344, 1984.
- 20) Band, L.: Topographic Partition of watershed with digital elevation models, *Water Resources Research*, Vol.22, No.1, pp.15-24, 1986.
- 21) 野上道男, 杉浦芳夫: パソコンによる数値地理学演習, 古今書院, 1986.
- 22) Jenson, S. K., and J. O. Domingue, Extracting topographic structure from digital elevation data for geographic information system analysis, *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, Vol.54, No.11, pp.1593-1600, 1988.
- 23) Hutchinson, M. F.: A new procedure for gridding elevation and stream line data with automatic removal of spurious pits, *Journal of Hydrology*, Vol. 106, pp.211-320, 1988.
- 24) 藤田睦博, 道口敏幸, 榎国夫: 小流域の擬似河道網と流出, 水工学論文集, 第 35 巻, pp.149-154, 1991.

- 25) Fairfield, J., and P. Leymarie: Drainage networks from grid digital elevation models, *Water Resources Research*, Vol. 27, No.5, pp.709-717, 1991.
- 26) Quinn, P., K. Beven, P. Chevalier, and O. Planchon: The prediction of hillslope flow paths for distributed hydrological modelling using digital terrain models, *Hydrological Processes*, Vol.5, pp.59-79, 1991.
- 27) Lea, N. L.: An aspect driven kinematic routing algorithm, in *Overland Flow: Hydraulics and Erosion Mechanics*, edited by A. J. Parsons and A. D. Abrahams, Chapman and Hall, New York, 1992.
- 28) Tribe, A.: Automated recognition of valley lines and drainage networks from grid digital elevation models: a review and a new method, *Journal of Hydrology*, Vol.139, pp.263-293, 1992.
- 29) Dietrich, W. E., C.J. Wilson, D. R. Montgomery, J. McKean, and R. Bauer: Erosion thresholds and land surface morphology, *Geology*, Vol.20, pp.675-679, 1992.
- 30) Montgomery, D. R., and E. Foufoula-Georgiou: Channel network source representation using digital elevation models, *Water Resources Research*, Vol.29, No.12, pp.3925-3934, 1993.
- 31) 早川博, 内島邦秀, 藤田睦博: グリッド型 DEM による擬河道網の抽出手法の検討, 水工学論文集, 第 39 巻, pp.121-126, 1995.
- 32) 角屋睦: 流出解析手法 (その 1), 農業土木学会誌, 第 47 巻, 第 10 号, pp.63-73, 1979.
- 33) 高棹琢馬, 椎葉充晴: 河川流域の地形構造を考慮した出水系モデルに関する研究, 土木学会論文報告集, 第 248 号, pp.69-82, 1976.
- 34) 道口敏幸, 藤田睦博: 国土数値情報による擬河道発生手法について, 土木学会北海道支部論文報告集, 第 46 号, pp.275-280, 1989.
- 35) Werner, C. and J.S. Smart: Some new methods of topologic classification of channel networks, *Geographical Analysis*, Vol.5, pp.271-295, 1973.
- 36) 早川 博, 藤田睦博: 流域の河道網構造を考慮した流出特性, 水工学論文集, 第 35 巻, pp.155-160, 1991.

- 37) Hayakawa, H., K. Uchijima and M. Fujita: A study on subcatchment scale for a distributed runoff model, *Environmental International*, Vol.21, No.5, pp.491-496, 1995.
- 38) 早川博, 藤田睦博, 内島邦秀: 流域地形特性を考慮した分布型流出モデルの確率応答に関する研究, 土木学会論文集, No.545/II-36, pp.11-22, 1996.
- 39) Hewlett, J.D. and A. R. Hibbert: Moisture and energy conditions within a sloping soil mass during drainage, *Journal of Geograpy. Res.*, Vol.64, pp.1081-1087, 1963.
- 40) Betson, R.P.: What is watershed runoff?, *Journal of Geography. Res.*, Vol.69, pp.1541-1552, 1964.
- 41) 早川 博: 分布型流出モデルのサブ流域スケールに関する一考察, 水工学論文集, 第36巻, pp.555-560, 1992.
- 42) Hayakawa, H. and M. Fujita: Development of distributed runoff modeling based on channel network property, *Proceedings of the Sixth IAHR International Symposium on Stochastic Hydraulics, Taipei*, pp.671-678, 1992.
- 43) Hayakawa, H. and M. Fujita: Basin scale for distributed runoff model based on channel network geometry, *Water Science and Technology Library*, Stochastic and Statistical Methods in Hydrology and Environmental Engineering, Vol.1, Extreme Values: Floods and Droughts *edited by* Keith W. Hipel, pp.355-368, Kluwer Academic Publishers, 1994.
- 44) Chow, V. T.: Handbook of applied hydrology, McGraw-Hill, Inc, 1964.
- 45) Rodriguez-Iturbe I., and Valdes, J. B. : The Geomorphologic Structure of Hydrologic Response, *Water Resources Research*, Vol. 15, No. 6, pp.1409-1420, 1979.
- 46) Gupta, V. and Mesa, J. : Runoff generation and hydrologic response via channel network geomorphology — Recent progress and open problems —, *J. Hydrology*, Vol. 102, pp.3-28, 1988.
- 47) 舘谷清, 藤田睦博: 河道網特性と貯留関数法に関する研究, 水文・水資源学会誌, Vol.2, No.2, 1989.
- 48) 島野安雄: Link magnitude 方式による水系網について, 日本地理学会春季大会予稿集(4), pp.94-95, 1973.

- 49) 友杉邦雄: 河域地形構成要素の平面量の分布特性に関する研究, 京大防災研究所年報, 第 19 号 B, pp.65-80, 1976.
- 50) 角屋睦, 福島晟, 佐合純造: 丘陵山地流域モデルと洪水流出モデル, 京都大学防災研究所年報, 第 21 号 B-2, 1978.
- 51) 藤田睦博: 流域の地形構造を考慮した貯留関数法に関する研究, 北海道大学学位論文, 1982.
- 52) 早川博, 田中裕樹, 内島邦秀: 流域斜面の地形量特性に関する解析, 土木学会北海道支部論文報告集, 第 49 号, pp.489-494, 1993.
- 53) 立川康人, 高棹琢馬, 椎葉充晴, 杉原宏章, 農田康一: 流域斜面の流下距離分布について, 土木学会第 46 回年次学術講演会 II, 1991.
- 54) 室田 明, 江藤剛治, 田中 剛: 水文量の和に関する統計的研究, 土木学会論文報告集, 第 223 号, pp.23-31, 1974.

第3章 流域地形量の変動による流出量の確率応答

3.1 概説

流域はサブ流域の集合体であり，サブ流域の空間的な配置が河道網構造を表している．流域末端における流出量 $Q_n(t)$ は各サブ流域の流出量 $q_i(t)$ を河道網構造に従って集水・合成したものである．

流域をサブ流域に分割する方法としては，図-3.1 のように河道網の構造に従って分割するのが自然であろう．その結果，分割されたサブ流域の面積 A_i とそれに付随する河道長 L_i 等の地形量は，前章で述べたように確率変動している．サブ流域の地形量が確率変動しているので，当然サブ流域からの流出量も確率変動することになる．

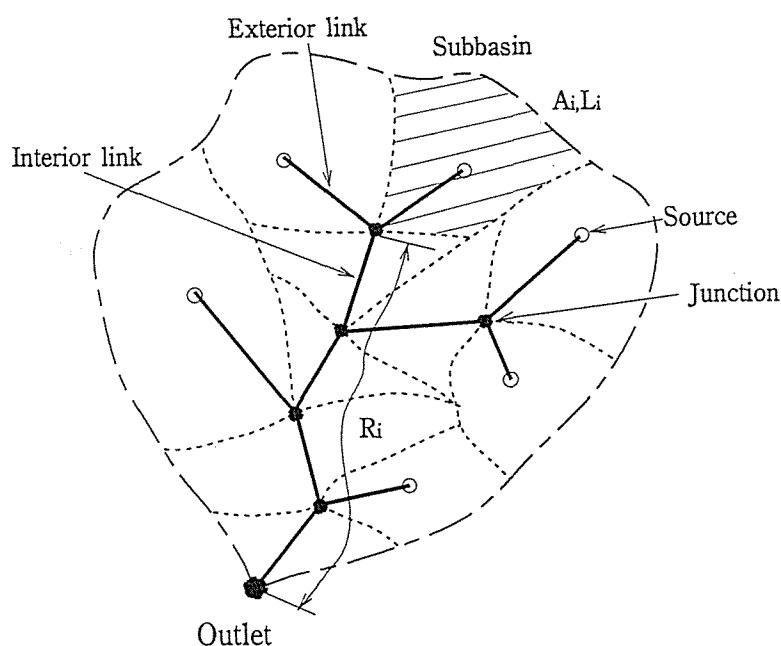


図-3.1 流域の概要

本章はこの流域地形量の確率変動特性と流出現象の関係を解明するため，降雨－流出変換

系のシステム方程式である，流出モデルの流出パラメータが確率変動する場合の流出量の確率応答特性を，理論的に導こうとするものである．

流出モデルのパラメータは降雨等の影響を受け時間的に変動するものもあるが，ここでは流域の地形量，例えば流域面積，河道長，斜面長や勾配等の空間的な変動に支配されている場合の流出量の確率応答に焦点を当てる．この観点から，採用すべき流出モデルとしては分布型流出モデルが妥当である．

一般に流域が n 個のサブ流域から構成されている場合，最も単純な分布型流出モデルは次式で表される．

$$Q_n(t) = \sum_{i=1}^n q_i(t - \tau_i) \dots\dots\dots (3.1)$$

ここで， $Q_n(t)$ が流域の出口での流出量で， $q_i(t)$ が各サブ流域からの流出量である． τ_i は i 番目のサブ流域からの流出量が出口に到達する時間，あるいは流出の遅れ時間とも考えることが出来る．

これまで提案されている数多くの分布型流出モデルも，その基本形は式 (3.1) に集約できる．各サブ流域の面積や勾配，その他地質・植生など流出に関係する要素は各々異なり，この流出モデルに含まれるパラメータがサブ流域毎に異なることになる．つまり，流出パラメータが確率変動すると，式 (3.1) のサブ流域からの流出量 $q_i(t)$ が確率変動することになる．

また，各サブ流域からの流出量が河道を流下して，流域末端の出口まで流下する時間を流出の遅れ時間 τ_i と考えると，この遅れ時間の変動は図-3.1 に示すようにサブ流域から流域の出口までの河道長 R_i の確率変動に支配される．この河道長の確率分布は河道網構造によって規定されているので，式 (3.1) の遅れ時間 τ_i の確率変動は河道網パターンの変動による流出の確率変動を表すことになる．

一方，流域への入力である降雨が確率変動する場合もまた，流出量は確率変動する．降雨の変動は，空間的変動と時間的変動が考えられる．高棹・宝ら¹⁾は降雨の時間的変動だけの場合の確率変動特性をシミュレーション法によって評価した．最近，藤田・工藤ら²⁾は同じく降雨の時間変動による流出量の確率変動特性を理論的に導いている．

以上のように，流出量の確率変動は，降雨－流出変換系のシステム方程式自体が確率変動する場合と，入力である降雨が確率変動する場合の複合した確率過程である．

本研究は，システム方程式が確率変動する場合の流出量の確率応答に着目した．本章では第3章2節で，サブ流域の地形量が確率変動することによるサブ流域の流出量の確率応答を，第3章3節で河道網パターンが確率変動する場合の流出量の確率変動，最後第3章4節で両者を組合わせた流域全体からの流出量の確率応答を理論的に誘導した．

3.2 サブ流域からの流出量の確率応答

本節は、サブ流域の地形量等が確率変動することによって、降雨－流出変換系のシステム方程式が確率変動する場合のサブ流域の流出量の確率応答について、解析的な取り扱いを行う。

サブ流域を流域の最小基本単位と考えると、本研究の目的から、サブ流域の流出モデルにはいわゆる集中型流出モデルで良いであろう。集中型流出モデルの代表的なものにタンクモデル、貯留関数法や単位図法等が挙げられる。本研究は流出パラメータの確率変動による流出量の確率変動の議論を目的としているので、パラメータ数の多いタンクモデルは流出量の確率変動量の理論解を誘導するのには不適當である。単位図法は、地形量を取り入れて単位図を決定する GIUH(Geomorphologic Instantaneous Unit Hydrograph) モデル⁴⁾⁵⁾が提案されているが、本邦の河川流域への適用を考えると、まだ課題が残されている。

したがって、本論文では本邦で広く用いられ、かつ運動学的モデルである Kinematic Wave 法と関連付けることにより流出パラメータと地形特性量との関係が得られている貯留関数法を採用して、流出量の確率変動量の理論解を誘導する²³⁾。

3.2.1 基礎理論

本邦で広く用いられている貯留関数法は、流域を一つの容器とみなして、流域の貯留量 $S(t)$ と流出量 $q(t)$ 、降雨量 $r(t)$ の間の関係を基にして導かれた流出モデルである。流出量と貯留量との間には、図-3.2 に示すような 2 価の非線形関数関係にあることが知られている。

星ら¹⁴⁾はこの貯留量－流出量の間 2 価関数性を表現するために、次式のように非定常効果を表す流出量の微分項を付加した 2 価の非線形貯留方程式を提案している。この星モデルは北海道開発局において流出解析や流出予測に採用されている、実績のある流出モデルである。

$$\frac{dS}{dt} + q = r \quad \dots\dots\dots (3.2)$$

$$S = K_1 q^{P_1} + K_2 \frac{dq^{P_2}}{dt} \quad \dots\dots\dots (3.3)$$

ここで、 K_1, K_2 :貯留係数、 P_1, P_2 :貯留指数、 q :流出量(流出高: mm/hr)、 S :貯留量(貯留高: mm)である。

本研究は上式の貯留係数 K_1, K_2 が流域面積 A_i の関数であると仮定することによって、上式の微分方程式を確率微分方程式として扱い³⁾、サブ流域面積が確率変動する場合の流出量の確率応答を求めようとするものである。

貯留係数が一般に不規則関数であるとして、流出量の確率変動を導く基礎理論を展開す

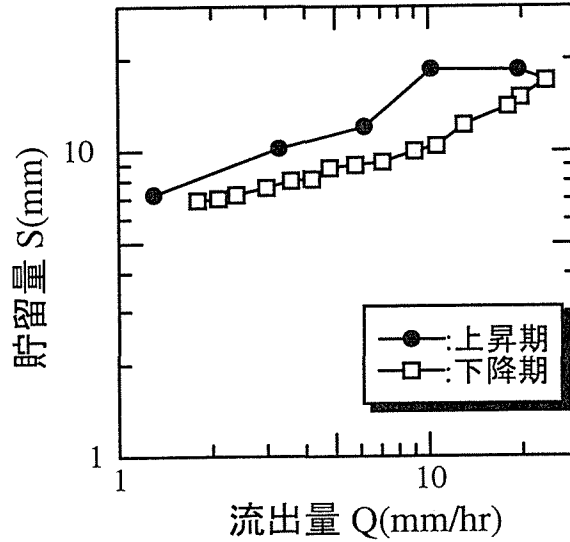


図-3.2 貯留量と流出量の関係

る。貯留係数が不規則関数であるので、流出量 q 、貯留量 S もまた不規則関数となる。このシステム方程式への入力である降水量 $r(t)$ も確率変数と考える事が出来るが、ここでは空間的に一様で時間的にも定常な降雨の場合を対象とした。

各々の確率変数を以下の様に平均値と平均値からの偏差に分けて考える。

$$K_1 = \bar{K}_1 + \tilde{K}_1, E[\tilde{K}_1] = 0 \quad (3.4)$$

$$K_2 = \bar{K}_2 + \tilde{K}_2, E[\tilde{K}_2] = 0 \quad (3.5)$$

$$q = \bar{q} + \tilde{q}, E[\tilde{q}] = 0 \quad (3.6)$$

ここで、貯留係数 K_1, K_2 の統計量は次のように与えられる。

$$E[\tilde{K}_1^2] = \sigma_{K_1}^2, E[\tilde{K}_2^2] = \sigma_{K_2}^2 \quad (3.7)$$

$$E[\tilde{K}_1^3] = \mu_{3K_1}, E[\tilde{K}_2^3] = \mu_{3K_2} \quad (3.8)$$

$$E[\tilde{K}_1^4] = \mu_{4K_1}, E[\tilde{K}_2^4] = \mu_{4K_2} \quad (3.9)$$

式(3.3)の非線形貯留方程式の非線形項であるベキ乗型の確率変数 q^{P_1}, q^{P_2} は藤田ら²⁾の手法と同様に次のように線形近似する。

$$(\bar{q} + \tilde{q})^{P_1} = \alpha_1 \bar{q} + \beta_1 \tilde{q} \quad (3.10)$$

$$(\bar{q} + \tilde{q})^{P_2} = \alpha_2 \bar{q} + \beta_2 \tilde{q} \quad (3.11)$$

係数 $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ は、Bras ら¹⁵⁾が提案した上式の両辺の誤差の平均値を0に、また分散を最小にする条件から、次のように決定する。

$$\alpha_i = \bar{q}^{P_i-1} \left\{ 1 + \frac{1}{2} P_i (P_i - 1) \frac{E[\tilde{q}^2]}{\bar{q}^2} + \frac{1}{6} P_i (P_i - 1) (P_i - 2) \frac{E[\tilde{q}^3]}{\bar{q}^3} + \dots \right\} \quad (3.12)$$

$$\beta_i = \frac{\bar{q}^{P_i+1}}{E[\bar{q}^2]} \left\{ P_i \frac{E[\tilde{q}^2]}{\bar{q}^2} + \frac{1}{2} P_i(P_i-1) \frac{E[\tilde{q}^3]}{\bar{q}^3} + \frac{1}{6} P_i(P_i-1)(P_i-2) \frac{E[\tilde{q}^4]}{\bar{q}^4} + \dots \right\} \quad (i=1,2) \quad (3.13)$$

次に、式(3.3)~(3.6)を用いて、式(3.2)を書き直す。ここで、今後の式の展開を容易にするため、次の変数変換を行う。

$$\bar{Q} = \alpha_2 \bar{q}, \quad \tilde{Q} = \beta_2 \tilde{q} \quad \dots\dots\dots (3.14)$$

その結果、式(3.2)は次式で表される。

$$\frac{d^2}{dt^2} \{ (\bar{K}_2 + \tilde{K}_2)(\bar{Q} + \tilde{Q}) \} + \frac{d}{dt} \left\{ (\bar{K}_1 + \tilde{K}_1) \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \bar{Q} + \frac{\beta_1}{\beta_2} \tilde{Q} \right) \right\} + \frac{\bar{Q}}{\alpha_2} + \frac{\tilde{Q}}{\beta_2} = r \quad \dots (3.15)$$

式(3.15)の期待値をとると

$$\frac{d^2}{dt^2} \{ \bar{K}_2 \bar{Q} + E[\tilde{K}_2 \tilde{Q}] \} + \frac{d}{dt} \left\{ \bar{K}_1 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \bar{Q} + \frac{\beta_1}{\beta_2} E[\tilde{K}_1 \tilde{Q}] \right\} + \frac{\bar{Q}}{\alpha_2} = r \quad \dots\dots\dots (3.16)$$

となる。さらに、式(3.15)から式(3.16)を差し引くと

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \{ \bar{K}_2 \tilde{Q} + \tilde{K}_2 \bar{Q} + \tilde{K}_2 \tilde{Q} - E[\tilde{K}_2 \tilde{Q}] \} + \frac{d}{dt} \left\{ \bar{K}_1 \frac{\beta_1}{\beta_2} \tilde{Q} + \tilde{K}_1 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \bar{Q} + \tilde{K}_1 \frac{\beta_1}{\beta_2} \tilde{Q} \right. \\ \left. - \frac{\beta_1}{\beta_2} E[\tilde{K}_1 \tilde{Q}] \right\} + \frac{\tilde{Q}}{\beta_2} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.17) \end{aligned}$$

となる。式(3.16), (3.17)はさらに変形でき、以下のようになる。

$$\frac{d^2 \bar{Q}}{dt^2} + f_1(t) \frac{d\bar{Q}}{dt} + g_1(t) \bar{Q} = h_1(t) \quad \dots\dots\dots (3.18)$$

$$\frac{d^2 \tilde{Q}}{dt^2} + f_2(t) \frac{d\tilde{Q}}{dt} + g_2(t) \tilde{Q} = h_2(t) \quad \dots\dots\dots (3.19)$$

ここで、

$$f_1(t) = \frac{\bar{K}_1}{\bar{K}_2} \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \quad \dots\dots\dots (3.20)$$

$$g_1(t) = \frac{1}{\bar{K}_2} \left\{ \bar{K}_1 \frac{d}{dt} \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2} \right\} \quad \dots\dots\dots (3.21)$$

$$h_1(t) = \frac{1}{\bar{K}_2} \left[r - \frac{d^2}{dt^2} E[\tilde{K}_2 \tilde{Q}] - \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\beta_1}{\beta_2} E[\tilde{K}_1 \tilde{Q}] \right\} \right] \quad \dots\dots\dots (3.22)$$

$$f_2(t) = \frac{\bar{K}_1}{\bar{K}_2} \frac{\beta_1}{\beta_2} \quad \dots\dots\dots (3.23)$$

$$g_2(t) = \frac{1}{\bar{K}_2} \left\{ \bar{K}_1 \frac{d}{dt} \left(\frac{\beta_1}{\beta_2} \right) + \frac{1}{\beta_2} \right\} \quad \dots\dots\dots (3.24)$$

$$\begin{aligned} h_2(t) = \frac{1}{\bar{K}_2} \left[\frac{d^2}{dt^2} \{ E[\tilde{K}_2 \tilde{Q}] - \tilde{K}_2 \bar{Q} - \tilde{K}_2 \tilde{Q} \} + \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\beta_1}{\beta_2} E[\tilde{K}_1 \tilde{Q}] - \tilde{K}_1 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \bar{Q} - \tilde{K}_1 \frac{\beta_1}{\beta_2} \tilde{Q} \right\} \right] \\ \dots\dots\dots (3.25) \end{aligned}$$

である。つまり、式(3.18),(3.19)が流出量の平均値と確率変動成分を与える基本式である。

3.2.2 流出量の平均値

式 (3.16) あるいは式 (3.18) が流出量の平均値を与える基本式であり、これを解くためには、 $E[\tilde{K}_1\tilde{Q}]$, $E[\tilde{K}_2\tilde{Q}]$ の値が必要である。この値は式 (3.17) に \tilde{K}_1 , \tilde{K}_2 を乗じて、その期待値をとることによって求めることが出来るが、これらの式を解くためにはさらに高次の相関係数 $E[\tilde{K}_1^i\tilde{Q}]$, $E[\tilde{K}_2^j\tilde{Q}]$, $E[\tilde{K}_1^i\tilde{K}_2^j\tilde{Q}]$ 等が必要になる。ここでは5次以上の相関係数を無視して流量の平均値を求めることにする。4次までの相関係数はこの後に誘導する流出量の分散、3次・4次モーメントも必要となるため、事前に求めておくことにする。

まず、数式の表現を簡略化するために以下の式を定義しておく。

$$X_i = E[\tilde{K}_1^i\tilde{Q}] \dots\dots\dots (3.26)$$

$$Y_i = E[\tilde{K}_2^i\tilde{Q}] \dots\dots\dots (3.27)$$

$$Z_{ij} = E[\tilde{K}_1^i\tilde{K}_2^j\tilde{Q}] \dots\dots\dots (3.28)$$

$$W_{ij} = E[\tilde{K}_1^i\tilde{K}_2^j] \dots\dots\dots (3.29)$$

式 (3.17) に \tilde{K}_1 , \tilde{K}_2 , \tilde{K}_1^2 , \tilde{K}_2^2 , $\tilde{K}_1\tilde{K}_2$, \tilde{K}_1^3 , \tilde{K}_2^3 , $\tilde{K}_1^2\tilde{K}_2$, $\tilde{K}_1\tilde{K}_2^2$, \tilde{K}_1^4 , \tilde{K}_2^4 , $\tilde{K}_1^3\tilde{K}_2$, $\tilde{K}_1^2\tilde{K}_2^2$ と $\tilde{K}_1\tilde{K}_2^3$ を掛けて期待値をとり、式を整理すると、 X_i, Y_i, Z_{ij} は以下のようなになる。

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{X}}{dt^2} + f_2(t)\frac{d\mathbf{X}}{dt} + g_2(t)\mathbf{X} = & \frac{1}{\bar{K}_2} \left[\frac{d^2}{dt^2} \{ \mathbf{B}_1 Y_1 - \mathbf{B}_2 \bar{Q} - \mathbf{B}_3 \} \right. \\ & \left. + \frac{d}{dt} \left\{ \mathbf{B}_1 \frac{\beta_1}{\beta_2} X_1 - \mathbf{B}_4 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \bar{Q} - \mathbf{B}_5 \frac{\beta_1}{\beta_2} \right\} \right] \dots\dots\dots (3.30) \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= [X_1, Y_1, X_2, Y_2, Z_{11}, X_3, Y_3, Z_{21}, Z_{12}, X_4, Y_4, Z_{31}, Z_{22}, Z_{13}]^T \\ \mathbf{B}_1 &= [0, 0, \sigma_{K_1}^2, \sigma_{K_2}^2, W_{11}, \mu_{3K_1}, \mu_{3K_2}, W_{21}, W_{12}, \mu_{4K_1}, \mu_{4K_2}, W_{31}, W_{22}, W_{13}]^T \\ \mathbf{B}_2 &= [W_{11}, \sigma_{K_2}^2, W_{21}, \mu_{3K_2}, W_{12}, W_{31}, \mu_{4K_2}, W_{22}, W_{13}, 0, 0, 0, 0, 0]^T \\ \mathbf{B}_3 &= [Z_{11}, Y_2, Z_{21}, Y_3, Z_{12}, Z_{31}, Y_4, Z_{22}, Z_{13}, 0, 0, 0, 0, 0]^T \\ \mathbf{B}_4 &= [\sigma_{K_1}^2, W_{11}, \mu_{3K_1}, W_{12}, W_{21}, \mu_{4K_1}, W_{13}, W_{31}, W_{22}, 0, 0, 0, 0, 0]^T \\ \mathbf{B}_5 &= [X_2, Z_{11}, X_3, Z_{12}, Z_{21}, X_4, Z_{13}, Z_{31}, Z_{22}, 0, 0, 0, 0, 0]^T \end{aligned}$$

である。なお、 $[\]^T$ は転置行列を表す。

したがって、流出量の平均値 $\bar{Q}(t)$ は式 (3.16) と式 (3.30) の連立微分方程式の解として与えられる。その結果、サブ流域の流出量の平均値 $\bar{q}(t)$ は、式 (3.14) の関係から次式となる。

$$\bar{q}(t) = \frac{\bar{Q}(t)}{\alpha_2(t)} \dots\dots\dots (3.31)$$

3.2.3 流出量の分散

式 (3.19) は流出量の変動成分 \tilde{Q} を与える基本式であり、この式を解くためには、次式のよ
うに連立 1 階微分方程式に変形して解くのが一般的である。

$$\frac{d\tilde{Q}}{dt} = \tilde{Q}_1 \dots\dots\dots (3.32)$$

$$\frac{d\tilde{Q}_1}{dt} + f_2(t)\tilde{Q}_1 + g_2(t)\tilde{Q} = h_2(t) \dots\dots\dots (3.33)$$

流出量の分散は上式の \tilde{Q} を 2 乗して、その期待値をとったものである。つまり、式 (3.32) の
両辺に \tilde{Q} を掛けて、その期待値をとることに相当する。

$$\frac{dE[\tilde{Q}^2]}{dt} = 2E[\tilde{Q}_1\tilde{Q}] \dots\dots\dots (3.34)$$

なお、これ以降演算子 E [変数 x] は変数 x の期待値を表すことにする。上式の $E[\tilde{Q}_1\tilde{Q}]$ は式
(3.33) の両辺に \tilde{Q} を掛けて、期待値をとれば良い。

$$\frac{dE[\tilde{Q}_1\tilde{Q}]}{dt} + f_2(t)E[\tilde{Q}_1\tilde{Q}] = E[h_2(t)\tilde{Q}] - g_2(t)E[\tilde{Q}^2] + E[\tilde{Q}_1^2] \dots\dots\dots (3.35)$$

上式の $E[\tilde{Q}_1^2]$ も同様に式 (3.33) に \tilde{Q}_1 を掛けて期待値をとると、

$$\frac{dE[\tilde{Q}_1^2]}{dt} + 2f_2(t)E[\tilde{Q}_1^2] = 2E[h_2(t)\tilde{Q}_1] - 2g_2(t)E[\tilde{Q}_1\tilde{Q}] \dots\dots\dots (3.36)$$

となる。

したがって、上式を連立させて解くことにより、流出量の分散 $E[\tilde{Q}^2]$ が得られる。ただし、
上式中の $E[h_2(t)\tilde{Q}]$, $E[h_2(t)\tilde{Q}_1]$ がまだ未知量として残されているので、次にこれらを求め
よう。

式 (3.25) の $h_2(t)$ に \tilde{Q}_1 , \tilde{Q} を掛けて、その期待値を考える。ここで、 $h_2(t)$ は式の中に確率変
数である \tilde{Q} の微分項 $d^2\tilde{Q}/dt^2$, $d\tilde{Q}/dt$ があるために、単純に \tilde{Q}_1 , \tilde{Q} を掛けて期待値をとる操作
が出来ない。そこで、式 (3.22), (3.23) の関係を $h_2(t)$ に代入して、確率変数の微分項の次数
を下げ、定数項で置き換えることを考えると、 $h_2(t)$ は次式となる。

$$h_2(t) = \frac{1}{\tilde{K}_2} \left[\frac{d^2 Y_1}{dt^2} - \tilde{K}_2 \frac{d^2 \tilde{Q}}{dt^2} + f_2(t)\tilde{K}_2\tilde{Q}_1 + g_2(t)\tilde{K}_2\tilde{Q} + \frac{d\beta_1}{dt\beta_2}X_1 - \tilde{K}_1 \frac{d\alpha_1}{dt\alpha_2}\tilde{Q} \right. \\ \left. - \frac{\beta_1}{\beta_2}\tilde{K}_1\tilde{Q}_1 - \tilde{K}_1\tilde{Q} \frac{d\beta_1}{dt\beta_2} \right] - \frac{\tilde{K}_2 h_2(t)}{\tilde{K}_2^2} \dots\dots\dots (3.37)$$

$$= \frac{1}{\tilde{K}_2} \left[A_1(t) - A_2(t)\tilde{K}_2 + A_3(t)\tilde{K}_2\tilde{Q}_1 + A_4(t)\tilde{K}_2\tilde{Q} + A_5(t) - A_6(t)\tilde{K}_1 \right. \\ \left. - A_7(t)\tilde{K}_1\tilde{Q}_1 - A_8(t)\tilde{K}_1\tilde{Q} \right] - \frac{\tilde{K}_2 h_2(t)}{\tilde{K}_2^2} \dots\dots\dots (3.38)$$

ここで、式(3.38)の $A_1(t) \sim A_8(t)$ は式(3.37)の表現を簡素化したものである。また、最後の項 $\tilde{K}_2 h_2(t)$ は意識的に残しておき、 $h_2(t)$ に確率変数 \tilde{Q} 等を掛けて期待値を考えるときに再帰的に扱うことによって、最終的に高次の相関係数を無視する際に省略される項である。

式(3.38)に \tilde{Q}_1, \tilde{Q} を掛けて、その期待値を考えると、

$$\begin{aligned}
E[h_2(t)\tilde{Q}] = & \frac{1}{\tilde{K}_2} [-A_2 E[\tilde{K}_2 \tilde{Q}] + A_3 E[\tilde{K}_2 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] - A_4 E[\tilde{K}_2 \tilde{Q}^2] \\
& - A_6 E[\tilde{K}_1 \tilde{Q}] - A_7 E[\tilde{K}_1 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] + A_8 E[\tilde{K}_1 \tilde{Q}^2]] \\
& - \frac{1}{\tilde{K}_2^2} [A_1 E[\tilde{K}_2 \tilde{Q}] - A_2 E[\tilde{K}_2^2 \tilde{Q}] + A_3 E[\tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] \\
& - A_4 E[\tilde{K}_2^2 \tilde{Q}^2] + A_5 E[\tilde{K}_2 \tilde{Q}] - A_6 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2 \tilde{Q}] \\
& - A_7 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] + A_8 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2 \tilde{Q}^2]] \\
& + \frac{1}{\tilde{K}_2^3} [A_1 E[\tilde{K}_2^2 \tilde{Q}] - A_2 E[\tilde{K}_2^3 \tilde{Q}] + A_3 E[\tilde{K}_2^3 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] \\
& - A_4 E[\tilde{K}_2^3 \tilde{Q}^2] + A_5 E[\tilde{K}_2^2 \tilde{Q}] - A_6 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}] \\
& - A_7 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] + A_8 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}^2]] \\
& - \frac{1}{\tilde{K}_2^4} [A_1 E[\tilde{K}_2^3 \tilde{Q}] - A_2 E[\tilde{K}_2^4 \tilde{Q}] + A_5 E[\tilde{K}_2^3 \tilde{Q}] - A_6 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^3 \tilde{Q}]] \\
& + \frac{1}{\tilde{K}_2^5} (A_1 + A_5) E[\tilde{K}_2^4 \tilde{Q}] \dots\dots\dots (3.39)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[h_2(t)\tilde{Q}_1] = & \frac{1}{\tilde{K}_2} [-A_2 E[\tilde{K}_2 \tilde{Q}_1] + A_3 E[\tilde{K}_2 \tilde{Q}_1^2] - A_4 E[\tilde{K}_2 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] \\
& - A_6 E[\tilde{K}_1 \tilde{Q}_1] - A_7 E[\tilde{K}_1 \tilde{Q}_1^2] + A_8 E[\tilde{K}_1 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}]] \\
& - \frac{1}{\tilde{K}_2^2} [A_1 E[\tilde{K}_2 \tilde{Q}_1] - A_2 E[\tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1] + A_3 E[\tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1^2] \\
& - A_4 E[\tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] + A_5 E[\tilde{K}_2 \tilde{Q}_1] - A_6 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1] \\
& - A_7 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1^2] + A_8 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}]] \\
& + \frac{1}{\tilde{K}_2^3} [A_1 E[\tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1] - A_2 E[\tilde{K}_2^3 \tilde{Q}_1] + A_3 E[\tilde{K}_2^3 \tilde{Q}_1^2] \\
& - A_4 E[\tilde{K}_2^3 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] + A_5 E[\tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1] - A_6 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1] \\
& - A_7 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1^2] + A_8 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}]] \\
& - \frac{1}{\tilde{K}_2^4} [A_1 E[\tilde{K}_2^3 \tilde{Q}_1] - A_2 E[\tilde{K}_2^4 \tilde{Q}_1] + A_5 E[\tilde{K}_2^3 \tilde{Q}_1] \\
& - A_6 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^3 \tilde{Q}_1]] + \frac{1}{\tilde{K}_2^5} (A_1 + A_5) E[\tilde{K}_2^4 \tilde{Q}_1] \dots\dots\dots (3.40)
\end{aligned}$$

となる。

上式(3.39),(3.40)には、また新たに $E[\tilde{K}_1 \tilde{Q}^2]$ 等の相関係数が現れる。これらの相関係数を求めるためには、また \tilde{K}_1 等を式(3.32),(3.33)に掛けて期待値をとる操作を繰り返すこと

になる．式を整理して結果のみを示すと，以下のようになる．

$$\frac{dE[\tilde{\mathbf{K}}\tilde{Q}^2]}{dt} = 2E[\tilde{\mathbf{K}}\tilde{Q}_1\tilde{Q}] \dots\dots\dots (3.41)$$

$$\begin{aligned} \frac{dE[\tilde{\mathbf{K}}\tilde{Q}_1\tilde{Q}]}{dt} + f_2(t)E[\tilde{\mathbf{K}}\tilde{Q}_1\tilde{Q}] &= E[\tilde{\mathbf{K}}h_2(t)\tilde{Q}] - g_2(t)E[\tilde{\mathbf{K}}\tilde{Q}^2] \\ &\quad + E[\tilde{\mathbf{K}}\tilde{Q}_1^2] \dots\dots\dots (3.42) \end{aligned}$$

$$\frac{dE[\tilde{\mathbf{K}}\tilde{Q}_1^2]}{dt} + 2f_2(t)E[\tilde{\mathbf{K}}\tilde{Q}_1^2] = 2E[\tilde{\mathbf{K}}h_2(t)\tilde{Q}_1] - 2g_2(t)E[\tilde{\mathbf{K}}\tilde{Q}_1\tilde{Q}] \dots\dots\dots (3.43)$$

ここで， $\tilde{\mathbf{K}}$ は

$$\tilde{\mathbf{K}} = [\tilde{K}_1, \tilde{K}_2, \tilde{K}_1^2, \tilde{K}_1\tilde{K}_2, \tilde{K}_2^2, \tilde{K}_1^3, \tilde{K}_1^2\tilde{K}_2, \tilde{K}_1\tilde{K}_2^2, \tilde{K}_2^3]^T \dots\dots\dots (3.44)$$

とおいた．なお，上式(3.42),(3.43)に新たに現れた相関係数 $E[\tilde{\mathbf{K}}h_2(t)\tilde{Q}]$ と $E[\tilde{\mathbf{K}}h_2(t)\tilde{Q}_1]$ は以下のように整理できる．

$$\begin{aligned} E[\tilde{K}_1h_2(t)\tilde{Q}] &= \frac{1}{\tilde{K}_2} [A_1E[\tilde{K}_1\tilde{Q}] - A_2E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2\tilde{Q}] + A_3E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2\tilde{Q}_1\tilde{Q}] \\ &\quad - A_4E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2\tilde{Q}^2] + A_5E[\tilde{K}_1\tilde{Q}] - A_6E[\tilde{K}_1^2\tilde{Q}] \\ &\quad - A_7E[\tilde{K}_1^2\tilde{Q}_1\tilde{Q}] + A_8E[\tilde{K}_1^2\tilde{Q}^2]] \\ &\quad - \frac{1}{\tilde{K}_2^2} [A_1E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2\tilde{Q}] - A_2E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2^2\tilde{Q}] + A_3E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2^2\tilde{Q}_1\tilde{Q}] \\ &\quad - A_4E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2^2\tilde{Q}^2] + A_5E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2\tilde{Q}] - A_6E[\tilde{K}_1^2\tilde{K}_2\tilde{Q}] \\ &\quad - A_7E[\tilde{K}_1^2\tilde{K}_2\tilde{Q}_1\tilde{Q}] + A_8E[\tilde{K}_1^2\tilde{K}_2\tilde{Q}^2]] \\ &\quad + \frac{1}{\tilde{K}_2^3} [A_1E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2^2\tilde{Q}] - A_2E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2^3\tilde{Q}] + A_5E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2^2\tilde{Q}] \\ &\quad - A_6E[\tilde{K}_1^2\tilde{K}_2^2\tilde{Q}]] - \frac{1}{\tilde{K}_2^4} (A_1 + A_5)E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2^3\tilde{Q}] \dots\dots\dots (3.45) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[\tilde{K}_2h_2(t)\tilde{Q}] &= \frac{1}{\tilde{K}_2} [A_1E[\tilde{K}_2\tilde{Q}] - A_2E[\tilde{K}_2^2\tilde{Q}] + A_3E[\tilde{K}_2^2\tilde{Q}_1\tilde{Q}] \\ &\quad - A_4E[\tilde{K}_2^2\tilde{Q}^2] + A_5E[\tilde{K}_2\tilde{Q}] - A_6E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2\tilde{Q}] \\ &\quad - A_7E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2\tilde{Q}_1\tilde{Q}] + A_8E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2\tilde{Q}^2]] \\ &\quad - \frac{1}{\tilde{K}_2^2} [A_1E[\tilde{K}_2^2\tilde{Q}] - A_2E[\tilde{K}_2^3\tilde{Q}] + A_3E[\tilde{K}_2^3\tilde{Q}_1\tilde{Q}] \\ &\quad - A_4E[\tilde{K}_2^3\tilde{Q}^2] + A_5E[\tilde{K}_2^2\tilde{Q}] - A_6E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2^2\tilde{Q}] \\ &\quad - A_7E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2^2\tilde{Q}_1\tilde{Q}] + A_8E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2^2\tilde{Q}^2]] \\ &\quad + \frac{1}{\tilde{K}_2^3} [A_1E[\tilde{K}_2^3\tilde{Q}] - A_2E[\tilde{K}_2^4\tilde{Q}] + A_5E[\tilde{K}_2^3\tilde{Q}] \\ &\quad - A_6E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2^3\tilde{Q}]] - \frac{1}{\tilde{K}_2^4} (A_1 + A_5)E[\tilde{K}_2^4\tilde{Q}] \dots\dots\dots (3.46) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[\tilde{K}_1^2 h_2(t) \tilde{Q}] &= \frac{1}{\tilde{K}_2} \left[A_1 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{Q}] - A_2 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{K}_2 \tilde{Q}] + A_3 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] \right. \\
&\quad - A_4 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{K}_2 \tilde{Q}^2] + A_5 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{Q}] - A_6 E[\tilde{K}_1^3 \tilde{Q}] \\
&\quad \left. - A_7 E[\tilde{K}_1^3 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] + A_8 E[\tilde{K}_1^3 \tilde{Q}^2] \right] \\
&\quad - \frac{1}{\tilde{K}_2^2} \left[A_1 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{K}_2 \tilde{Q}] - A_2 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}] + A_5 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{K}_2 \tilde{Q}] \right. \\
&\quad \left. - A_6 E[\tilde{K}_1^3 \tilde{K}_2 \tilde{Q}] \right] + \frac{1}{\tilde{K}_2^3} (A_1 + A_5) E[\tilde{K}_1^2 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}] \dots\dots\dots (3.47)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2 h_2(t) \tilde{Q}] &= \frac{1}{\tilde{K}_2} \left[A_1 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2 \tilde{Q}] - A_2 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}] + A_3 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] \right. \\
&\quad - A_4 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}^2] + A_5 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2 \tilde{Q}] - A_6 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{K}_2 \tilde{Q}] \\
&\quad \left. - A_7 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] + A_8 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{K}_2 \tilde{Q}^2] \right] \\
&\quad - \frac{1}{\tilde{K}_2^2} \left[A_1 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}] - A_2 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^3 \tilde{Q}] + A_5 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}] \right. \\
&\quad \left. - A_6 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}] \right] + \frac{1}{\tilde{K}_2^3} (A_1 + A_5) E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^3 \tilde{Q}] \dots\dots\dots (3.48)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[\tilde{K}_2^2 h_2(t) \tilde{Q}] &= \frac{1}{\tilde{K}_2} \left[A_1 E[\tilde{K}_2^2 \tilde{Q}] - A_2 E[\tilde{K}_2^3 \tilde{Q}] + A_3 E[\tilde{K}_2^3 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] \right. \\
&\quad - A_4 E[\tilde{K}_2^3 \tilde{Q}^2] + A_5 E[\tilde{K}_2^2 \tilde{Q}] - A_6 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}] \\
&\quad \left. - A_7 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] + A_8 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}^2] \right] \\
&\quad - \frac{1}{\tilde{K}_2^2} \left[A_1 E[\tilde{K}_2^3 \tilde{Q}] - A_2 E[\tilde{K}_2^4 \tilde{Q}] + A_5 E[\tilde{K}_2^3 \tilde{Q}] \right. \\
&\quad \left. - A_6 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^3 \tilde{Q}] \right] + \frac{1}{\tilde{K}_2^3} (A_1 + A_5) E[\tilde{K}_2^4 \tilde{Q}] \dots\dots\dots (3.49)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[\tilde{K}_1^3 h_2(t) \tilde{Q}] &= \frac{1}{\tilde{K}_2} \left[A_1 E[\tilde{K}_1^3 \tilde{Q}] - A_2 E[\tilde{K}_1^3 \tilde{K}_2 \tilde{Q}] + A_5 E[\tilde{K}_1^3 \tilde{Q}] \right. \\
&\quad \left. - A_6 E[\tilde{K}_1^4 \tilde{Q}] \right] - \frac{1}{\tilde{K}_2^2} (A_1 + A_5) E[\tilde{K}_1^3 \tilde{K}_2 \tilde{Q}] \dots\dots\dots (3.50)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[\tilde{K}_1^2 \tilde{K}_2 h_2(t) \tilde{Q}] &= \frac{1}{\tilde{K}_2} \left[A_1 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{K}_2 \tilde{Q}] - A_2 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}] + A_5 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{K}_2 \tilde{Q}] \right. \\
&\quad \left. - A_6 E[\tilde{K}_1^3 \tilde{K}_2 \tilde{Q}] \right] - \frac{1}{\tilde{K}_2^2} (A_1 + A_5) E[\tilde{K}_1^2 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}] \dots\dots\dots (3.51)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^2 h_2(t) \tilde{Q}] &= \frac{1}{\tilde{K}_2} \left[A_1 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}] - A_2 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^3 \tilde{Q}] + A_5 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}] \right. \\
&\quad \left. - A_6 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}] \right] - \frac{1}{\tilde{K}_2^2} (A_1 + A_5) E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^3 \tilde{Q}] \dots\dots\dots (3.52)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[\tilde{K}_2^3 h_2(t) \tilde{Q}] &= \frac{1}{\tilde{K}_2} \left[A_1 E[\tilde{K}_2^3 \tilde{Q}] - A_2 E[\tilde{K}_2^4 \tilde{Q}] + A_5 E[\tilde{K}_2^3 \tilde{Q}] \right. \\
&\quad \left. - A_6 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^3 \tilde{Q}] \right] - \frac{1}{\tilde{K}_2^2} (A_1 + A_5) E[\tilde{K}_2^3 \tilde{Q}] \dots\dots\dots (3.53)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[\tilde{K}_1 h_2(t) \tilde{Q}_1] &= \frac{1}{\tilde{K}_2} \left[A_1 E[\tilde{K}_1 \tilde{Q}_1] - A_2 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1] + A_3 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1^2] \right. \\
&\quad - A_4 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] + A_5 E[\tilde{K}_1 \tilde{Q}_1] - A_6 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{Q}_1] \\
&\quad \left. - A_7 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{Q}_1^2] + A_8 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] \right] \\
&- \frac{1}{\tilde{K}_2^2} \left[A_1 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1] - A_2 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1] + A_3 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1^2] \right. \\
&\quad - A_4 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] + A_5 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1] - A_6 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1] \\
&\quad \left. - A_7 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1^2] + A_8 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] \right] \\
&+ \frac{1}{\tilde{K}_2^3} \left[A_1 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1] - A_2 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^3 \tilde{Q}_1] + A_5 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1] \right. \\
&\quad \left. - A_6 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1] \right] - \frac{1}{\tilde{K}_2^4} (A_1 + A_5) E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^3 \tilde{Q}_1] \dots \dots \dots (3.54)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[\tilde{K}_2 h_2(t) \tilde{Q}_1] &= \frac{1}{\tilde{K}_2} \left[A_1 E[\tilde{K}_2 \tilde{Q}_1] - A_2 E[\tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1] + A_3 E[\tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1^2] \right. \\
&\quad - A_4 E[\tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] + A_5 E[\tilde{K}_2 \tilde{Q}_1] - A_6 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1] \\
&\quad \left. - A_7 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1^2] + A_8 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] \right] \\
&- \frac{1}{\tilde{K}_2^2} \left[A_1 E[\tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1] - A_2 E[\tilde{K}_2^3 \tilde{Q}_1] + A_3 E[\tilde{K}_2^3 \tilde{Q}_1^2] \right. \\
&\quad - A_4 E[\tilde{K}_2^3 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] + A_5 E[\tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1] - A_6 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1] \\
&\quad \left. - A_7 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1^2] + A_8 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] \right] \\
&+ \frac{1}{\tilde{K}_2^3} \left[A_1 E[\tilde{K}_2^3 \tilde{Q}_1] - A_2 E[\tilde{K}_2^4 \tilde{Q}_1] + A_5 E[\tilde{K}_2^3 \tilde{Q}_1] \right. \\
&\quad \left. - A_6 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^3 \tilde{Q}_1] \right] - \frac{1}{\tilde{K}_2^4} (A_1 + A_5) E[\tilde{K}_2^4 \tilde{Q}_1] \dots \dots \dots (3.55)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[\tilde{K}_1^2 h_2(t) \tilde{Q}_1] &= \frac{1}{\tilde{K}_2} \left[A_1 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{Q}_1] - A_2 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1] + A_3 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1^2] \right. \\
&\quad - A_4 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] + A_5 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{Q}_1] - A_6 E[\tilde{K}_1^3 \tilde{Q}_1] \\
&\quad \left. - A_7 E[\tilde{K}_1^3 \tilde{Q}_1^2] + A_8 E[\tilde{K}_1^3 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] \right] \\
&- \frac{1}{\tilde{K}_2^2} \left[A_1 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1] - A_2 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1] + A_5 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1] \right. \\
&\quad \left. - A_6 E[\tilde{K}_1^3 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1] \right] + \frac{1}{\tilde{K}_2^3} (A_1 + A_5) E[\tilde{K}_1^2 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1] \dots \dots \dots (3.56)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2 h_2(t) \tilde{Q}_1] &= \frac{1}{\tilde{K}_2} \left[A_1 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1] - A_2 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1] + A_3 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1^2] \right. \\
&\quad - A_4 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] + A_5 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1] - A_6 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1] \\
&\quad \left. - A_7 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1^2] + A_8 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] \right] \\
&- \frac{1}{\tilde{K}_2^2} \left[A_1 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1] - A_2 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^3 \tilde{Q}_1] + A_5 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1] \right. \\
&\quad \left. - A_6 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1] \right] + \frac{1}{\tilde{K}_2^3} (A_1 + A_5) E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^3 \tilde{Q}_1] \dots \dots \dots (3.57)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[\tilde{K}_2^2 h_2(t) \tilde{Q}_1] = & \frac{1}{\tilde{K}_2} \left[A_1 E[\tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1] - A_2 E[\tilde{K}_2^3 \tilde{Q}_1] + A_3 E[\tilde{K}_2^3 \tilde{Q}_1^2] \right. \\
& - A_4 E[\tilde{K}_2^3 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] + A_5 E[\tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1] - A_6 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1] \\
& \left. - A_7 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1^2] + A_8 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] \right] \\
& - \frac{1}{\tilde{K}_2^2} \left[A_1 E[\tilde{K}_2^3 \tilde{Q}_1] - A_2 E[\tilde{K}_2^4 \tilde{Q}_1] + A_5 E[\tilde{K}_2^3 \tilde{Q}_1] \right. \\
& \left. - A_6 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^3 \tilde{Q}_1] \right] + \frac{1}{\tilde{K}_2^3} (A_1 + A_5) E[\tilde{K}_2^4 \tilde{Q}_1] \dots\dots\dots (3.58)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[\tilde{K}_1^3 h_2(t) \tilde{Q}_1] = & \frac{1}{\tilde{K}_2} \left[A_1 E[\tilde{K}_1^3 \tilde{Q}_1] - A_2 E[\tilde{K}_1^3 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1] + A_5 E[\tilde{K}_1^3 \tilde{Q}_1] \right. \\
& \left. - A_6 E[\tilde{K}_1^4 \tilde{Q}_1] \right] - \frac{1}{\tilde{K}_2^2} (A_1 + A_5) E[\tilde{K}_1^3 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1] \dots\dots\dots (3.59)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[\tilde{K}_1^2 \tilde{K}_2 h_2(t) \tilde{Q}_1] = & \frac{1}{\tilde{K}_2} \left[A_1 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1] - A_2 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1] + A_5 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1] \right. \\
& \left. - A_6 E[\tilde{K}_1^3 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1] \right] - \frac{1}{\tilde{K}_2^2} (A_1 + A_5) E[\tilde{K}_1^2 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1] \dots\dots\dots (3.60)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^2 h_2(t) \tilde{Q}_1] = & \frac{1}{\tilde{K}_2} \left[A_1 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1] - A_2 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^3 \tilde{Q}_1] + A_5 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1] \right. \\
& \left. - A_6 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1] \right] - \frac{1}{\tilde{K}_2^2} (A_1 + A_5) E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^3 \tilde{Q}_1] \dots\dots\dots (3.61)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[\tilde{K}_2^3 h_2(t) \tilde{Q}_1] = & \frac{1}{\tilde{K}_2} \left[A_1 E[\tilde{K}_2^3 \tilde{Q}_1] - A_2 E[\tilde{K}_2^4 \tilde{Q}_1] + A_5 E[\tilde{K}_2^3 \tilde{Q}_1] \right. \\
& \left. - A_6 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^3 \tilde{Q}_1] \right] - \frac{1}{\tilde{K}_2^2} (A_1 + A_5) E[\tilde{K}_2^3 \tilde{Q}_1] \dots\dots\dots (3.62)
\end{aligned}$$

したがって、サブ流域からの流出量の分散 $\sigma_Q^2(t) (= E[\tilde{Q}(t)^2])$ は式(3.34)～(3.36), (3.41)～(3.43)の微分方程式を連立して解くことによって得られる。その結果、式(3.14)の関係を考慮すると、サブ流域からの流出量の分散 $\sigma_q^2(t)$ は最終的に次式となる。

$$\sigma_q^2(t) = \frac{\sigma_Q^2(t)}{\beta_2(t)^2} \dots\dots\dots (3.63)$$

3.2.4 流出量の3次モーメント

流出量の3次モーメントは \tilde{Q} を3乗したものの期待値である。これは前節で流出量の分散を求めた方法と同様に、式(3.32)の両辺に \tilde{Q}^2 を掛けて、その期待値をとることに相当する。

$$\frac{dE[\tilde{Q}^3]}{dt} = 3E[\tilde{Q}_1\tilde{Q}^2] \dots\dots\dots (3.64)$$

ここで、上式の $E[\tilde{Q}_1\tilde{Q}^2]$ は式(3.33)の両辺に \tilde{Q}^2 を掛けて、期待値をとることによって得られる。

$$\frac{dE[\tilde{Q}_1\tilde{Q}^2]}{dt} + f_2(t)E[\tilde{Q}_1\tilde{Q}^2] = E[h_2(t)\tilde{Q}^2] - g_2(t)E[\tilde{Q}^3] + 2E[\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}] \dots\dots\dots (3.65)$$

また、上式の $E[\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}]$ も式(3.32)に \tilde{Q}_1^2 を掛けて期待値をとることによって

$$\frac{dE[\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}]}{dt} + f_2(t)E[\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}] = 2E[h_2(t)\tilde{Q}_1\tilde{Q}] - 2g_2(t)E[\tilde{Q}_1\tilde{Q}^2] + E[\tilde{Q}_1^3] \dots\dots\dots (3.66)$$

となる。 $E[\tilde{Q}_1^3]$ も式(3.33)に \tilde{Q}_1^2 を掛けて期待値をとったものである。

$$\frac{dE[\tilde{Q}_1^3]}{dt} + 2f_2(t)E[\tilde{Q}_1^3] = 3E[h_2(t)\tilde{Q}_1^2] - 3g_2(t)E[\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}] \dots\dots\dots (3.67)$$

したがって、流出量の3次モーメントは上記の微分方程式を連立させて解いたものである。ただし、上式中の $E[h_2(t)\tilde{Q}^2]$ 、 $E[h_2(t)\tilde{Q}_1\tilde{Q}]$ と $E[h_2(t)\tilde{Q}_1^2]$ が未知量として残されているので、これらを次に求めよう。

式(3.38)に \tilde{Q}^2 、 $\tilde{Q}_1\tilde{Q}$ と \tilde{Q}^2 を掛けて、その期待値を各々考えると

$$\begin{aligned} E[h_2(t)\tilde{Q}^2] = & \frac{1}{\tilde{K}_2} [A_1E[\tilde{Q}^2] - A_2E[\tilde{K}_2\tilde{Q}^2] + A_3E[\tilde{K}_2\tilde{Q}_1\tilde{Q}^2] \\ & - A_4E[\tilde{K}_2\tilde{Q}^2] + A_5E[\tilde{Q}^2] - A_6E[\tilde{K}_1\tilde{Q}^2] \\ & - A_7E[\tilde{K}_1\tilde{Q}_1\tilde{Q}^2] + A_8E[\tilde{K}_1\tilde{Q}^3]] \\ & - \frac{1}{\tilde{K}_2^2} [A_1E[\tilde{K}_2\tilde{Q}^2] - A_2E[\tilde{K}_2^2\tilde{Q}^2] + A_3E[\tilde{K}_2^2\tilde{Q}_1\tilde{Q}^2] \\ & - A_4E[\tilde{K}_2^2\tilde{Q}^3] + A_5E[\tilde{K}_2\tilde{Q}^2] - A_6E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2\tilde{Q}^2] \\ & - A_7E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2\tilde{Q}_1\tilde{Q}^2] + A_8E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2\tilde{Q}^3]] \\ & + \frac{1}{\tilde{K}_2^3} [A_1E[\tilde{K}_2^2\tilde{Q}^2] - A_2E[\tilde{K}_2^3\tilde{Q}^2] + A_5E[\tilde{K}_2^2\tilde{Q}^2] \\ & - A_6E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2^2\tilde{Q}^2]] - \frac{1}{\tilde{K}_2^4} (A_1 + A_5)E[\tilde{K}_2^3\tilde{Q}^2] \dots\dots\dots (3.68) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[h_2(t)\tilde{Q}_1\tilde{Q}] &= \frac{1}{\tilde{K}_2} \left[A_1 E[\tilde{Q}_1\tilde{Q}] - A_2 E[\tilde{K}_2\tilde{Q}_1\tilde{Q}] + A_3 E[\tilde{K}_2\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}] \right. \\
&\quad - A_4 E[\tilde{K}_2\tilde{Q}_1\tilde{Q}^2] + A_5 E[\tilde{Q}_1\tilde{Q}] - A_6 E[\tilde{K}_1\tilde{Q}_1\tilde{Q}] \\
&\quad \left. - A_7 E[\tilde{K}_1\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}] + A_8 E[\tilde{K}_1\tilde{Q}_1\tilde{Q}^2] \right] \\
&\quad - \frac{1}{\tilde{K}_2^2} \left[A_1 E[\tilde{K}_2\tilde{Q}_1\tilde{Q}] - A_2 E[\tilde{K}_2^2\tilde{Q}_1\tilde{Q}] + A_3 E[\tilde{K}_2^2\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}] \right. \\
&\quad - A_4 E[\tilde{K}_2^2\tilde{Q}_1\tilde{Q}^2] + A_5 E[\tilde{K}_2\tilde{Q}_1\tilde{Q}] - A_6 E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2\tilde{Q}_1\tilde{Q}] \\
&\quad \left. - A_7 E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}] + A_8 E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2\tilde{Q}_1\tilde{Q}^2] \right] \\
&\quad + \frac{1}{\tilde{K}_2^3} \left[A_1 E[\tilde{K}_2^2\tilde{Q}_1\tilde{Q}] - A_2 E[\tilde{K}_2^3\tilde{Q}_1\tilde{Q}] + A_5 E[\tilde{K}_2^2\tilde{Q}_1\tilde{Q}] \right. \\
&\quad \left. - A_6 E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2^2\tilde{Q}_1\tilde{Q}] \right] - \frac{1}{\tilde{K}_2^4} (A_1 + A_5) E[\tilde{K}_2^3\tilde{Q}_1\tilde{Q}] \dots\dots\dots (3.69)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[h_2(t)\tilde{Q}_1^2] &= \frac{1}{\tilde{K}_2} \left[A_1 E[\tilde{Q}_1^2] - A_2 E[\tilde{K}_2\tilde{Q}_1^2] + A_3 E[\tilde{K}_2\tilde{Q}_1^3] \right. \\
&\quad - A_4 E[\tilde{K}_2\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}] + A_5 E[\tilde{Q}_1^2] - A_6 E[\tilde{K}_1\tilde{Q}_1^2] \\
&\quad \left. - A_7 E[\tilde{K}_1\tilde{Q}_1^3] + A_8 E[\tilde{K}_1\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}] \right] \\
&\quad - \frac{1}{\tilde{K}_2^2} \left[A_1 E[\tilde{K}_2\tilde{Q}_1^2] - A_2 E[\tilde{K}_2^2\tilde{Q}_1^2] + A_3 E[\tilde{K}_2^2\tilde{Q}_1^3] \right. \\
&\quad - A_4 E[\tilde{K}_2^2\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}] + A_5 E[\tilde{K}_2\tilde{Q}_1^2] - A_6 E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2\tilde{Q}_1^2] \\
&\quad \left. - A_7 E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2\tilde{Q}_1^3] + A_8 E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}] \right] \\
&\quad + \frac{1}{\tilde{K}_2^3} \left[A_1 E[\tilde{K}_2^2\tilde{Q}_1^2] - A_2 E[\tilde{K}_2^3\tilde{Q}_1^2] + A_5 E[\tilde{K}_2^2\tilde{Q}_1^2] \right. \\
&\quad \left. - A_6 E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2^2\tilde{Q}_1^2] \right] - \frac{1}{\tilde{K}_2^4} (A_1 + A_5) E[\tilde{K}_2^3\tilde{Q}_1^2] \dots\dots\dots (3.70)
\end{aligned}$$

となる。

上記の式(3.68)~(3.70)には新たに $E[\tilde{K}_1\tilde{Q}^3]$ 等の相関係数が現れる。これらの相関係数を求めるためには、また \tilde{K}_1 等を式(3.32),(3.33)に掛けて期待値をとる操作を繰り返すことになる。結果のみを示すと、以下のようなになる。

$$\frac{dE[\tilde{K}\tilde{Q}^3]}{dt} = 3E[\tilde{K}\tilde{Q}_1\tilde{Q}^2] \dots\dots\dots (3.71)$$

$$\begin{aligned}
\frac{dE[\tilde{K}\tilde{Q}_1\tilde{Q}^2]}{dt} + f_2(t)E[\tilde{K}\tilde{Q}_1\tilde{Q}^2] &= E[\tilde{K}h_2(t)\tilde{Q}^2] - g_2(t)E[\tilde{K}\tilde{Q}^3] \\
&\quad + 2E[\tilde{K}\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}] \dots\dots\dots (3.72)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dE[\tilde{K}\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}]}{dt} + 2f_2(t)E[\tilde{K}\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}] &= 2E[\tilde{K}h_2(t)\tilde{Q}_1\tilde{Q}] - 2g_2(t)E[\tilde{K}\tilde{Q}_1\tilde{Q}^2] \\
&\quad + E[\tilde{K}_2^2\tilde{Q}_1^3] \dots\dots\dots (3.73)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dE[\tilde{K}\tilde{Q}_1\tilde{Q}^2]}{dt} + f_2(t)E[\tilde{K}\tilde{Q}_1\tilde{Q}^2] &= E[\tilde{K}h_2(t)\tilde{Q}^2] - g_2(t)E[\tilde{K}\tilde{Q}^3] \\
&\quad + 2E[\tilde{K}\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}] \dots\dots\dots (3.74)
\end{aligned}$$

$$\frac{dE[\tilde{\mathbf{K}}\tilde{Q}_1^3]}{dt} + 3 f_2(t)E[\tilde{\mathbf{K}}\tilde{Q}_1^3] = 3E[\tilde{\mathbf{K}}h_2(t)\tilde{Q}_1^2] - 3 g_2(t)E[\tilde{\mathbf{K}}\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}] \dots\dots\dots (3.75)$$

ここでは, $\tilde{\mathbf{K}}$ を

$$\tilde{\mathbf{K}} = [\tilde{K}_1, \tilde{K}_2, \tilde{K}_1^2, \tilde{K}_1\tilde{K}_2, \tilde{K}_2^2]^T \dots\dots\dots (3.76)$$

とおいた.

また, 上記の式 (3.71)~(3.75) に新たに現れた相関係数 $E[\tilde{\mathbf{K}}h_2(t)\tilde{Q}^2]$, $E[\tilde{\mathbf{K}}h_2(t)\tilde{Q}_1\tilde{Q}]$ と $E[\tilde{\mathbf{K}}h_2(t)\tilde{Q}_1^2]$ は以下のように整理できる.

$$\begin{aligned} E[\tilde{K}_1h_2(t)\tilde{Q}^2] &= \frac{1}{\tilde{K}_2} [A_1E[\tilde{K}_1\tilde{Q}^2] - A_2E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2\tilde{Q}^2] + A_3E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2\tilde{Q}_1\tilde{Q}^2] \\ &\quad - A_4E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2\tilde{Q}^3] + A_5E[\tilde{K}_1\tilde{Q}^2] - A_6E[\tilde{K}_1^2\tilde{Q}^2] \\ &\quad - A_7E[\tilde{K}_1^2\tilde{Q}_1\tilde{Q}^2] + A_8E[\tilde{K}_1^2\tilde{Q}^3]] \\ &\quad - \frac{1}{\tilde{K}_2^2} [A_1E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2\tilde{Q}^2] - A_2E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2^2\tilde{Q}^2] + A_5E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2\tilde{Q}^2] \\ &\quad - A_6E[\tilde{K}_1^2\tilde{K}_2\tilde{Q}^2]] + \frac{1}{\tilde{K}_2^3}(A_1 + A_5)E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2^2\tilde{Q}^2] \dots\dots\dots (3.77) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[\tilde{K}_2h_2(t)\tilde{Q}^2] &= \frac{1}{\tilde{K}_2} [A_1E[\tilde{K}_2\tilde{Q}^2] - A_2E[\tilde{K}_2^2\tilde{Q}^2] + A_3E[\tilde{K}_2^2\tilde{Q}_1\tilde{Q}^2] \\ &\quad - A_4E[\tilde{K}_2^2\tilde{Q}^3] + A_5E[\tilde{K}_2\tilde{Q}^2] - A_6E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2\tilde{Q}^2] \\ &\quad - A_7E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2\tilde{Q}_1\tilde{Q}^2] + A_8E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2\tilde{Q}^3]] \\ &\quad - \frac{1}{\tilde{K}_2^2} [A_1E[\tilde{K}_2^2\tilde{Q}^2] - A_2E[\tilde{K}_2^3\tilde{Q}^2] + A_5E[\tilde{K}_2^2\tilde{Q}^2] \\ &\quad - A_6E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2^2\tilde{Q}^2]] + \frac{1}{\tilde{K}_2^3}(A_1 + A_5)E[\tilde{K}_2^3\tilde{Q}^2] \dots\dots\dots (3.78) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[\tilde{K}_1^2h_2(t)\tilde{Q}^2] &= \frac{1}{\tilde{K}_2} [A_1E[\tilde{K}_1^2\tilde{Q}^2] - A_2E[\tilde{K}_1^2\tilde{K}_2\tilde{Q}^2] + A_5E[\tilde{K}_1^2\tilde{Q}^2] \\ &\quad - A_6E[\tilde{K}_1^3\tilde{Q}^2]] - \frac{1}{\tilde{K}_2^2}(A_1 + A_5)E[\tilde{K}_1^2\tilde{K}_2\tilde{Q}^2] \dots\dots\dots (3.79) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2h_2(t)\tilde{Q}^2] &= \frac{1}{\tilde{K}_2} [A_1E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2\tilde{Q}^2] - A_2E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2^2\tilde{Q}^2] + A_5E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2\tilde{Q}^2] \\ &\quad - A_6E[\tilde{K}_1^2\tilde{K}_2\tilde{Q}^2]] - \frac{1}{\tilde{K}_2^2}(A_1 + A_5)E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2^2\tilde{Q}^2] \dots\dots\dots (3.80) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[\tilde{K}_2^2h_2(t)\tilde{Q}^2] &= \frac{1}{\tilde{K}_2} [A_1E[\tilde{K}_2^2\tilde{Q}^2] - A_2E[\tilde{K}_2^3\tilde{Q}^2] + A_5E[\tilde{K}_2^2\tilde{Q}^2] \\ &\quad - A_6E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2^2\tilde{Q}^2]] - \frac{1}{\tilde{K}_2^2}(A_1 + A_5)E[\tilde{K}_2^3\tilde{Q}^2] \dots\dots\dots (3.81) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[\tilde{K}_1 h_2(t) \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] &= \frac{1}{\tilde{K}_2} \left[A_1 E[\tilde{K}_1 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] - A_2 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] + A_3 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1^2 \tilde{Q}] \right. \\
&\quad - A_4 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}^2] + A_5 E[\tilde{K}_1 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] - A_6 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] \\
&\quad \left. - A_7 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{Q}_1^2 \tilde{Q}^2] + A_8 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}^2] \right] \\
&\quad - \frac{1}{\tilde{K}_2^2} \left[A_1 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] - A_2 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] \right. \\
&\quad \left. + A_5 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] - A_6 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] \right] \\
&\quad + \frac{1}{\tilde{K}_2^3} (A_1 + A_5) E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] \dots\dots\dots (3.82)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[\tilde{K}_2 h_2(t) \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] &= \frac{1}{\tilde{K}_2} \left[A_1 E[\tilde{K}_2 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] - A_2 E[\tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] + A_3 E[\tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1^2 \tilde{Q}] \right. \\
&\quad - A_4 E[\tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}^2] + A_5 E[\tilde{K}_2 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] - A_6 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] \\
&\quad \left. - A_7 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1^2 \tilde{Q}] + A_8 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}^2] \right] \\
&\quad - \frac{1}{\tilde{K}_2^2} \left[A_1 E[\tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] - A_2 E[\tilde{K}_2^3 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] + A_5 E[\tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] \right. \\
&\quad \left. - A_6 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] \right] + \frac{1}{\tilde{K}_2^3} (A_1 + A_5) E[\tilde{K}_2^3 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] \dots\dots\dots (3.83)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[\tilde{K}_1^2 h_2(t) \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] &= \frac{1}{\tilde{K}_2} \left[A_1 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] - A_2 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] + A_5 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] \right. \\
&\quad \left. - A_6 E[\tilde{K}_1^3 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] \right] - \frac{1}{\tilde{K}_2^2} (A_1 + A_5) E[\tilde{K}_1^2 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] \dots\dots\dots (3.84)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2 h_2(t) \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] &= \frac{1}{\tilde{K}_2} \left[A_1 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] - A_2 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] \right. \\
&\quad \left. + A_5 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] - A_6 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] \right] \\
&\quad - \frac{1}{\tilde{K}_2^2} (A_1 + A_5) E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] \dots\dots\dots (3.85)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[\tilde{K}_2^2 h_2(t) \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] &= \frac{1}{\tilde{K}_2} \left[A_1 E[\tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] - A_2 E[\tilde{K}_2^3 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] + A_5 E[\tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] \right. \\
&\quad \left. - A_6 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] \right] - \frac{1}{\tilde{K}_2^2} (A_1 + A_5) E[\tilde{K}_2^3 \tilde{Q}_1 \tilde{Q}] \dots\dots\dots (3.86)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[\tilde{K}_1 h_2(t) \tilde{Q}_1^2] &= \frac{1}{\tilde{K}_2} \left[A_1 E[\tilde{K}_1 \tilde{Q}_1^2] - A_2 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1^2] + A_3 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1^3] \right. \\
&\quad - A_4 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1^2 \tilde{Q}] + A_5 E[\tilde{K}_1 \tilde{Q}_1^2] - A_6 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{Q}_1^2] \\
&\quad \left. - A_7 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{Q}_1^3] + A_8 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{Q}_1^2 \tilde{Q}] \right] \\
&\quad - \frac{1}{\tilde{K}_2^2} \left[A_1 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1^2] - A_2 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1^2] + A_5 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1^2] \right. \\
&\quad \left. - A_6 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1^2] \right] + \frac{1}{\tilde{K}_2^3} (A_1 + A_5) E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1^2] \dots\dots\dots (3.87)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[\tilde{K}_2 h_2(t) \tilde{Q}_1^2] &= \frac{1}{\tilde{K}_2} [A_1 E[\tilde{K}_2 \tilde{Q}_1^2] - A_2 E[\tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1^2] + A_3 E[\tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1^3] \\
&\quad - A_4 E[\tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1^2 \tilde{Q}] + A_5 E[\tilde{K}_2 \tilde{Q}_1^2] - A_6 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1^2] \\
&\quad - A_7 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1^3] + A_8 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1^2 \tilde{Q}]] \\
&\quad - \frac{1}{\tilde{K}_2^2} [A_1 E[\tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1^2] - A_2 E[\tilde{K}_2^3 \tilde{Q}_1^2] + A_5 E[\tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1^2] \\
&\quad - A_6 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1^2]] + \frac{1}{\tilde{K}_2^3} (A_1 + A_5) E[\tilde{K}_2^3 \tilde{Q}_1^2] \dots\dots\dots (3.88)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[\tilde{K}_1^2 h_2(t) \tilde{Q}_1^2] &= \frac{1}{\tilde{K}_2} [A_1 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{Q}_1^2] - A_2 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1^2] + A_5 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{Q}_1^2] \\
&\quad - A_6 E[\tilde{K}_1^3 \tilde{Q}_1^2]] - \frac{1}{\tilde{K}_2^2} (A_1 + A_5) E[\tilde{K}_1^2 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1^2] \dots\dots\dots (3.89)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2 h_2(t) \tilde{Q}_1^2] &= \frac{1}{\tilde{K}_2} [A_1 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1^2] - A_2 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1^2] + A_5 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1^2] \\
&\quad - A_6 E[\tilde{K}_1^2 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1^2]] - \frac{1}{\tilde{K}_2^2} (A_1 + A_5) E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1^2] \dots\dots\dots (3.90)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[\tilde{K}_2^2 h_2(t) \tilde{Q}_1^2] &= \frac{1}{\tilde{K}_2} [A_1 E[\tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1^2] - A_2 E[\tilde{K}_2^3 \tilde{Q}_1^2] + A_5 E[\tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1^2] \\
&\quad - A_6 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1^2]] - \frac{1}{\tilde{K}_2^2} (A_1 + A_5) E[\tilde{K}_2^3 \tilde{Q}_1^2] \dots\dots\dots (3.91)
\end{aligned}$$

したがって、サブ流域からの流出量の3次モーメント $\mu_{3Q}(t)(= E[\tilde{Q}(t)^3])$ は式(3.64)～(3.67), (3.71)～(3.75)の微分方程式を連立して解くことによって得られる。その結果、式(3.14)の関係を考慮すると、サブ流域からの流出量の3次モーメント $\mu_{3q}(t)$ は最終的に次式となる。

$$\mu_{3q}(t) = \frac{\mu_{3Q}(t)}{\beta_2(t)^3} \dots\dots\dots (3.92)$$

3.2.5 流出量の4次モーメント

流出量の4次モーメントは \tilde{Q} を4乗したものの期待値であるので、前節までの方法と同様に、式(3.32)の両辺に \tilde{Q}^3 を掛けて、その期待値を考える。

$$\frac{dE[\tilde{Q}^4]}{dt} = 4E[\tilde{Q}_1\tilde{Q}^3] \dots\dots\dots (3.93)$$

次に、上式の $E[\tilde{Q}_1\tilde{Q}^3]$ は式(3.33)の両辺に \tilde{Q}^3 を掛けて、期待値をとることによって得られる。

$$\frac{dE[\tilde{Q}_1\tilde{Q}^3]}{dt} + f_2(t)E[\tilde{Q}_1\tilde{Q}^3] = E[h_2(t)\tilde{Q}^3] - g_2(t)E[\tilde{Q}^4] + 3E[\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}^2] \dots\dots\dots (3.94)$$

また、上式の $E[\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}^2]$ は式(3.32)に $\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}$ を掛けて期待値をとることによって

$$\begin{aligned} \frac{dE[\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}^2]}{dt} + 2f_2(t)E[\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}^2] &= 2E[h_2(t)\tilde{Q}_1\tilde{Q}^2] - 2g_2(t)E[\tilde{Q}_1\tilde{Q}^3] \\ &\quad + 2E[\tilde{Q}_1^3\tilde{Q}] \dots\dots\dots (3.95) \end{aligned}$$

となる。 $E[\tilde{Q}_1^3\tilde{Q}]$ も式(3.32)に \tilde{Q}_1^3 を掛けて期待値をとったものである。

$$\frac{dE[\tilde{Q}_1^3\tilde{Q}]}{dt} + 3f_2(t)E[\tilde{Q}_1^3\tilde{Q}] = 3E[h_2(t)\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}] - 3g_2(t)E[\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}^2] + E[\tilde{Q}_1^4] \dots\dots\dots (3.96)$$

最後に、 $E[\tilde{Q}_1^4]$ も式(3.33)に \tilde{Q}_1^3 を掛けて期待値をとったものである。

$$\frac{dE[\tilde{Q}_1^4]}{dt} + 4f_2(t)E[\tilde{Q}_1^4] = 4E[h_2(t)\tilde{Q}_1^3] - 4g_2(t)E[\tilde{Q}_1^3\tilde{Q}] \dots\dots\dots (3.97)$$

したがって、流出量の4次モーメントは上記の微分方程式を連立させて解いたものである。ただし、上式中の $E[h_2(t)\tilde{Q}^3]$ 、 $E[h_2(t)\tilde{Q}_1\tilde{Q}^2]$ 、 $E[h_2(t)\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}]$ と $E[h_2(t)\tilde{Q}_1^3]$ がやはり未知量として残されているので、これらを次に求めよう。

式(3.38)に \tilde{Q}^3 、 $\tilde{Q}_1\tilde{Q}^2$ 、 $\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}$ と \tilde{Q}^3 を掛けて、その期待値を各々考えると

$$\begin{aligned} E[h_2(t)\tilde{Q}^3] &= \frac{1}{\bar{K}_2} [A_1E[\tilde{Q}^3] - A_2E[\tilde{K}_2\tilde{Q}^3] + A_3E[\tilde{K}_2\tilde{Q}_1\tilde{Q}^3] \\ &\quad - A_4E[\tilde{K}_2\tilde{Q}^3] + A_5E[\tilde{Q}^3] - A_6E[\tilde{K}_1\tilde{Q}^3] \\ &\quad - A_7E[\tilde{K}_1\tilde{Q}_1\tilde{Q}^3] + A_8E[\tilde{K}_1\tilde{Q}^4]] \\ &\quad - \frac{1}{\bar{K}_2^2} [A_1E[\tilde{K}_2\tilde{Q}^3] - A_2E[\tilde{K}_2^2\tilde{Q}^3] + A_5E[\tilde{K}_2\tilde{Q}^3] \\ &\quad - A_6E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2\tilde{Q}^3]] + \frac{1}{\bar{K}_2^3} (A_1 + A_5)E[\tilde{K}_2^2\tilde{Q}^3] \dots\dots\dots (3.98) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[h_2(t)\tilde{Q}_1\tilde{Q}^2] &= \frac{1}{\bar{K}_2} [A_1E[\tilde{Q}_1\tilde{Q}^2] - A_2E[\tilde{K}_2\tilde{Q}_1\tilde{Q}^2] + A_3E[\tilde{K}_2\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}^2] \\ &\quad - A_4E[\tilde{K}_2\tilde{Q}_1\tilde{Q}^3] + A_5E[\tilde{Q}_1\tilde{Q}^2] - A_6E[\tilde{K}_1\tilde{Q}_1\tilde{Q}^2] \\ &\quad - A_7E[\tilde{K}_1\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}^2] + A_8E[\tilde{K}_1\tilde{Q}_1\tilde{Q}^3]] \\ &\quad - \frac{1}{\bar{K}_2^2} [A_1E[\tilde{K}_2\tilde{Q}_1\tilde{Q}^2] - A_2E[\tilde{K}_2^2\tilde{Q}_1\tilde{Q}^2] + A_5E[\tilde{K}_2\tilde{Q}_1\tilde{Q}^2] \\ &\quad - A_6E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2\tilde{Q}_1\tilde{Q}^2]] + \frac{1}{\bar{K}_2^3} (A_1 + A_5)E[\tilde{K}_2^2\tilde{Q}_1\tilde{Q}^2] \dots\dots\dots (3.99) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[h_2(t)\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}] &= \frac{1}{\tilde{K}_2} [A_1E[\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}] - A_2E[\tilde{K}_2\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}] + A_3E[\tilde{K}_2\tilde{Q}_1^3\tilde{Q}] \\
&\quad - A_4E[\tilde{K}_2\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}^2] + A_5E[\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}] - A_6E[\tilde{K}_1\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}] \\
&\quad - A_7E[\tilde{K}_1\tilde{Q}_1^3\tilde{Q}] + A_8E[\tilde{K}_1\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}^2]] \\
&\quad - \frac{1}{\tilde{K}_2^2} [A_1E[\tilde{K}_2\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}] - A_2E[\tilde{K}_2^2\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}] + A_5E[\tilde{K}_2\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}] \\
&\quad - A_6E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}]] + \frac{1}{\tilde{K}_2^3}(A_1 + A_5)E[\tilde{K}_2^2\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}] \dots\dots\dots (3.100)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[h_2(t)\tilde{Q}_1^3] &= \frac{1}{\tilde{K}_2} [A_1E[\tilde{Q}_1^3] - A_2E[\tilde{K}_2\tilde{Q}_1^3] + A_3E[\tilde{K}_2\tilde{Q}_1^4] \\
&\quad - A_4E[\tilde{K}_2\tilde{Q}_1^3\tilde{Q}] + A_5E[\tilde{Q}_1^3] - A_6E[\tilde{K}_1\tilde{Q}_1^3] \\
&\quad - A_7E[\tilde{K}_1\tilde{Q}_1^4] + A_8E[\tilde{K}_1\tilde{Q}_1^3\tilde{Q}]] \\
&\quad - \frac{1}{\tilde{K}_2^2} [A_1E[\tilde{K}_2\tilde{Q}_1^3] - A_2E[\tilde{K}_2^2\tilde{Q}_1^3] + A_5E[\tilde{K}_2\tilde{Q}_1^3] \\
&\quad - A_6E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2\tilde{Q}_1^3]] + \frac{1}{\tilde{K}_2^3}(A_1 + A_5)E[\tilde{K}_2^2\tilde{Q}_1^3] \dots\dots\dots (3.101)
\end{aligned}$$

となる。

上記の式 (3.98)~(3.101) にはまた新たに $E[\tilde{K}_1\tilde{Q}_1^4]$ 等の相関係数が現れるので、これらの相関係数を求めるために、前節までと同様に \tilde{K}_1 等を式 (3.32), (3.33) に掛けて、期待値をとる操作を繰り返すことになる。結果のみを示すと、以下のようなになる。

$$\frac{dE[\tilde{K}_1\tilde{Q}_1^4]}{dt} = 4E[\tilde{K}_1\tilde{Q}_1\tilde{Q}^3] \dots\dots\dots (3.102)$$

$$\frac{dE[\tilde{K}_2\tilde{Q}_1^4]}{dt} = 4E[\tilde{K}_2\tilde{Q}_1\tilde{Q}^3] \dots\dots\dots (3.103)$$

$$\begin{aligned}
\frac{dE[\tilde{K}_1\tilde{Q}_1\tilde{Q}^3]}{dt} + f_2(t)E[\tilde{K}_1\tilde{Q}_1\tilde{Q}^3] &= E[\tilde{K}_1h_2(t)\tilde{Q}^3] - g_2(t)E[\tilde{K}_1\tilde{Q}_1^4] \\
&\quad + 3E[\tilde{K}_1\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}^2] \dots\dots\dots (3.104)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dE[\tilde{K}_2\tilde{Q}_1\tilde{Q}^3]}{dt} + f_2(t)E[\tilde{K}_2\tilde{Q}_1\tilde{Q}^3] &= E[\tilde{K}_2h_2(t)\tilde{Q}^3] - g_2(t)E[\tilde{K}_2\tilde{Q}_1^4] \\
&\quad + 3E[\tilde{K}_2\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}^2] \dots\dots\dots (3.105)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dE[\tilde{K}_1\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}^2]}{dt} + 2f_2(t)E[\tilde{K}_1\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}^2] &= 2E[\tilde{K}_1h_2(t)\tilde{Q}_1\tilde{Q}^2] - 2g_2(t)E[\tilde{K}_1\tilde{Q}_1\tilde{Q}^3] \\
&\quad + 2E[\tilde{K}_1\tilde{Q}_1^3\tilde{Q}] \dots\dots\dots (3.106)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dE[\tilde{K}_2\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}^2]}{dt} + 2f_2(t)E[\tilde{K}_2\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}^2] &= 2E[\tilde{K}_2h_2(t)\tilde{Q}_1\tilde{Q}^2] - 2g_2(t)E[\tilde{K}_2\tilde{Q}_1\tilde{Q}^3] \\
&\quad + 2E[\tilde{K}_2\tilde{Q}_1^3\tilde{Q}] \dots\dots\dots (3.107)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dE[\tilde{K}_1\tilde{Q}_1^3\tilde{Q}]}{dt} + 3f_2(t)E[\tilde{K}_1\tilde{Q}_1^3\tilde{Q}] &= 3E[\tilde{K}_1h_2(t)\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}] - 3g_2(t)E[\tilde{K}_1\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}^2] \\
&\quad + E[\tilde{K}_1\tilde{Q}_1^4] \dots\dots\dots (3.108)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dE[\tilde{K}_2\tilde{Q}_1^3\tilde{Q}]}{dt} + 3f_2(t)E[\tilde{K}_2\tilde{Q}_1^3\tilde{Q}] &= 3E[\tilde{K}_2h_2(t)\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}] - 3g_2(t)E[\tilde{K}_2\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}^2]
\end{aligned}$$

$$+E[\tilde{K}_2\tilde{Q}_1^4] \dots\dots\dots (3.109)$$

$$\frac{dE[\tilde{K}_1\tilde{Q}_1^4]}{dt} + 4f_2(t)E[\tilde{K}_1\tilde{Q}_1^4] = 4E[\tilde{K}_1h_2(t)\tilde{Q}_1^3] - 4g_2(t)E[\tilde{K}_1\tilde{Q}_1^3\tilde{Q}]$$

$$\dots\dots\dots (3.110)$$

$$\frac{dE[\tilde{K}_2\tilde{Q}_1^4]}{dt} + 4f_2(t)E[\tilde{K}_2\tilde{Q}_1^4] = 4E[\tilde{K}_2h_2(t)\tilde{Q}_1^3] - 4g_2(t)E[\tilde{K}_2\tilde{Q}_1^3\tilde{Q}]$$

$$\dots\dots\dots (3.111)$$

また、上記の式(3.102)~(3.111)に新たに現れた相関係数 $E[\tilde{K}_1h_2(t)\tilde{Q}^3]$, $E[\tilde{K}_1h_2(t)\tilde{Q}_1\tilde{Q}^2]$, $E[\tilde{K}_1h_2(t)\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}]$ と $E[\tilde{K}_1h_2(t)\tilde{Q}_1^3]$ 等は以下のように整理できる。

$$E[\tilde{K}_1h_2(t)\tilde{Q}^3] = \frac{1}{\tilde{K}_2} [A_1E[\tilde{K}_1\tilde{Q}^3] - A_2E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2\tilde{Q}^3] + A_5E[\tilde{K}_1\tilde{Q}^3]$$

$$-A_6E[\tilde{K}_1^2\tilde{Q}^3]] - \frac{1}{\tilde{K}_2^2}(A_1 + A_5)E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2\tilde{Q}^3] \dots\dots\dots (3.112)$$

$$E[\tilde{K}_2h_2(t)\tilde{Q}^3] = \frac{1}{\tilde{K}_2} [A_1E[\tilde{K}_2\tilde{Q}^3] - A_2E[\tilde{K}_2^2\tilde{Q}^3] + A_5E[\tilde{K}_2\tilde{Q}^3]$$

$$-A_6E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2\tilde{Q}^3]] - \frac{1}{\tilde{K}_2^2}(A_1 + A_5)E[\tilde{K}_2^2\tilde{Q}^3] \dots\dots\dots (3.113)$$

$$E[\tilde{K}_1h_2(t)\tilde{Q}_1\tilde{Q}^2] = \frac{1}{\tilde{K}_2} [A_1E[\tilde{K}_1\tilde{Q}_1\tilde{Q}^2] - A_2E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2\tilde{Q}_1\tilde{Q}^2] + A_5E[\tilde{K}_1\tilde{Q}_1\tilde{Q}^2]$$

$$-A_6E[\tilde{K}_1^2\tilde{Q}_1\tilde{Q}^2]] - \frac{1}{\tilde{K}_2^2}(A_1 + A_5)E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2\tilde{Q}_1\tilde{Q}^2] \dots (3.114)$$

$$E[\tilde{K}_2h_2(t)\tilde{Q}_1\tilde{Q}^2] = \frac{1}{\tilde{K}_2} [A_1E[\tilde{K}_2\tilde{Q}_1\tilde{Q}^2] - A_2E[\tilde{K}_2^2\tilde{Q}_1\tilde{Q}^2] + A_5E[\tilde{K}_2\tilde{Q}_1\tilde{Q}^2]$$

$$-A_6E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2\tilde{Q}_1\tilde{Q}^2]] - \frac{1}{\tilde{K}_2^2}(A_1 + A_5)E[\tilde{K}_2^2\tilde{Q}_1\tilde{Q}^2] \dots (3.115)$$

$$E[\tilde{K}_1h_2(t)\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}] = \frac{1}{\tilde{K}_2} [A_1E[\tilde{K}_1\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}] - A_2E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}] + A_5E[\tilde{K}_1\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}]$$

$$-A_6E[\tilde{K}_1^2\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}]] - \frac{1}{\tilde{K}_2^2}(A_1 + A_5)E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}] \dots\dots\dots (3.116)$$

$$E[\tilde{K}_2h_2(t)\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}] = \frac{1}{\tilde{K}_2} [A_1E[\tilde{K}_2\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}] - A_2E[\tilde{K}_2^2\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}] + A_5E[\tilde{K}_2\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}]$$

$$-A_6E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}]]$$

$$- \frac{1}{\tilde{K}_2^2}(A_1 + A_5)E[\tilde{K}_2^2\tilde{Q}_1^2\tilde{Q}] \dots\dots\dots (3.117)$$

$$E[\tilde{K}_1h_2(t)\tilde{Q}_1^3] = \frac{1}{\tilde{K}_2} [A_1E[\tilde{K}_1\tilde{Q}_1^3] - A_2E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2\tilde{Q}_1^3] + A_5E[\tilde{K}_1\tilde{Q}_1^3]$$

$$-A_6E[\tilde{K}_1^2\tilde{Q}_1^3]] - \frac{1}{\tilde{K}_2^2}(A_1 + A_5)E[\tilde{K}_1\tilde{K}_2\tilde{Q}_1^3] \dots\dots\dots (3.118)$$

$$E[\tilde{K}_2 h_2(t) \tilde{Q}_1^3] = \frac{1}{\bar{K}_2} \left[A_1 E[\tilde{K}_2 \tilde{Q}_1^3] - A_2 E[\tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1^3] + A_5 E[\tilde{K}_2 \tilde{Q}_1^3] \right. \\ \left. - A_6 E[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2 \tilde{Q}_1^3] \right] - \frac{1}{\bar{K}_2^2} (A_1 + A_5) E[\tilde{K}_2^2 \tilde{Q}_1^3] \dots\dots\dots (3.119)$$

したがって、サブ流域からの流出量の4次モーメント $\mu_{4Q}(t) (= E[\tilde{Q}(t)^4])$ は式(3.93)～(3.97), (3.102)～(3.111)の微分方程式を連立して解くことによって得られる。その結果、式(3.14)の関係を考慮すると、サブ流域からの流出量の4次モーメント $\mu_{4q}(t)$ は最終的に次式となる。

$$\mu_{4q}(t) = \frac{\mu_{4Q}(t)}{\beta_2(t)^4} \dots\dots\dots (3.120)$$

3.2.6 貯留方程式が線形の場合の理論解の検証

本研究で誘導したサブ流域の流出量 $q_i(t)$ の 1～4 次モーメントの理論解は、貯留係数 K と流出量 q の高次の相関係数 $E[\tilde{K}^i \tilde{q}^j]$ を無視し、更に式 (3.10), (3.11) 等の線形近似式において流出量の高次モーメントを無視することによって得られた近似解と考えられる。したがって、ここで無視した高次モーメントによって理論解の精度が左右される。

今、式 (3.3) の貯留方程式が線形の場合、即ち、貯留指数 P_1, P_2 を 1 とおくと、式 (3.10), (3.11) の線形近似式は α_i, β_i も各々 1 となって、線形近似式の精度は流出量の理論解の精度に無関係となる。したがって、線形貯留方程式を用いることによって、流出量の 1～4 次モーメントの理論解に及ぼす貯留係数と流出量の高次の相関係数 $E[\tilde{K}^i \tilde{q}^j]$ の影響を検討することが出来る。

理論解の検証には、貯留係数 K_1, K_2 に任意の確率分布関数に従う乱数を与えて求めた流出量のシミュレーション結果と理論解を比較した。貯留係数がどのような確率分布関数に従うのかは、後節で議論することにして、ここでは誘導した理論解の解法の検証を目的としているので、貯留係数の確率分布には矩形分布、正規分布、ガンマ分布の特性の異なる 3 種類の確率分布を与えた。なお、貯留係数の平均値等の統計量は実流域の流出解析結果を参考にし、表-3.1 に示す統計量を与えた。

表-3.1 検証に用いた貯留係数の確率分布関数の条件

分布形	K ₁ の統計量				K ₂ の統計量				K ₁ と K ₂ の相関係数					
	平均	分散	3 次	4 次	平均	分散	3 次	4 次	K ₁ K ₂	K ₁ K ₂ ²	K ₁ ² K ₂	K ₁ ² K ₂ ²	K ₁ ³ K ₂	K ₁ ³ K ₂ ²
矩形分布														
case.1	5.0	0.333	0.0	0.2	4.0	1.333	0.0	3.2	0.0	0.0	0.0	0.444	0.0	0.0
case.2	5.0	0.083	0.0	0.012	4.0	0.333	0.0	0.2	0.0	0.0	0.0	0.028	0.0	0.0
case.3	5.0	1.333	0.0	3.2	4.0	1.333	0.0	3.2	0.0	0.0	0.0	1.778	0.0	0.0
正規分布														
case.1	5.0	0.336	0.0	0.334	4.0	1.312	0.0	5.053	0.0	0.0	0.0	0.424	0.0	0.0
case.2	5.0	0.084	0.0	0.021	4.0	0.334	0.0	0.330	0.0	0.0	0.0	0.028	0.0	0.0
case.3	5.0	1.346	0.0	5.229	4.0	1.301	0.0	5.014	0.0	0.0	0.0	1.768	0.0	0.0
ガンマ分布														
case.1	5.0	0.333	0.049	0.345	4.0	1.283	0.902	6.309	0.0	0.0	0.0	0.439	0.0	0.0
case.2	5.0	0.085	0.003	0.022	4.0	0.333	0.060	0.364	0.0	0.0	0.0	0.028	0.0	0.0
case.3	5.0	1.375	0.783	6.284	4.0	0.013	0.902	6.337	0.0	0.0	0.0	1.801	0.0	0.0

一方、降雨量は理論解の誘導では流域一様の定常な降雨を想定している。降雨波形として矩形降雨や三角形降雨等が考えられるが、ここでは降雨強度 $R_p=10(\text{mm/hr})$ 、降雨継続時間 $t_r=6(\text{hr})$ の矩形波形降雨を採用した。これは、工藤・藤田ら¹⁸⁾が指摘しているように、矩形波降雨が理論解の検証に最適で、かつ厳しい条件である。つまり、本論文で提案した流出量の確率変動量の理論式は、一種の近似式であるので、近似の程度によっては、実際の降雨

波形に近い三角形降雨に比べ、生じる筈のない負の分散が容易に得られるのである。

図-3.3～図-3.5 は各々の確率分布に対する理論解とシミュレーションの比較結果である。流出量の平均値は確率分布形に関係なく理論解とシミュレーションは良く一致している。分散も良好であるが、与えた貯留係数の分散を大きくしていくに従い、若干対応が悪くなる傾向が見られる。特に減水期に違いが目立っている。3次モーメントは、与えた貯留係数の分散が小さい場合にはほぼ一致しているものの、次第に分散が大きくなると、両者の対応が悪くなっている。この傾向は、4次モーメントも同じである。

検討に用いた3つの確率分布形の特徴は、矩形分布と正規分布は左右対称の分布形であるので、3次モーメントは0である、ガンマ分布は左に偏った分布形であるので、3次モーメントは無視できない。また、4次モーメントは分布形が尖っているのか、平坦であるのかを表している。矩形分布は平坦な分布形であるので4次モーメントは小さい。一方、正規分布は平均値付近に集中した分布形であるので4次モーメントも大きくなる。

この様な各分布形の特徴を踏まえて計算結果を見ると、矩形分布と正規分布は共に3次モーメントが0で同じであるが、正規分布の方が4次モーメントが大きいために、理論解とシミュレーションの違いが大きくなったものと考えられる。

図-3.6 は、貯留係数が矩形分布の場合について貯留係数の変動係数（標準偏差／平均値）を0.05から0.3まで0.05刻みで与えて計算し、シミュレーションと理論解を比較した結果である。流出量の平均値、分散に関しては、変動係数が0.3程度まで理論解とシミュレーションはほぼ一致しているが、3次、4次モーメントに関しては0.2程度までが一致していると考えられる。

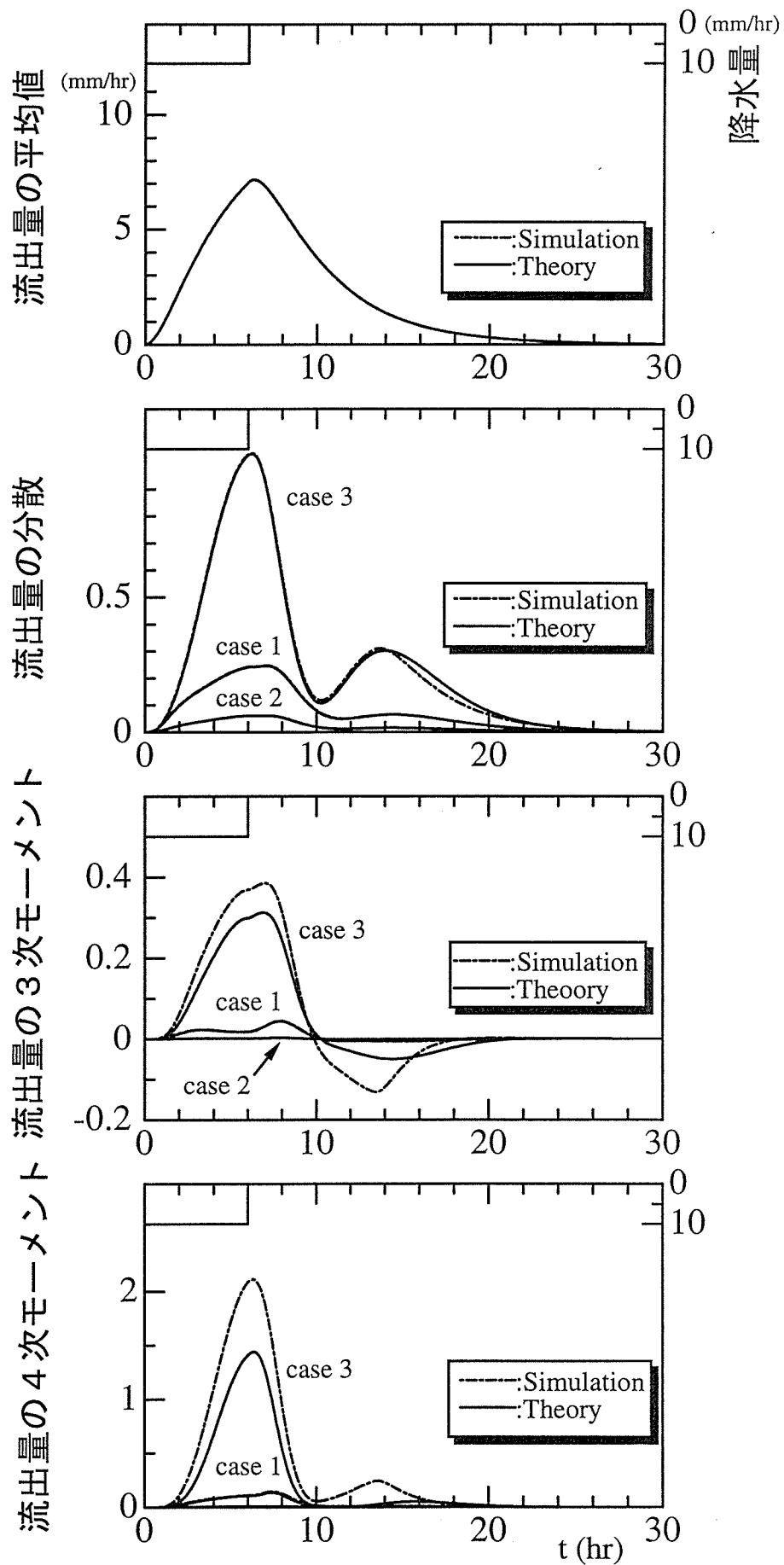


図-3.3 線形貯留方程式の場合の理論値とシミュレーション値の比較 (矩形分布)

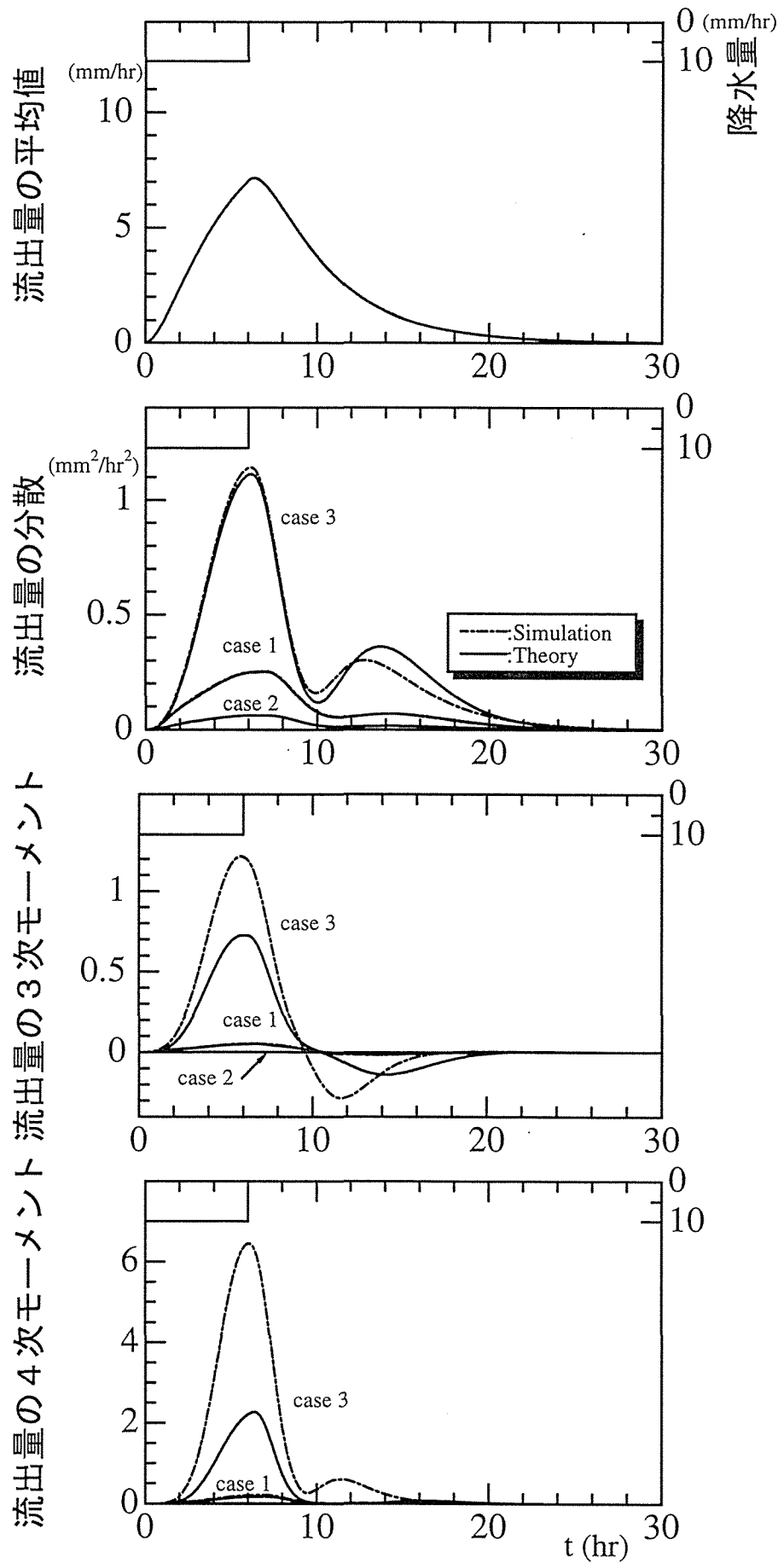


図-3.4 線形貯留方程式の場合の理論値とシミュレーション値の比較 (正規分布)

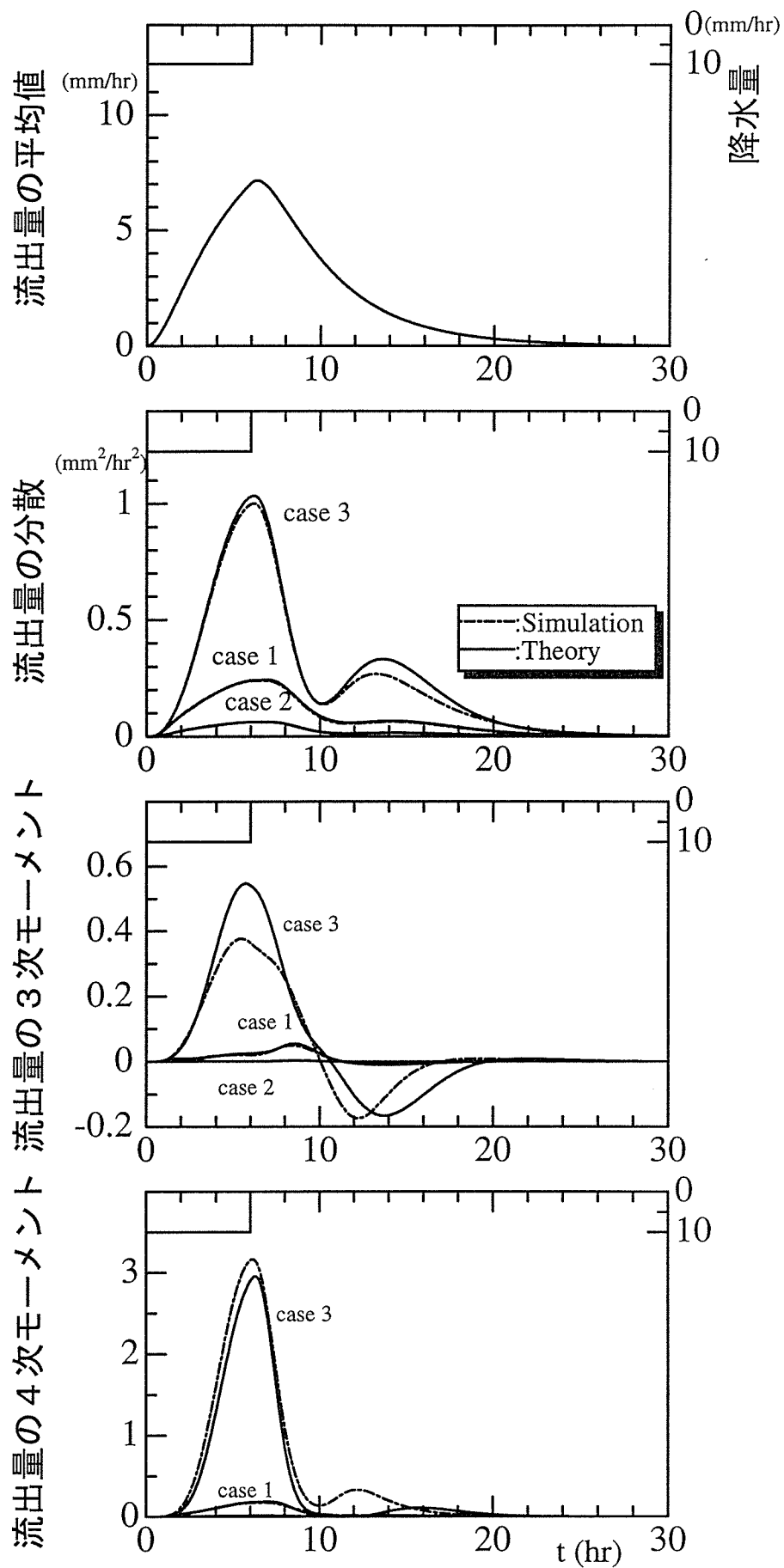


図-3.5 線形貯留方程式の理論値とシミュレーション値の比較 (ガンマ分布)

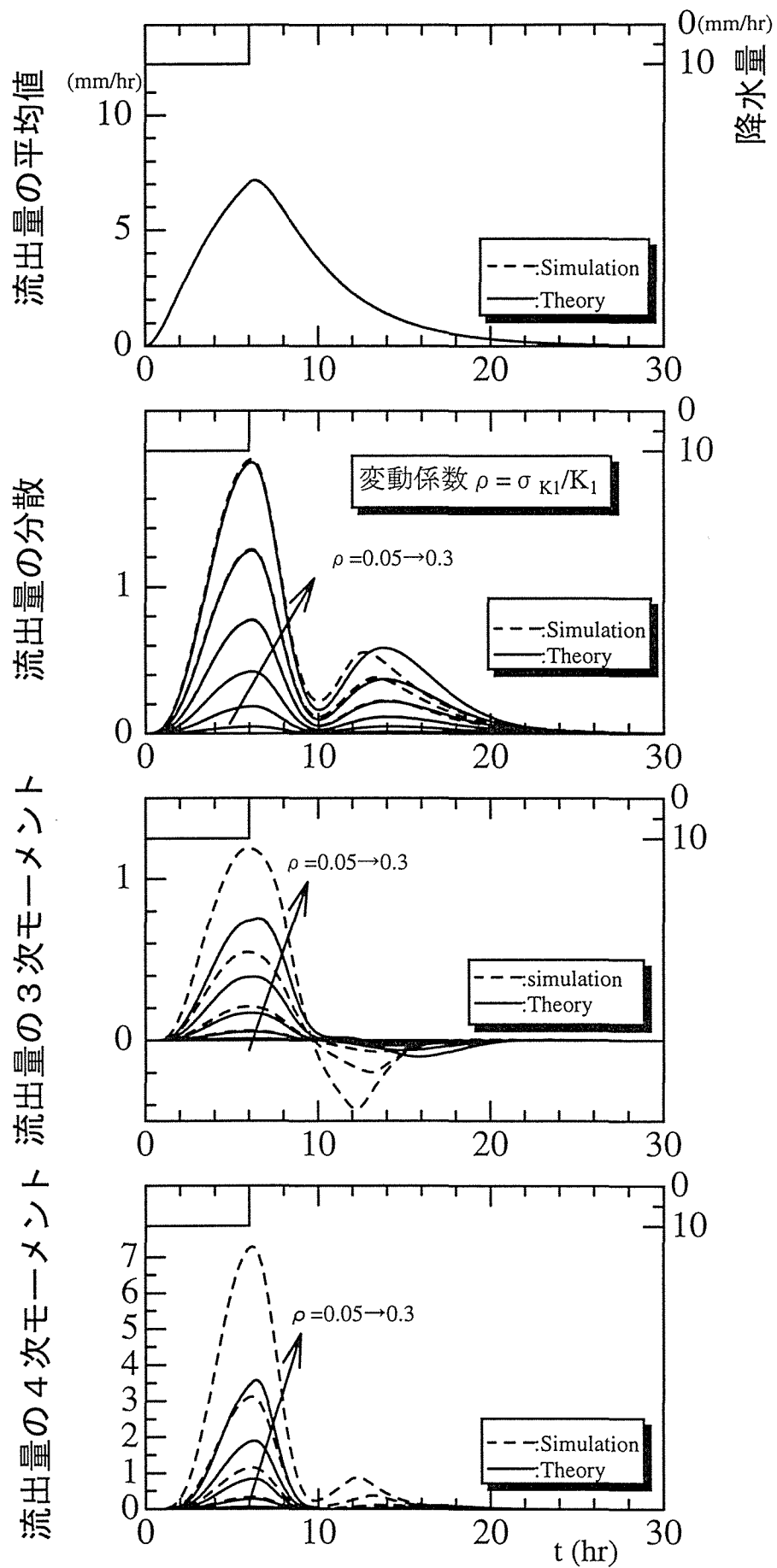


図-3.6 貯留係数の変動に対する理論の適用限界

3.2.7 貯留方程式が非線形の場合の理論解の検証

本研究で誘導したサブ流域の流出量 $q_i(t)$ の 1 ～ 4 次モーメントの理論解は、式 (3.3) の貯留方程式が非線形である場合に、式 (3.10), (3.11) 等の線形近似式を用いて誘導された近似解である。したがって、この線形近似式の精度が理論解の精度に影響し、近似式の精度によっては流量の負の分散が生じてしまう等の不都合が生じることになる。

式 (3.10), (3.11) の線形近似式の影響を調べるために、 P_1 の値を 0.5 から 1.0 まで変化させて、シミュレーション結果との比較を行う。なお、 P_2 は星モデルでは $P_2 = P_1^{1.5}$ とおいている。

まず、線形近似式の α_i と β_i は式 (3.12), (3.13) の各々第 1 項までの場合について考える。図-3.7 は P_1 の値を 0.5 から 1.0 まで変化させときのサブ流域の流出量 q_i の平均値、分散、3 次、4 次モーメントを表示したものである。実線が理論解、破線がシミュレーション結果を示している。 P_1 が小さくなって、非線形性が強まるにつれて理論値とシミュレーション結果の差が開いていくのが分かる。

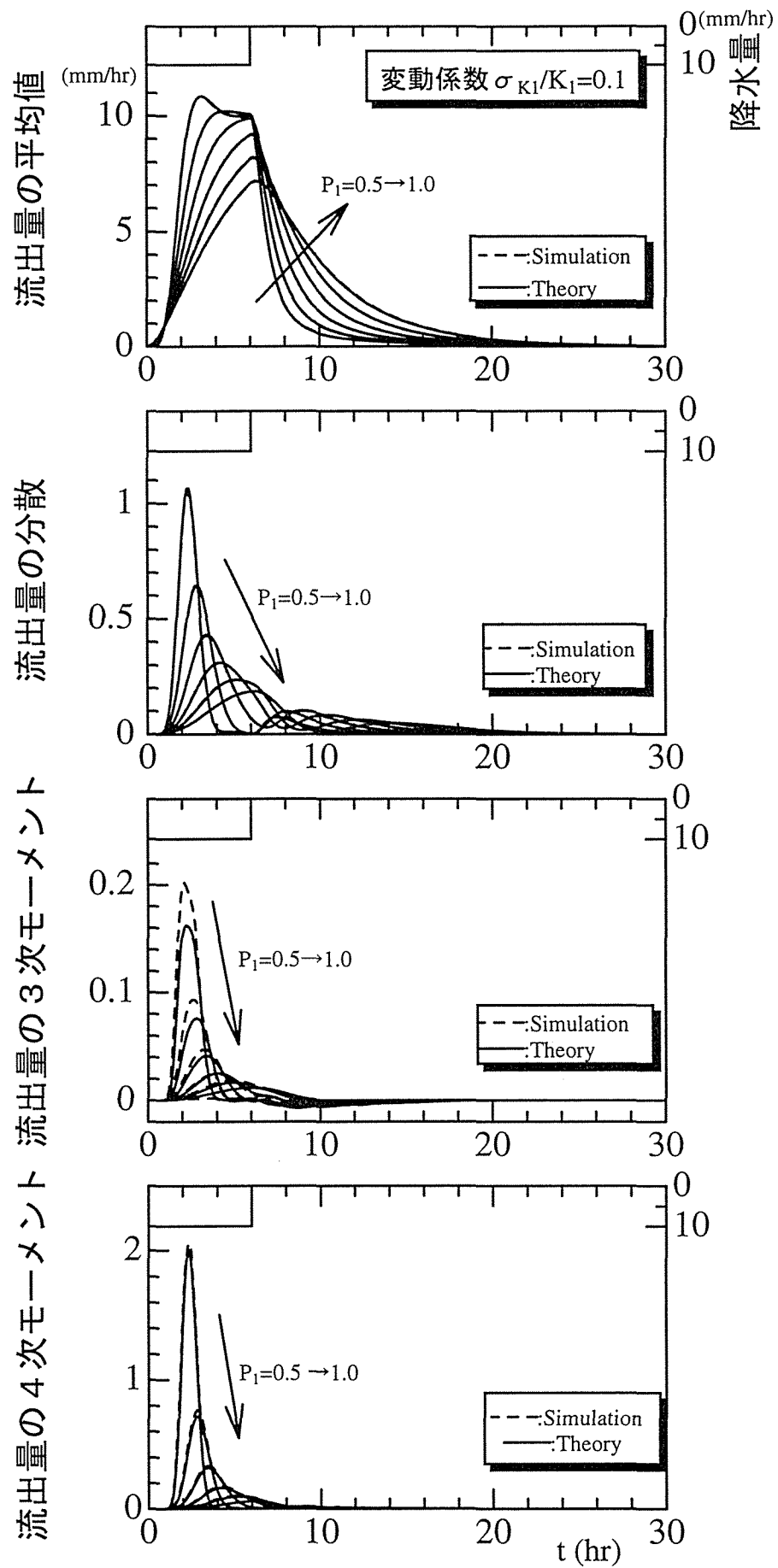


図-3.7 理論解における非線形性の影響 (矩形分布, 流出高表示)

3.2.8 サブ流域の地形量と貯留係数の関係

星モデルの貯留係数 K_1, K_2 と貯留指数 P_1, P_2 は Kinematic Wave 法とのパラメータを比較することにより以下の関係式が得られている¹⁴⁾.

$$K_1 = 2.823(N/\sqrt{s})^{0.6} A^{0.24} \dots\dots\dots (3.121)$$

$$K_2 = 0.2835 K_1^2 \bar{r}^{-0.2648} \dots\dots\dots (3.122)$$

$$P_1 = 0.6, \quad P_2 = 0.4648 \dots\dots\dots (3.123)$$

ここに, N : 等価粗度係数 (m-sec 単位), s : 斜面勾配, \bar{r} : 平均降雨強度 (mm/hr) である.

貯留係数を流域面積 (km^2) の関数と仮定して,

$$K_1 = a_1 A_i^{b_1}, \quad K_2 = a_2 A_i^{b_2} \dots\dots\dots (3.124)$$

とおくと, 係数は式 (3.121), (3.122) から以下のようになる.

$$a_1 = 2.823(N/\sqrt{s})^{0.6}, \quad b_1 = 0.24 \dots\dots\dots (3.125)$$

$$a_2 = 0.2835 \bar{r}^{-0.2648} a_1^2, \quad b_2 = 0.48 \dots\dots\dots (3.126)$$

流域のマグニチュードが m (サブ流域数 n は $2m-1$) である場合のサブ流域面積を $A_i(m)$ とおき, その平均値 $\bar{A}(m)$ と平均値からの偏差 $\tilde{A}(m)$ に分けて考える. 貯留係数と流域面積が非線形関係にあるので, 式 (3.10), (3.11) と同様に線形近似すると, 貯留係数 $K_1(m), K_2(m)$ は, 次式となる.

$$K_1(m) = a_1 \{ \nu_1 \bar{A}(m) + \xi_1 \tilde{A}(m) \} \dots\dots\dots (3.127)$$

$$K_2(m) = a_2 \{ \nu_2 \bar{A}(m) + \xi_2 \tilde{A}(m) \} \dots\dots\dots (3.128)$$

ここで, 係数 a_1 の等価粗度係数と斜面勾配はマグニチュード, 即ち流域のスケールによって若干変化すると考えられるが, 本論文では一定値として扱う.

また, 係数 $\nu_1, \xi_1, \nu_2, \xi_2$ は式 (3.12), (3.13) において, $\bar{y} \rightarrow \bar{A}(m), \tilde{q} \rightarrow \tilde{A}(m), P_1 \rightarrow b_1, P_2 \rightarrow b_2$ とおいたときの $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ に各々相当する.

したがって, $K_1(m), K_2(m)$ の 1~4 次モーメントは以下のようになる.

$$\bar{K}_i(m) = a_i \nu_i \bar{A}(m) \dots\dots\dots (3.129)$$

$$\sigma_{K_i}^2(m) = (a_i \xi_i)^2 \sigma_A^2(m) \dots\dots\dots (3.130)$$

$$\mu_{3K_i}(m) = (a_i \xi_i)^3 \mu_{3A}(m) \dots\dots\dots (3.131)$$

$$\mu_{4K_i}(m) = (a_i \xi_i)^4 \mu_{4A}(m) \dots\dots\dots (3.132)$$

$$(i = 1, 2)$$

ここで、 $\bar{A}(m)$, $\sigma_A^2(m)$, $\mu_{3A}(m)$ と $\mu_{4A}(m)$ はサブ流域面積の 1~4 次モーメントで、この統計量を与えることによってサブ流域からの流出量の 1~4 次モーメントが計算できる。

同様に、 $K_1(m)$ と $K_2(m)$ の相関係数を考えると、式 (3.29) の W_{ij} は次式で表される。

$$W_{11} = (a_1 a_2 \nu_1 \nu_2) \sigma_A^2(m) \dots\dots\dots (3.133)$$

$$W_{12} = (a_1 a_2^2 \nu_1 \nu_2^2) \mu_{3A}(m) \dots\dots\dots (3.134)$$

$$W_{21} = (a_1^2 a_2 \nu_1^2 \nu_2) \mu_{3A}(m) \dots\dots\dots (3.135)$$

$$W_{13} = (a_1 a_2^3 \nu_1 \nu_2^3) \mu_{4A}(m) \dots\dots\dots (3.136)$$

$$W_{22} = (a_1^2 a_2^2 \nu_1^2 \nu_2^2) \mu_{4A}(m) \dots\dots\dots (3.137)$$

$$W_{31} = (a_1^3 a_2 \nu_1^3 \nu_2) \mu_{4A}(m) \dots\dots\dots (3.138)$$

なお、ここで K_1 と K_2 が互いに独立の場合には、上式は

$$W_{11} = 0 \dots\dots\dots (3.139)$$

$$W_{12} = 0 \dots\dots\dots (3.140)$$

$$W_{21} = 0 \dots\dots\dots (3.141)$$

$$W_{13} = 0 \dots\dots\dots (3.142)$$

$$W_{22} = (a_1^2 a_2^2 \nu_1^2 \nu_2^2) \sigma_A^4(m) \dots\dots\dots (3.143)$$

$$W_{31} = 0 \dots\dots\dots (3.144)$$

となる。

サブ流域の面積 A_i の確率分布は前章の地形量解析から、ほぼガンマ分布に従うと考えて良いので、本研究ではガンマ分布を仮定して議論を進める。

マグニチュードが m である流域におけるサブ流域の面積 A_i の平均値 $\bar{A}(m)$ と分散 $\sigma_A^2(m)$ は前章で示したように、

$$\bar{A}(m) = \frac{A_t}{2m-1} \dots\dots\dots (3.145)$$

$$\sigma_A^2(m_1) = \sigma_A^2(m) \left\{ \frac{2m-1}{2m_1-1} \right\} \left\{ 1 + \left(\frac{2m-1}{2m_1-1} - 1 \right) \gamma_A \right\}, m > m_1 \dots\dots\dots (3.146)$$

とおくことが出来る。ここで、 $A_t(\text{km}^2)$ は全流域面積である。式 (3.146) はこの流域のマグニチュードが m あるいは m_1 であるときに、サブ流域面積の分散が $\sigma_A^2(m)$ あるいは $\sigma_A^2(m_1)$ である場合の分散の関係式で、 γ_A がサブ流域間の相関係数を表している。この γ_A の値は前章で既に示したように流域によって異なるものの、ほぼ 0.7 程度と考えて良い。

また、ガンマ分布の分布形の形状パラメータ $\lambda_A(m)$ と縮尺パラメータ $\kappa_A(m)$ は平均値 \bar{A} と分散 σ_A^2 との間に次の関係式がある。

$$\lambda_A(m) = \frac{\bar{A}(m)}{\sigma_A^2(m)}, \quad \kappa_A(m) = \frac{\bar{A}^2(m)}{\sigma_A^2(m)} \dots\dots\dots (3.147)$$

したがって、平均値と分散が与えられると、 A_i の3, 4次モーメントを以下のように求めることが出来る。

$$\mu_{3A}(m) = \frac{2\kappa_A(m)}{\lambda_A(m)^3} \dots\dots\dots (3.148)$$

$$\mu_{4A}(m) = \frac{3\kappa_A(m)(\kappa_A(m) + 2)}{\lambda_A(m)^4} \dots\dots\dots (3.149)$$

なお、サブ流域面積に対するガンマ分布の適合性については、前章において既にその妥当性が確かめられている。

3.2.9 サブ流域からの流出量の確率応答

前節で示したサブ流域の流域面積と貯留係数の関係は、一般的な流域の河道長と流域面積の関係を表す Hack の法則等を基に導かれた関係である。本節では先に導いた理論解の検証を目的としているので、特定の流域を対象にするのではなく、仮想的な流域を対象に、サブ流域の流域面積が確率変動する場合の流出量の確率応答に対する理論解を検討した。

前節で誘導したサブ流域の貯留係数は、流域面積との非線形関係を流出量の場合と同じく線形近似して得たものである。この近似式の精度が流出量の精度に影響することになる。3.2.7 節で議論した流出量に対するべき乗型確率変数の線形近似の影響を見ると、貯留指数が $P_1=0.6$, $P_2=0.4648$ の場合でも、式 (3.12), (3.13) の近似式に用いた α_i , β_i は第 1 項までを採用しただけでも十分な精度を得ていた。しかし、式 (3.125), (3.126) のサブ流域面積の場合は流出量よりも非線形性が強いために、線形近似式の ν_i , ξ_i はもっと高次の項まで採用する必要がある。

解析対象の仮想流域は、流域面積を $A_t=200(\text{km}^2)$ とおいて、サブ流域面積の統計量を式 (3.145)~(3.149) の理論式を用いて算出する。式 (3.146) のサブ流域の分散はサブ流域間の相関係数 γ_A を 0.7 とおき、マグニチュードが小さい m_1 の場合の分散 $\sigma_A^2(m_1)$ を既知として、マグニチュード m を次第に大きくした場合の分散 $\sigma_A^2(m)$ を求めた。ここでは $m_1=6$ のときのサブ流域面積の分散として、 $\sigma_A^2(m_1)=100, 50, 20(\text{km}^4)$ の 3 通りの分散を与えた。

また、式 (3.121) の K_1 に含まれる等価粗度 N と斜面勾配 s の比を $f_c = N/\sqrt{s}$ とおき、最初は、 $f_c = 1.0$ の一定値として理論解の検証を行う。

一方、理論解の検証は、シミュレーション法を用いる。シミュレーションは、与えられたサブ流域面積の統計量からガンマ分布関数の母数を推定し、この確率分布に従う 10,000 組のサブ流域面積をランダムに発生させて、流出量の統計量を求めている。なお、ここではサブ流域面積同士が互いに独立であるとの条件で乱数を発生させている。

図-3.8~図-3.10 はマグニチュードが $m=6$ の場合のサブ流域の流出量 q_i の 1~4 次モーメントを表示したものである。実線が理論解、破線がシミュレーション結果を示している。サブ流域面積の分散が大きい場合に、流出量の分散はややシミュレーション結果と差があるものの、理論解は十分満足できる範囲にある。

サブ流域面積の分散が大きいときにシミュレーション結果と違いが生じているのは、藤田・工藤ら²⁾も指摘しているように、式 (3.124) のべき乗関数を線形近似した際の係数 ν_i , ξ_i ($i=1,2$) の近似式 (式 (3.12), (3.13) に相当) の精度の問題と考えられる。今回は流出量の誤差を最小にするために、サブ流域面積の近似式では ν を第 2 項まで、 ξ を第 3 項まで考慮したが、流域面積の分散が大きくなる場合には、更に高次の項まで展開する必要があるものと考

えられる。

次に、実流域の流出解析結果によると、 f_c は $f_c > 1.0$ となる場合が多いようである¹⁴⁾。 $f_c > 1.0$ になると、貯留係数 K_1 が大きくなるので、一般に流出現象が遅くなることを意味している。この f_c による影響を調べるために、図-3.11 は f_c 以外を同じ計算条件に設定し、 f_c だけを 1.0 から 5.0 まで変化させた結果の図である。流出量の平均値、分散を見ると、シミュレーションと理論解の適合度に f_c はほとんど影響を与えていない。逆に f_c が小さい時に流出量の変動への影響が顕著になる傾向が見られ、今回の $f_c = 1$ というのはかなり厳しい条件である。

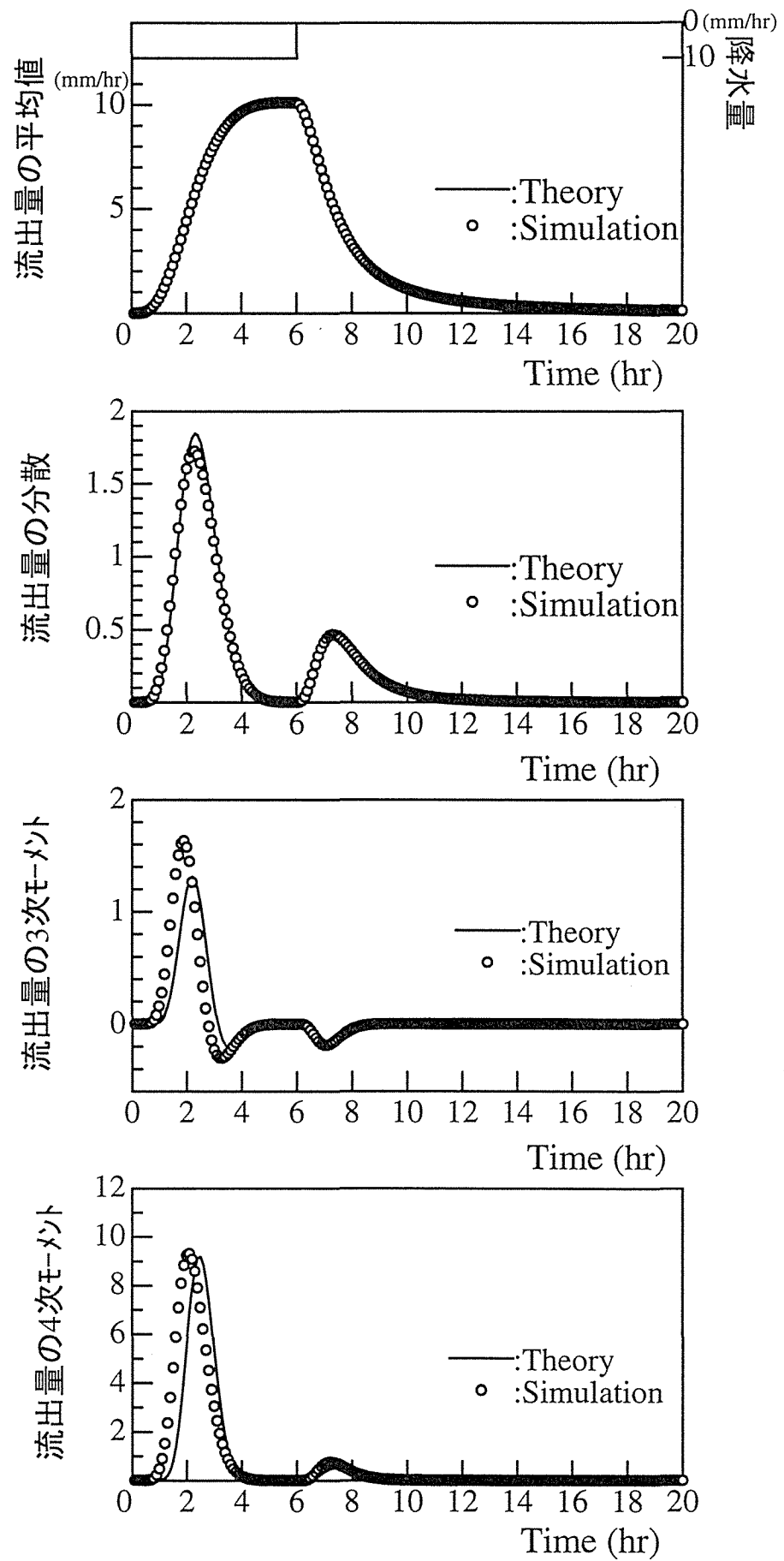


図-3.8 理論値とシミュレーション値の比較 ($\text{mag}=6$, $\sigma_A^2=100$)

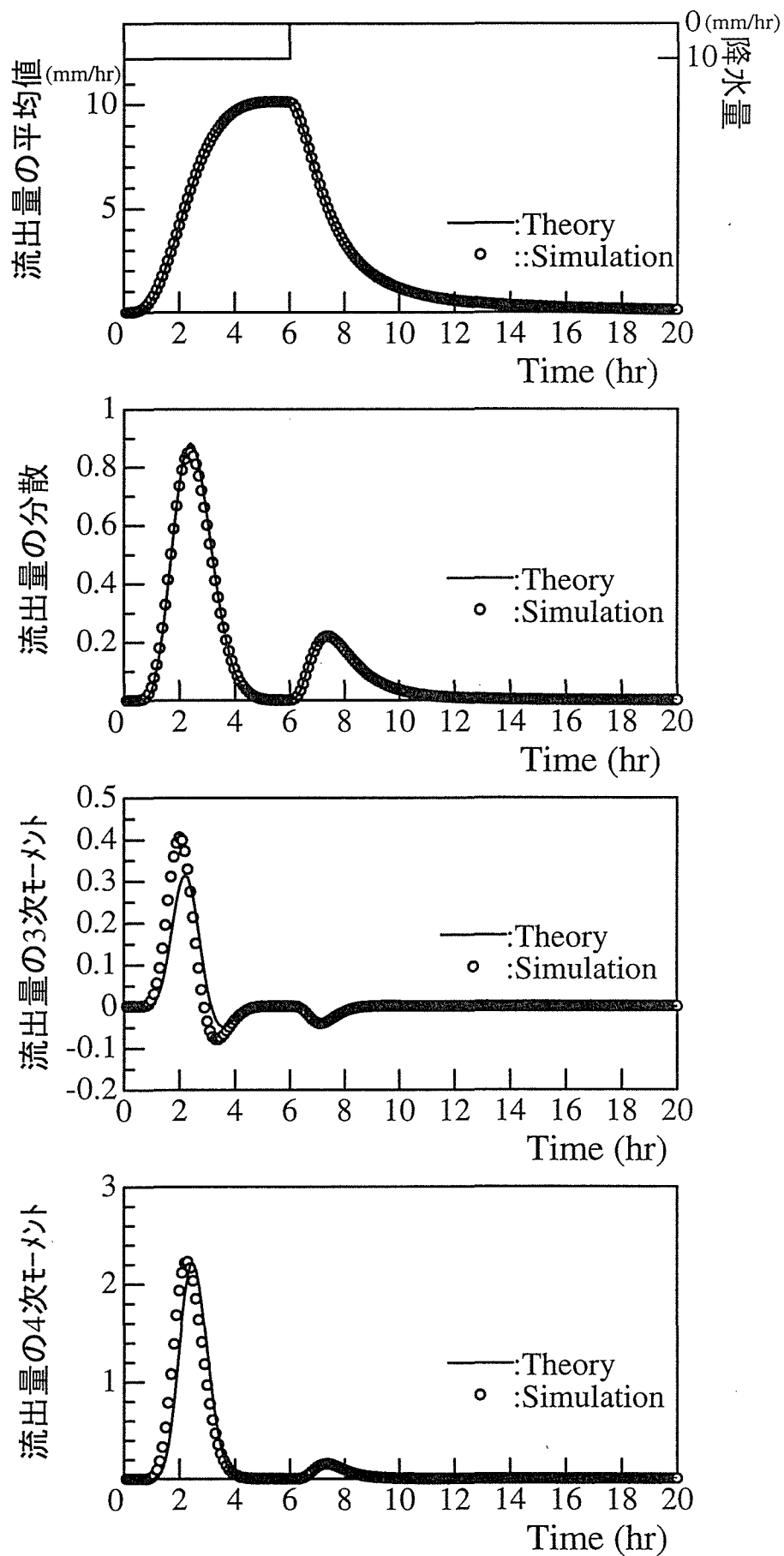


図-3.9 理論値とシミュレーション値の比較 ($\text{mag}=6$, $\sigma_A^2=50$)

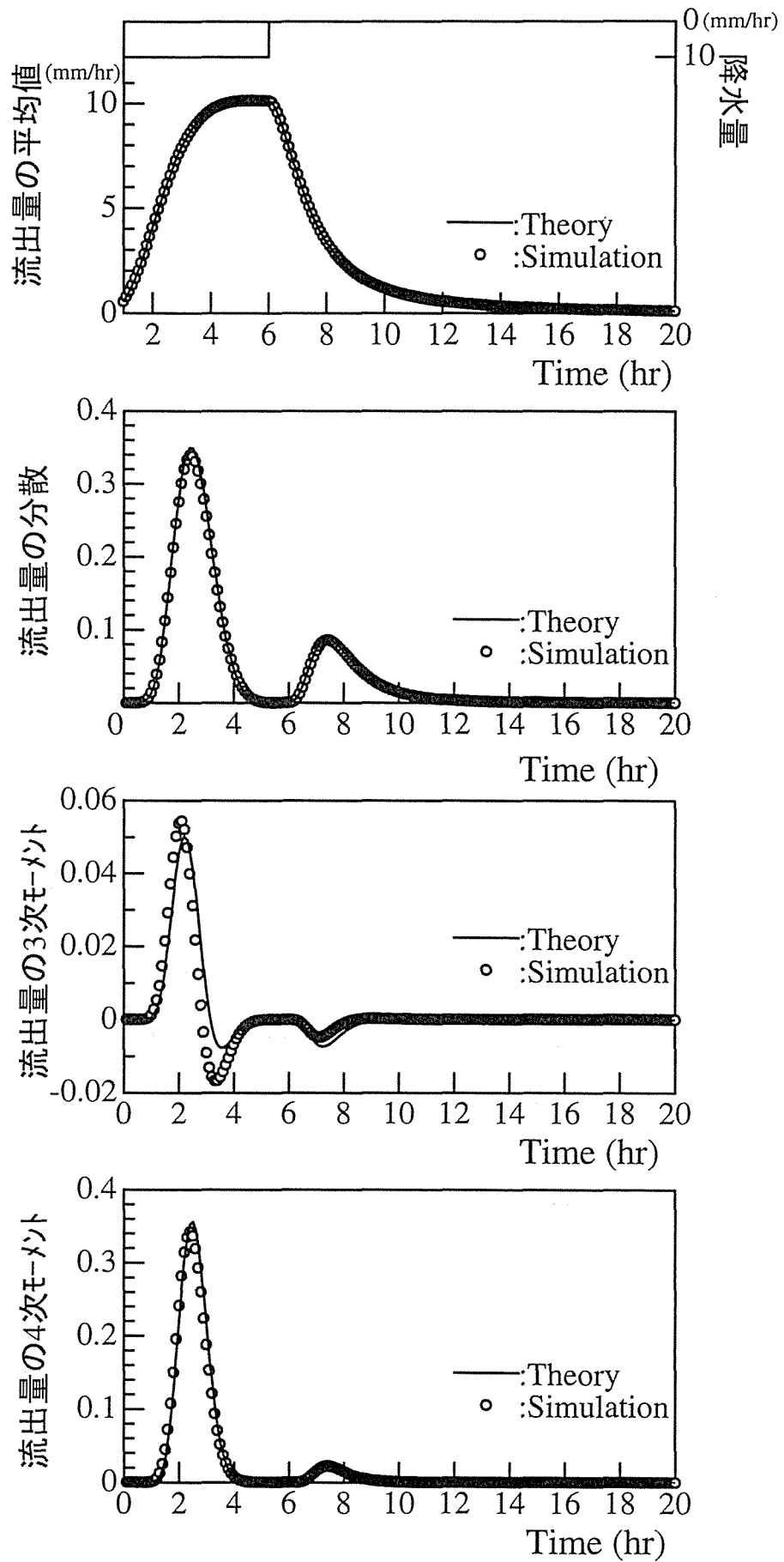


図-3.10 理論値とシミュレーション値の比較 ($\text{mag}=6$, $\sigma_A^2=20$)

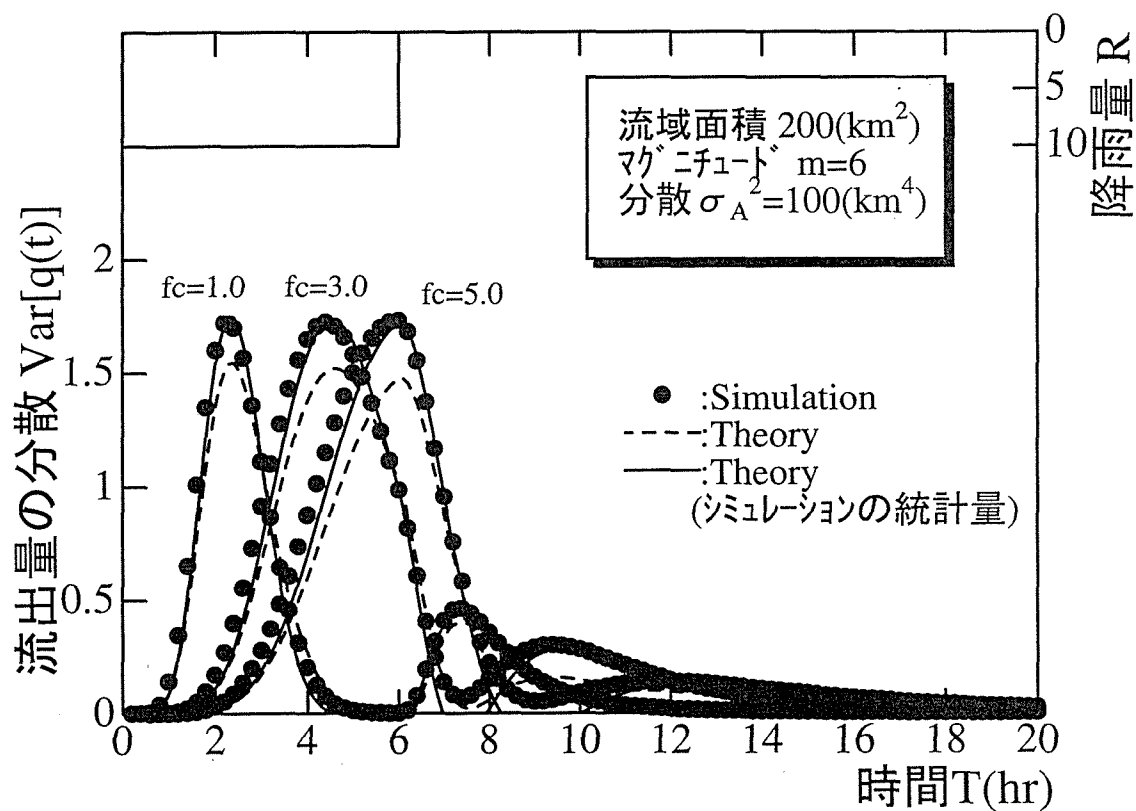
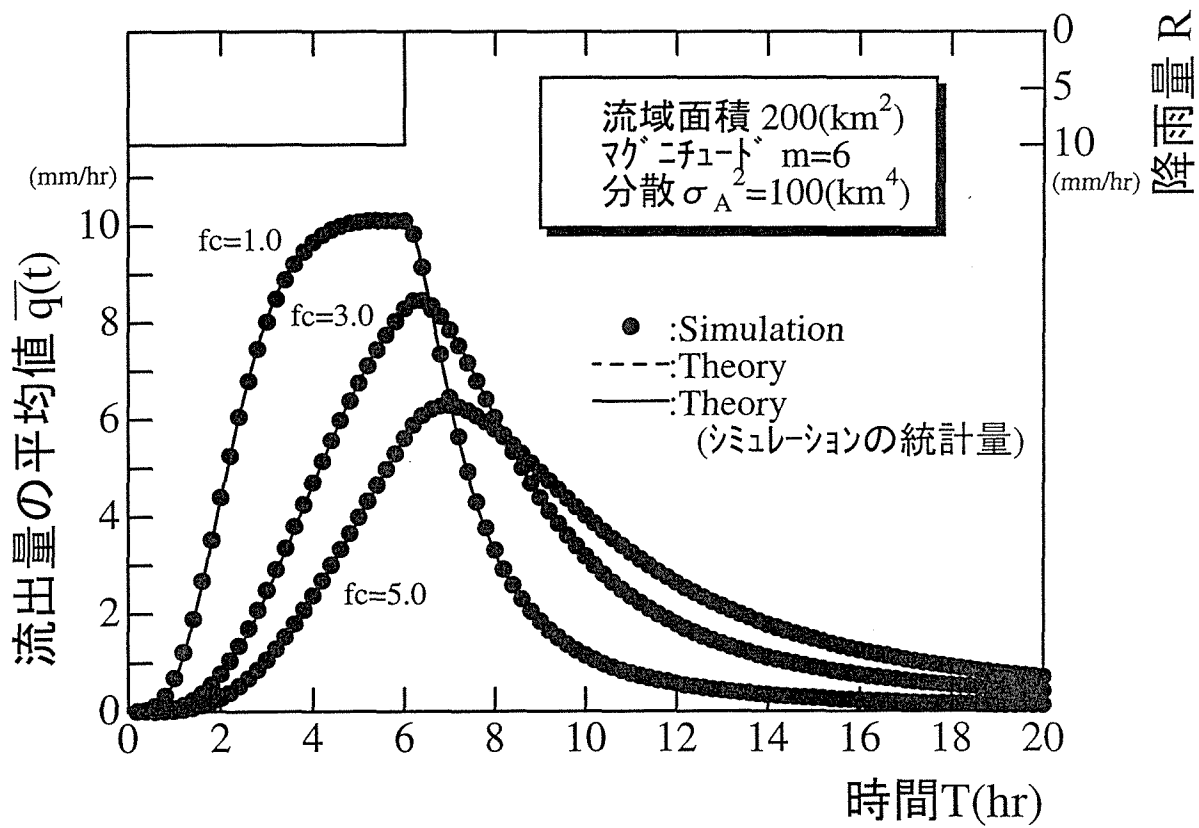


図-3.11 理論解に及ぼす f_c の影響

3.2.10 流量表示の場合の理論解の検証

前節の流出量は流出高表示であるために、流出量に対するサブ流域の流域面積の変動の影響が陽に表れていない。そのため、本節では流出量を流量 (m^3/sec) で表示することによって、流域面積の影響を考慮した。

サブ流域からの流出高を $q_i(t)(\text{mm/hr})$ 、面積を $A_i(\text{km}^2)$ とすると、流量 $q_{si}(t)(\text{m}^3/\text{sec})$ 表示は

$$q_{si}(t) = \frac{1}{3.6} A_i \cdot q_i(t) \dots\dots\dots (3.150)$$

になる。ここで、サブ流域面積 A_i を平均値と平均値からの偏差に分けて考えると、上式は

$$\bar{q}_s(t) + \tilde{q}_s(t) = \frac{1}{3.6} (\bar{A} + \tilde{A}) \{ \bar{q}(t) + \tilde{q}(t) \} \dots\dots\dots (3.151)$$

となる。

サブ流域からの流量の平均値 $\bar{q}_s(t)$ は、上式の期待値であるので、

$$\bar{q}_s(t) = \frac{1}{3.6} (\bar{A} \bar{q}(t) + E[\tilde{A} \tilde{q}(t)]) \dots\dots\dots (3.152)$$

となる。また、式 (3.151) から式 (3.152) を差し引くと流量の変動量 $\tilde{q}_s(t)$ は

$$\tilde{q}_s(t) = \frac{1}{3.6} (\tilde{A} \bar{q} + \bar{A} \tilde{q} + \tilde{A} \tilde{q} - E[\tilde{A} \tilde{q}]) \dots\dots\dots (3.153)$$

となる。

流量の分散 $\sigma_{q_s}^2(t)$ は、上式の $\tilde{q}_s(t)$ を 2 乗して期待値をとることによって得られる。

$$\begin{aligned} \sigma_{q_s}^2(t) = \frac{1}{3.6^2} & \left(\bar{A}^2 \sigma_q^2(t) + \sigma_A^2 \bar{q}(t)^2 + E[\tilde{A}^2 \tilde{q}(t)^2] - E[\tilde{A} \tilde{q}(t)]^2 + 2 \bar{A} \bar{q}(t) E[\tilde{A} \tilde{q}(t)] \right. \\ & \left. + 2 \bar{q}(t) E[\tilde{A}^2 \tilde{q}(t)] + 2 \bar{A} E[\tilde{A} \tilde{q}(t)^2] \right) \dots\dots\dots (3.154) \end{aligned}$$

流量の 3 次モーメント $\mu_{3q_s}(t)$ 、4 次モーメントも分散と同様に式 (3.153) を 3 乗あるいは 4 乗して、その期待値を考えると、

$$\begin{aligned} \mu_{3q_s}(t) = \frac{1}{3.6^3} & \left\{ \bar{A}^3 \mu_{3q}(t) + \mu_{3A} \bar{q}(t)^3 + 2 E[\tilde{A} \tilde{q}(t)]^3 \right. \\ & + 3 \bar{A}^2 (\bar{q}(t) E[\tilde{A} \tilde{q}(t)^2] + E[\tilde{A} \tilde{q}(t)^3] - \sigma_q^2(t) E[\tilde{A} \tilde{q}(t)]) \\ & + 3 \bar{q}(t)^2 (E[\tilde{A}^3 \tilde{q}(t)] - \sigma_A^2 E[\tilde{A} \tilde{q}(t)]) - 3 E[\tilde{A}^2 \tilde{q}(t)^2] E[\tilde{A} \tilde{q}(t)] \\ & + 3 \bar{A} \bar{q}(t)^2 E[\tilde{A}^2 \tilde{q}(t)] + 3 \bar{A} E[\tilde{A}^2 \tilde{q}(t)^3] + 3 \bar{q}(t) E[\tilde{A}^3 \tilde{q}(t)^2] \\ & + 6 \bar{A} \bar{q}(t) (E[\tilde{A}^2 \tilde{q}(t)^2] - E[\tilde{A} \tilde{q}(t)]^2) - 6 \bar{A} E[\tilde{A} \tilde{q}(t)^2] E[\tilde{A} \tilde{q}(t)] \\ & \left. - 6 \bar{q}(t) E[\tilde{A}^2 \tilde{q}(t)] E[\tilde{A} \tilde{q}(t)] \right\} \dots\dots\dots (3.155) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_{4q_s}(t) = & \frac{1}{3.6^4} \left\{ \bar{A}^4 \mu_{4q}(t) + \mu_{4A} \bar{q}(t)^4 - 3E[\tilde{A}\tilde{q}]^4 \right. \\
& + 4\bar{A}^3 \left(\bar{q}(t)E[\tilde{A}\tilde{q}(t)^3] + E[\tilde{A}\tilde{q}(t)^4] - \mu_{3q}(t)E[\tilde{A}\tilde{q}(t)] \right) \\
& + 4\bar{q}(t)^3 \left(\bar{A}E[\tilde{A}^3\tilde{q}(t)] + E[\tilde{A}^4\tilde{q}(t)] - \mu_{3A}E[\tilde{A}\tilde{q}(t)] \right) \\
& + 6\bar{A}^2 \left(\bar{q}(t)^2 E[\tilde{A}^2\tilde{q}(t)^2] + \sigma_q^2 \right) + 6E[\tilde{A}\tilde{q}(t)] \left(\bar{q}(t)^2 \sigma_A^2 + E[\tilde{A}^2\tilde{q}(t)^2] \right) \\
& + 12\bar{A}^2 \left(\bar{q}(t)E[\tilde{A}^2\tilde{q}(t)^3] - \bar{q}(t)E[\tilde{A}\tilde{q}(t)^2]E[\tilde{A}\tilde{q}(t)] - E[\tilde{A}\tilde{q}(t)^3]E[\tilde{A}\tilde{q}(t)] \right) \\
& - 12\bar{q}(t)^2 \left(E[\tilde{A}\tilde{q}(t)]E[\tilde{A}\tilde{q}(t)] - \bar{A}E[\tilde{A}^3\tilde{q}(t)^2] + \bar{A}E[\tilde{A}^2\tilde{q}(t)]E[\tilde{A}\tilde{q}(t)] \right) \\
& - 12\bar{q}(t) \left(E[\tilde{A}^3\tilde{q}(t)^2]E[\tilde{A}\tilde{q}(t)] - E[\tilde{A}^2\tilde{q}(t)]E[\tilde{A}\tilde{q}(t)^2] \right) \\
& - 12\bar{A} \left(E[\tilde{A}^2\tilde{q}(t)^3]E[\tilde{A}\tilde{q}(t)] - E[\tilde{A}\tilde{q}(t)^2]E[\tilde{A}\tilde{q}(t)]^2 \right) \\
& \left. + 12\bar{A}\bar{q}(t) \left(E[\tilde{A}\tilde{q}(t)]^3 - 2E[\tilde{A}^2\tilde{q}(t)^2]E[\tilde{A}\tilde{q}(t)] \right) \right\} \dots\dots\dots (3.156)
\end{aligned}$$

となる。ただし、上式では6次以上の A と q の相関係数は無視している。

次に、上式中の $E[\tilde{A}\tilde{q}(t)]$, $E[\tilde{A}^2\tilde{q}(t)]$, $E[\tilde{A}\tilde{q}(t)^2]$, \dots 等の A と q の相関係数項は、式(3.127), (3.128) の貯留係数と流域面積の関係式を用いて誘導できる。 A と K_i の変動成分間には $\tilde{K}_i(m) = a_i \xi_i \tilde{A}(m)$ ($i = 1, 2$) の関係があるので、例えば、 $E[\tilde{A}(m)\tilde{q}(t)]$ は以下のようなになる。

$$E[\tilde{A}(m)\tilde{q}(t)] = \frac{E[\tilde{K}_i(m)\tilde{q}(t)]}{a_i \xi_i}, \quad i = 1, 2 \dots\dots\dots (3.157)$$

他の各項も同様にして求めることができる。

本研究では、流出量の統計量を求める際に、 $E[\tilde{K}_i\tilde{q}]$ 等を未知数として解いているので、上式の関係性を考慮して $E[\tilde{A}\tilde{q}]$ 等を求めることができる。また、式(3.157)を式(3.26)等に代入して $E[\tilde{A}\tilde{q}]$ 等を未知数として解くことも当然できる。

図-3.12～図-3.14 はサブ流域からの流出量 $q_s(t)$ の1～4次モーメントを流量表示で、シミュレーションと理論値を比較した図である。図-3.8～図-3.10 と比較すると、流量の平均値は面積の分散が大きくなるにつれ流量のピーク値がやや低くなることが判る。

また、分散は式(3.154)の第2項以降の項が付加されるため、図-3.8～図-3.10 と比べるとかなり異なっている。その中でも第2項の $\sigma_A^2 \tilde{q}(t)$ が支配的である。

シミュレーション結果と比較すると、面積の分散が大きい場合にやや差が見られるが、これは図-3.8～図-3.10 の $q(t)$ による誤差の影響と考えられる。

以上の結果から、サブ流域からの流出量の理論解は十分実用に供するものと判断できる。

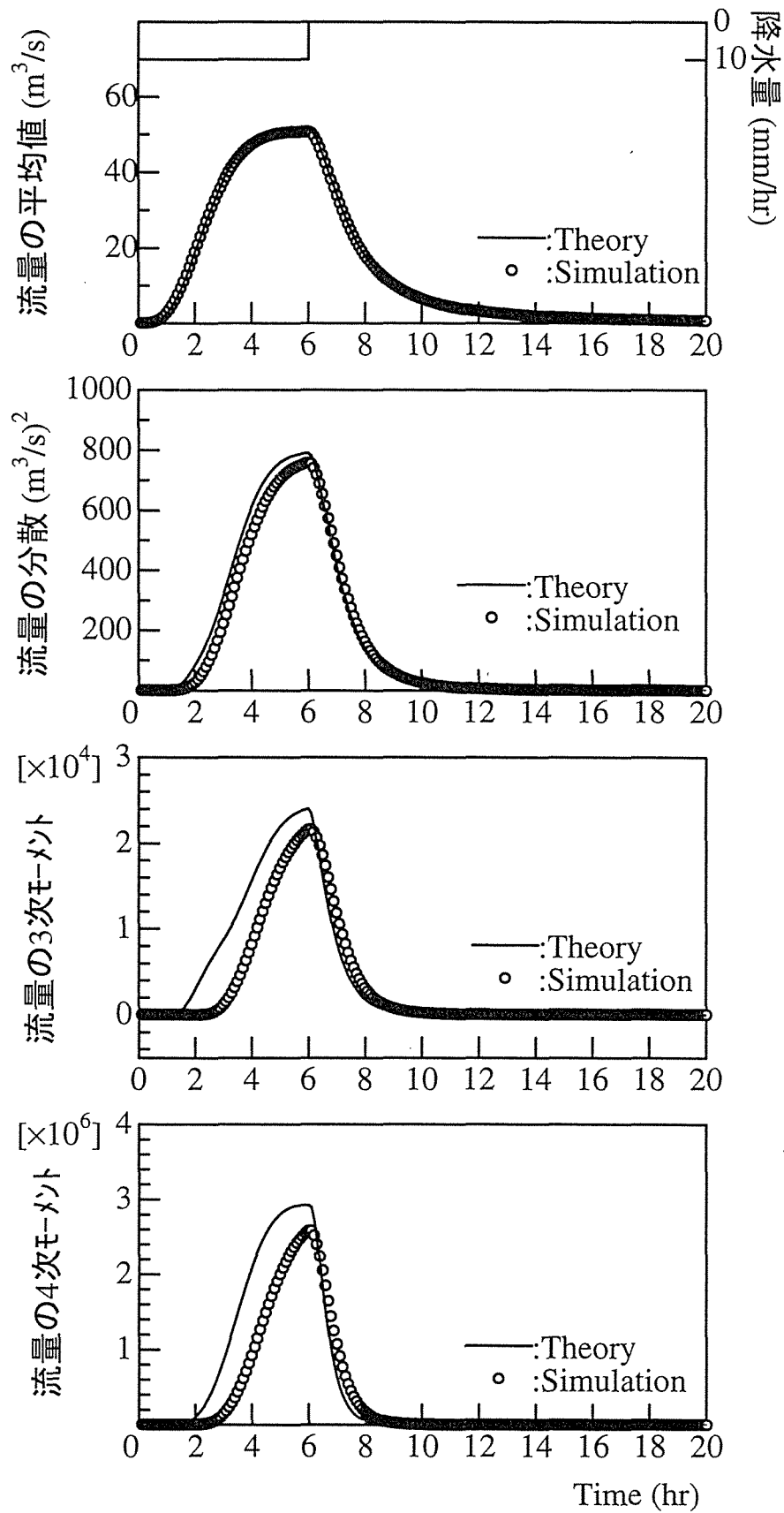


図-3.12 理論値とシミュレーション値の比較 (流量表示, $\text{mag}=6$, $\sigma_A^2=100$)

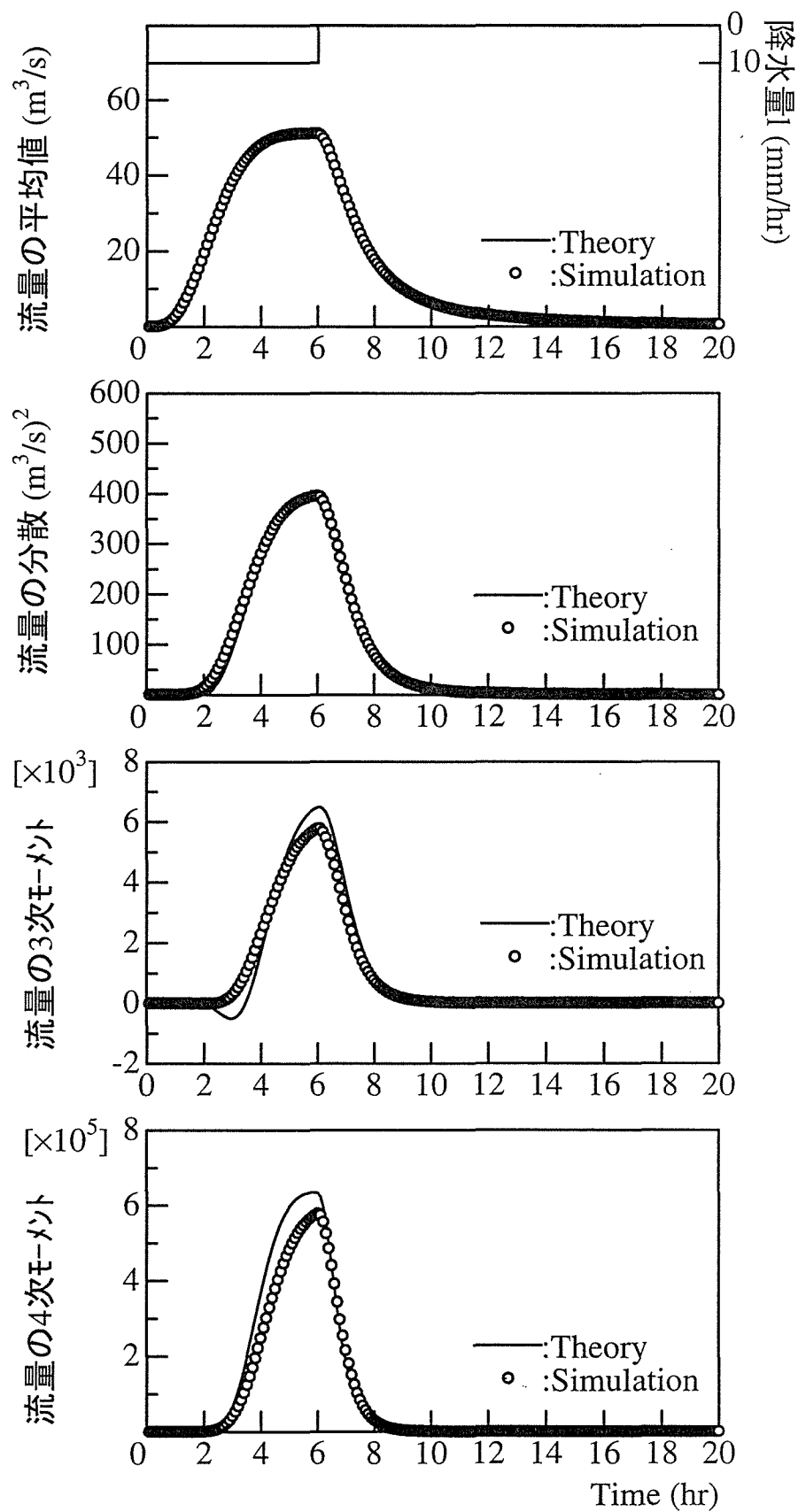


図-3.13 理論値とシミュレーション値の比較 (流量表示, $\text{mag}=6$, $\sigma_A^2=50$)

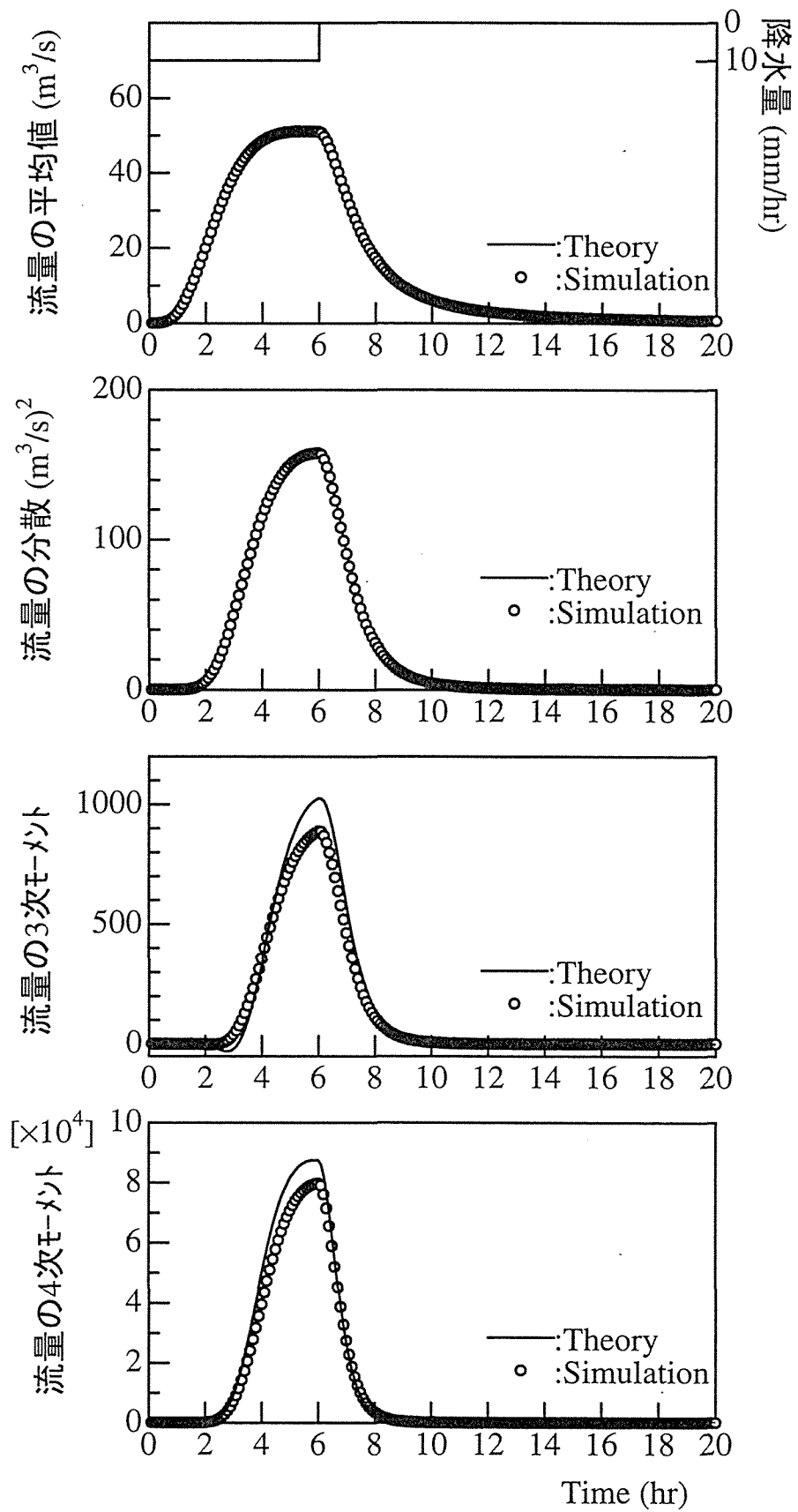


図-3.14 理論値とシミュレーション値の比較 (流量表示, $\text{mag}=6$, $\sigma_A^2=20$)

3.3 河道網パターンの確率変動による流出量の確率応答

本節では河道網によってサブ流域からの流出量が運搬・合成される河道網の集水過程を考え、河道網のパターンが確率変動する場合の流出量の確率応答を議論する。

河道網の集水過程は、各サブ流域からの流出量が河道を流下する際の流出波形の伝播・変形過程と、斜面が接続する河道への横流入や支流が本流に合流する等による流量の合成過程に分けられる。河道を流下する流出波形は、河道の横断面形状や河道勾配によってその伝播速度や拡散等による流出波形の変形が規定される。本研究は比較的河道勾配の急峻な山地流域を対象に取り上げているので、流出波形が変形や減衰することなく下流に伝播するとみなす Kleitz-Seddon の法則が成り立つと仮定した。また、横流入や合流による流量の合成過程において、混合損失を正確に見積もることはかなり難しいので、本研究では流出波形を単純に線形重ね合わせて合成する仮定を採用した。

以上の仮定を考慮すると、河道網の集水過程は式 (3.1) に示すように各サブ流域からの流出量が流域末端に到達する遅れ時間 τ_i によって表現できる。したがって、河道網パターンは空間的にばらついて配置されている各サブ流域の遅れ時間の確率変動によって表される。本研究は第2章3節で提案した河道網パターン構造を理論的に表す確率分布関数を用いて、この遅れ時間の確率変動特性を明らかにし、流域末端における流出量の確率変動について議論する。

3.3.1 流出の遅れ時間の確率変動

流域における流出の遅れ時間 τ_i は、 i 番目のサブ流域からの流出量が河道網末端までに到る河道 (その経路長を流路長と呼ぶ) を伝播する時間と考えると、遅れ時間は流路長 R_i と伝播速度 V によって規定される。

流出波形の伝播速度は流れの運動方程式から、河道の横断面形状、河道幅や河道勾配等の河道幾何形状と河道の流れを支配する抵抗則によって左右されることが判る。しかしながら、推定に必要な河道の地形量を手にいれることは容易なことではない。そこで、本研究では本邦の河川において山辺²⁰⁾が整理した流量と平均流速のレジーム関係を利用する。図-3.15 は本邦の河川における平均流速 U と流量 Q の関係を示しているが、河道の断面形を矩形と仮定し、抵抗則に Manning 式を用いると、流量のピーク時の伝播速度は以下の回帰式から得られる¹⁷⁾。

$$V = \frac{5}{3}U = \frac{5}{3} \times 0.62 \times Q_{peak}^{0.11} \dots\dots\dots (3.158)$$

したがって、遅れ時間 τ_i は次式で定義できる。

$$\tau_i = R_i/V \dots\dots\dots (3.159)$$

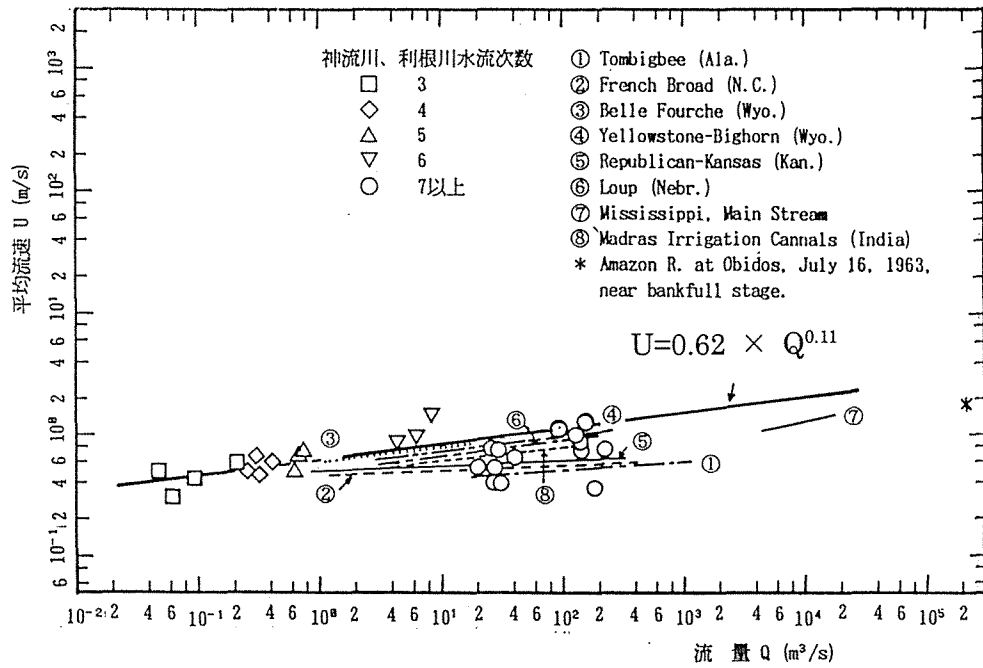


図-3.15 伝播速度と流量の関係

まず、問題を単純化するために伝播速度 V は一定と仮定する。その結果、遅れ時間の確率変動は河道網末端までの河道長 R_i の確率変動に置き換えられる。流路長 R_i は図-3.1 から分かるように、河道網末端から i 番目のサブ流域の出口まで遡ったサブ流域のリンク長の和であるので、通過するサブ流域のリンク長の和の確率分布を考える。

流域のマグニチュードが m である場合のサブ流域のリンク長の統計量については第2章4節で既に述べた。そこでは、リンク長が互いに独立なガンマ分布であると仮定して、その場合の流路長の確率分布を以下のように誘導している。

河道網末端から j 個のリンクを遡った流路長 R_j の確率密度関数 $f_j(R_j)$ は

$$f_j(R_j) = \frac{\lambda_{R_j}^{\kappa_{R_j}} R_j^{\kappa_{R_j}-1}}{\Gamma(\kappa_{R_j})} e^{-\lambda_{R_j} R_j} \dots\dots\dots (3.160)$$

となる。ここで、流路長の縮尺パラメータ λ_{R_j} と形状パラメータ κ_{R_j} は、サブ流域のリンク長 L_i の縮尺パラメータ λ_L と形状パラメータ κ_L と次の関係がある。

$$\kappa_{R_j} = j \kappa_L, \quad \lambda_{R_j} = \lambda_L \dots\dots\dots (3.161)$$

また、河道網末端から j 個遡った所に位置するリンク数 K_j の確率関数が $G(m, j)$ であるので、河道長 R_i の確率密度関数 $F_R(R)$ は、 $G(m, j)$ と $f_j(R_j)$ を組み合わせることにより次式となる。

$$F_R(R) = G(m, 1)\delta(R) + \sum_{j=2}^m f_{j-1}(R_{j-1})G(m, j) \dots\dots\dots (3.162)$$

ここに、 $\delta(x)$ はデルタ関数である。 $G(m, j)$ は各々の河道網パターン毎に異なるので、河道長 R_i の確率密度関数 $F_R(R)$ も河道網パターン毎に異なる。上式を実流域の河道網に適用し、

流路長と比較した結果は、第2章4節でも述べたように十分良好であった。したがって、遅れ時間 τ_i の確率密度関数 $G_T(\tau)$ は、式(3.159)の関係から次式で表される。

$$G_T(\tau) = V \cdot F_R(V \cdot \tau) \dots\dots\dots (3.163)$$

3.3.2 遅れ時間の確率変動を考慮した流量の確率応答

流域全体の流量 $Q_n(t)$ は式(3.1)から $q_i(t)$ と τ_i が確率変数であるので、 $Q_n(t)$ もまた確率変数となる。即ち、 $Q_n(t)$ の確率密度関数は q_i と τ_i の結合確率密度関数 $h(q_i, \tau_i)$ で表現できる。したがって、流域末端における流量の確率応答はこの結合確率密度関数を用いて誘導することができる。

まず、 $Q_n(t)$ の期待値を考える。 q_i と τ_i の結合確率密度関数 $h(q_i, \tau_i)$ を用いて $Q_n(t)$ の期待値を考えると、 $E[Q_n(t)]$ は式(3.1)の関係から次式で表される。

$$E[Q_n(t)] = \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q_i(t - \tau_i) h(q_i, \tau_i) dq_i d\tau_i \dots\dots\dots (3.164)$$

ここで、 n はサブ流域数である。いま、 q_i と τ_i の間の相関が小さいと考え、互いに独立であると仮定すると、 q_i と τ_i の結合確率密度関数 $h(q_i, \tau_i)$ は q_i と τ_i の確率密度関数の積になる。この場合、まず、 τ_i を確定値と考え、 q_i に関する期待値を考えると、上式の右辺の q_i は

$$\begin{aligned} E[q_i(t - \tau_i)] &= E[\bar{q}(t - \tau_i) + \tilde{q}(t - \tau_i)] \\ &= E[\bar{q}(t - \tau_i)] \dots\dots\dots (3.165) \end{aligned}$$

となる。次に、 τ_i を確率変数と考えて期待値をとると、 τ_i の確率密度関数 $G_T(\tau)$ は式(3.163)であるので、上式の右辺は

$$E[\bar{q}(t - \tau_i)] = \int_0^{\infty} \bar{q}(t - \tau) G_T(\tau) d\tau \dots\dots\dots (3.166)$$

となる。ここで、 $t - \tau = T$ とおいて、上式を変数変換すると

$$E[\bar{q}(t - \tau_i)] = \int_{-\infty}^t \bar{q}(T) G_T(t - T) dT \dots\dots\dots (3.167)$$

となる。したがって、 $Q_n(t)$ の期待値 $\bar{Q}_n(t)$ は

$$\bar{Q}_n(t) = E[Q_n(t)] = n \int_0^t \bar{q}(T) G_T(t - T) dT \dots\dots\dots (3.168)$$

となる。

次に、 $Q_n(t)$ の分散を考える。平均値からの変動成分 $\tilde{Q}_n(t)$ は $Q_n(t)$ から上式の $\bar{Q}_n(t)$ を差し引くと

$$\tilde{Q}_n(t) = \sum_{i=1}^n \{\bar{q}(t - \tau_i) + \tilde{q}(t - \tau_i)\} - \bar{Q}_n(t) \dots\dots\dots (3.169)$$

となる．これを2乗して平均値と同様に期待値を考えると， $Q_n(t)$ の分散 $\sigma_{Q_n}^2(t)$ が以下のようになる．

$$\sigma_{Q_n}^2(t) = n \int_0^t \left\{ \bar{q}^2(T) + \sigma_q^2(T) \right\} G_T(t-T) dT - n \left\{ \int_0^t \bar{q}(T) G_T(t-T) dT \right\}^2 \cdots (3.170)$$

同様に $Q_n(t)$ の3次，4次モーメント ($\mu_{3Q_n}(t), \mu_{4Q_n}(t)$) も分散と同じく式(3.169)をそれぞれ3乗，4乗して期待値を考慮することによって求めることができる．以下に結果だけを示す．

$$\begin{aligned} \mu_{3Q_n}(t) = & n \int_0^t \left\{ \bar{q}^3(T) + 3\bar{q}(T)\sigma_q^2(T) + \mu_{3q}(T) \right\} G_T(t-T) dT \\ & - 3n \int_0^t \left\{ \bar{q}^2(T) + \sigma_q^2(T) \right\} G_T(t-T) dT \times \int_0^t \bar{q}(T) G_T(t-T) dT \\ & + 2n \left\{ \int_0^t \bar{q}(T) G_T(t-T) dT \right\}^3 \cdots \cdots \cdots (3.171) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_{4Q_n}(t) = & n \int_0^t \left\{ \bar{q}^4(T) + 6\bar{q}^2(T)\sigma_q^2(T) + 4\bar{q}(T)\mu_{3q}(T) + \mu_{4q}(T) \right\} G_T(t-T) dT \\ & - 4n \int_0^t \left\{ \bar{q}^3(T) + 3\bar{q}(T)\sigma_q^2(T) + \mu_{3q}(T) \right\} G_T(t-T) dT \\ & \times \int_0^t \bar{q}(T) G_T(t-T) dT + 3n(n-1) \left\{ \int_0^t \left\{ \bar{q}^2(T) + \sigma_q^2(T) \right\} G_T(t-T) dT \right\}^2 \\ & - 6n(n-2) \int_0^t \left\{ \bar{q}^2(T) + \sigma_q^2(T) \right\} G_T(t-T) dT \times \left\{ \int_0^t \bar{q}(T) G_T(t-T) dT \right\}^2 \\ & + 3n(n-2) \left\{ \int_0^t \bar{q}(T) G_T(t-T) dT \right\}^4 \cdots \cdots \cdots (3.172) \end{aligned}$$

3.3.3 シミュレーションによる理論解の検証

図-3.16～図-3.16 はサブ流域の流出量の確率変動と河道網による遅れ時間の確率変動を結びつけた流域全体から流量の確率変動の理論解とシミュレーション結果を比較した図である．シミュレーションは，サブ流域からの流出量をシミュレートした前節と同じ条件で計算した．一方，その流出量の遅れ時間は河道網パターンとして図-2.23 に示す平均的な河道網パターンである $C(m, j)$ を用いて，式(3.163)の遅れ時間の確率密度関数 $G_T(\tau)$ を求め，この確率密度関数に従う遅れ時間をシミュレートした．ここで，リンク長の平均値は式(2.14)から求め，分散は式(2.26)において相関係数 $\gamma_L = 0.0$ とマグニチュード $m = 6$ のときの $\sigma_L^2 = 10$ (km²) を与えた．このシミュレーションをサブ流域数 n だけ繰り返して行い，一組の流域全域からの流量がシミュレートされる．このシミュレーションを今回は10,000回繰り返し，流量の確率統計量を算定した．

図-3.16～図-3.18 は前節のサブ流域からの流出量の時と同じく流域面積の分散を $\sigma_A^2 = 20, 50, 100$ (km⁴) の3通りについて流量の1～4次モーメントを比較した． $\sigma_A^2 = 20$ と小さい場合には，1～4次モーメントの何れも理論値はシミュレーション結果と良く一致してい

る. σ_A^2 が次第に大きくなっていくと3次, 4次モーメントの高次のモーメントから両者の違いが生じ, $\sigma_A^2=100$ になると, 2次モーメントもやや差が見られる. 前節で検討したサブ流域の確率応答の結果を踏まえると, 流域全体の流量のシミュレーションとの確率応答の違いは, 遅れ時間よりもサブ流域の流出量の確率応答の方が大きく影響していると考えられる.

以上, 河道網によるサブ流域からの流出の遅れ時間の効果も式(3.169)~(3.172)の近似式で評価出来ることが判る. したがって, 本章で提案したサブ流域の流出量の確率変動と河道網による遅れ時間の確率変動の両者を結びつけた理論式が流域全体の流量の確率応答をほぼ表現できるものと考えられる.

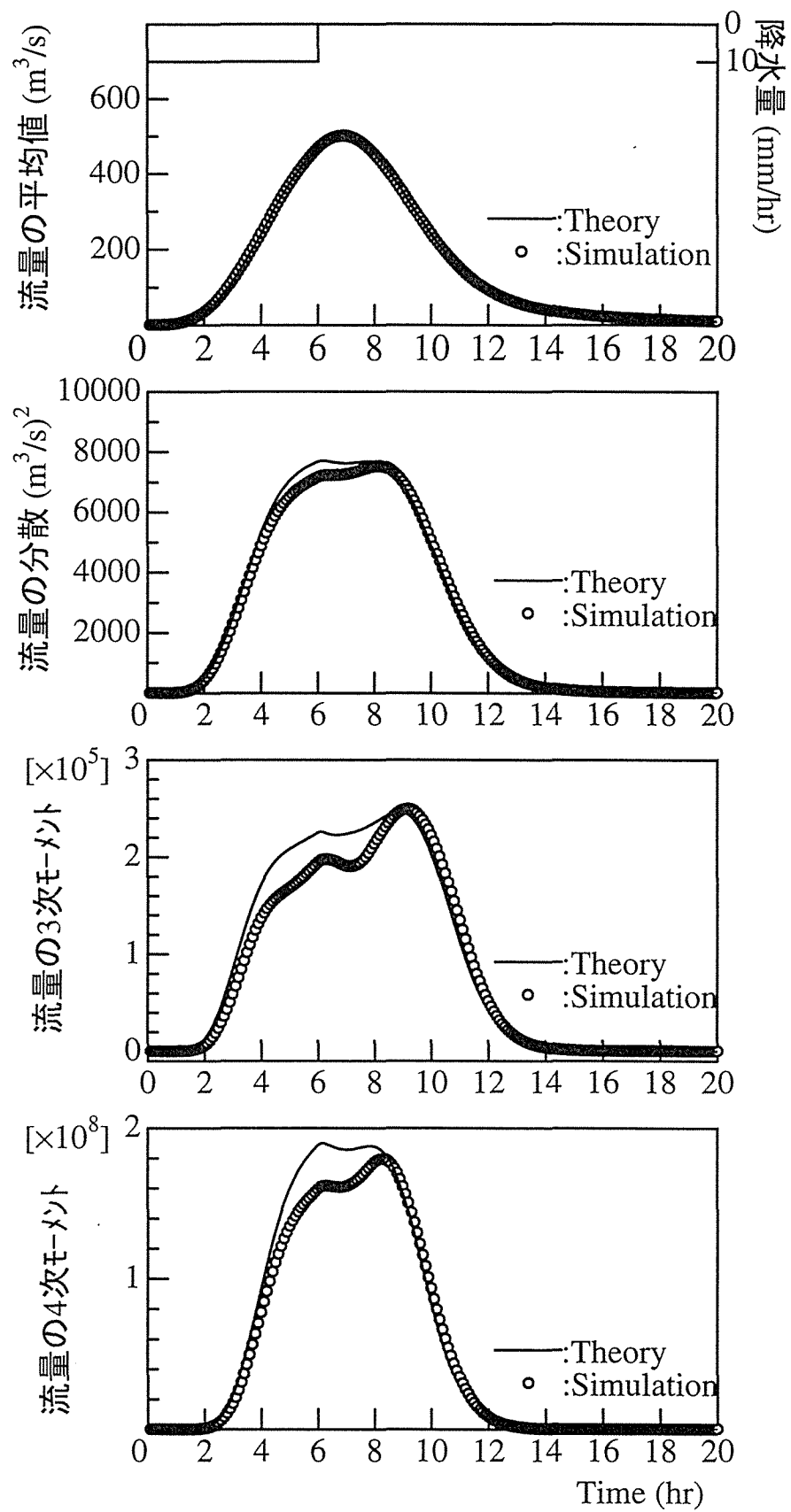


図-3.16 理論値とシミュレーション値の比較 ($\text{mag}=6$, $\sigma_A^2=100$)

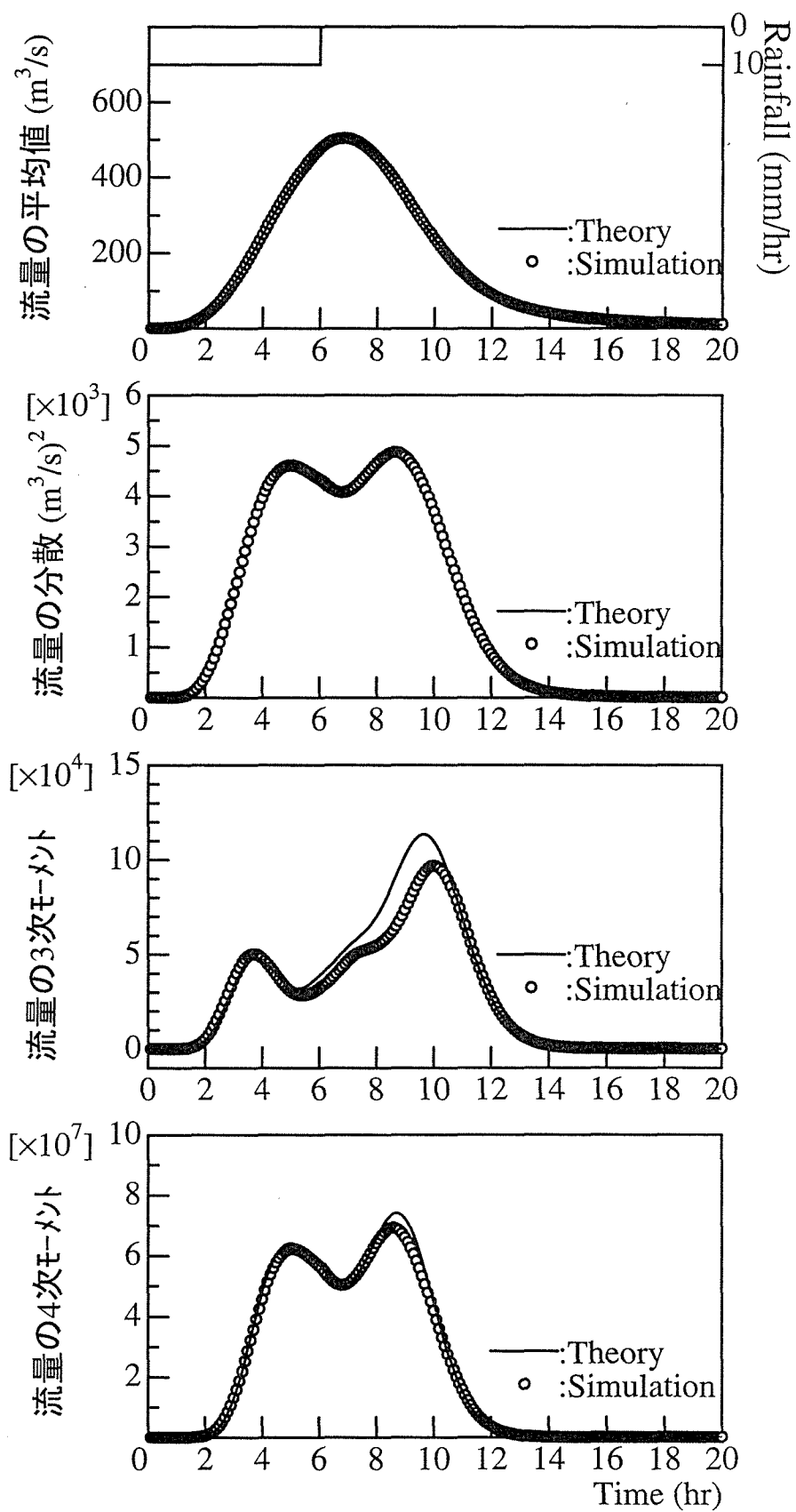


図-3.17 理論値とシミュレーション値の比較 ($\text{mag}=6$, $\sigma_A^2=50$)

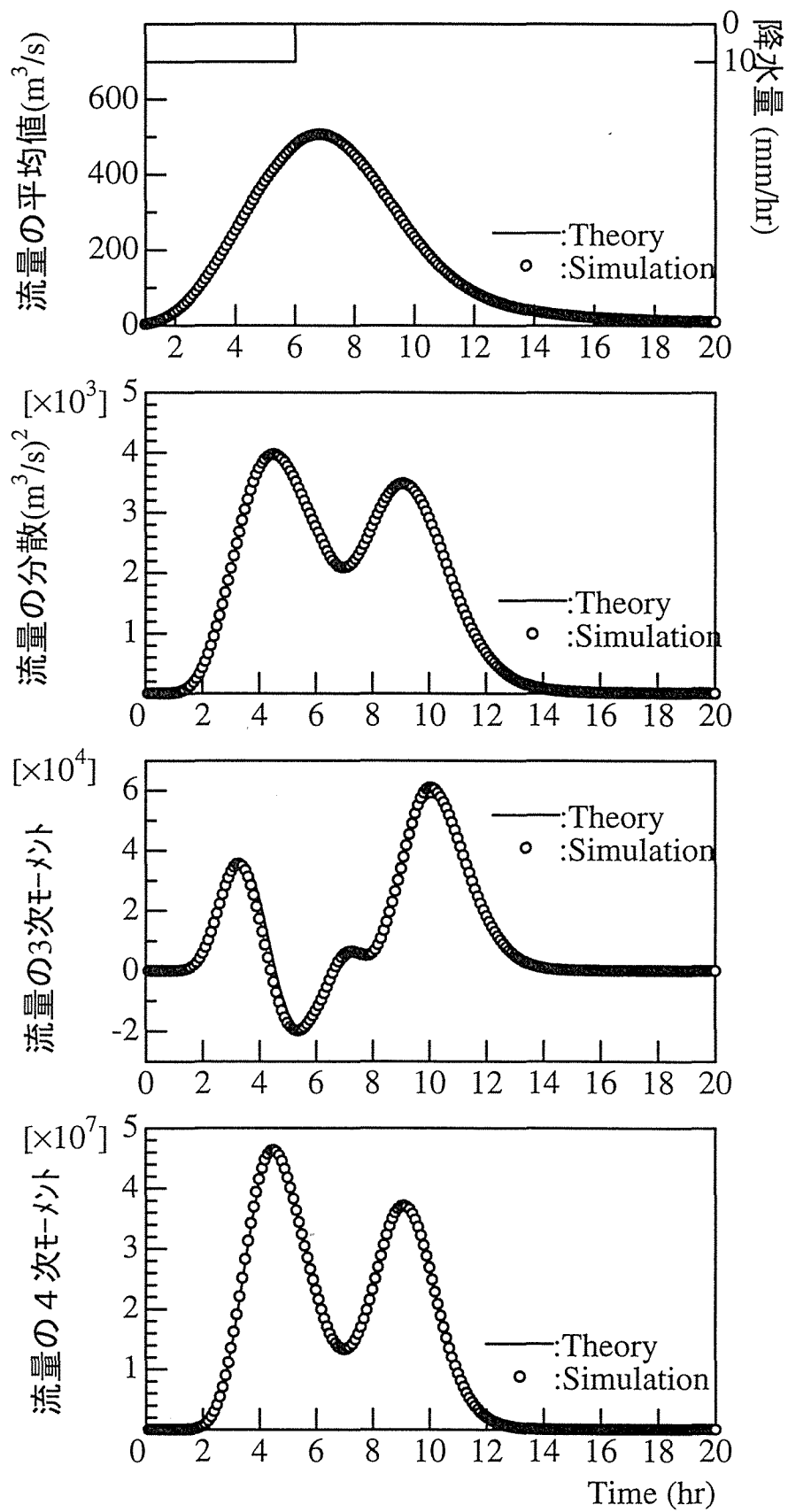


図-3.18 理論値とシミュレーション値の比較 ($\text{mag}=6$, $\sigma_A^2=20$)

3.3.4 伝播速度の変動を考慮した流出量の確率応答

前節までは、流出波形の伝播速度を一定と仮定して、遅れ時間の確率変動を求め、流出量の確率応答を理論的に誘導した。しかし、実際には3.3.1節で述べたように伝播速度は河道の横断幾何形状や河道勾配、河道の抵抗、流出量等の影響を受けるので、伝播速度を求めるためにはこれら河道の地形量を入力する必要があるが、容易なことではない。そこで、ここでは山辺が整理した流量と平均流速の関係から求めた式(3.158)の伝播速度と流量の関係式を用い、式(3.159)から遅れ時間を算出した。

伝播速度 V が流域のどの河道においても一定である場合には、遅れ時間 τ の変動は流路長 R の変動だけになり、式(3.163)のように求めることができる。しかし、実際に伝播速度が河道（リンク）毎に異なる場合には、式(3.159)のように遅れ時間を定式化して表現することが困難であるので、流出量の確率応答を理論的に誘導することも難しいと考えられる。したがって、ここではシミュレーションによって、流出量の確率応答を検討することにした。

まず、伝播速度は式(3.158)のように流量の関数と考え、各河道（リンク）の伝播速度を永井ら²¹⁾と同じく河道の上流から流入する流量のピーク時の伝播速度で代表させて、河道での遅れ時間を計算した。したがって、伝播速度は各サブ流域の流出ハイドログラフが河道網構造に従って流下して逐次合流する毎に計算する必要があるが、サブ流域の計算順序が重要である。高棹ら²²⁾は河道位数理論からこの最適追跡法を導き、計算に必要な記憶容量として最下流の位数の数だけ必要であることを証明している。本研究では、第2章の地形量解析で用いた各リンクの接続する下流リンク番号、マグニチュード、河道長や流域面積からなるデータベースであるリンケージファイルの並び順に計算を進めた。リンケージファイルの計算順序は高棹らの計算順序とほぼ同様であった。

計算条件は前節の理論値とシミュレーションの比較計算と同じ条件で行い、伝播速度を式(3.158)の関係から求め、上述の手順で流出量を計算した。ただし、前節の計算では河道網パターンは平均的なパターンである $C(m, j)$ のみについて行っていたが、ここでは第2章で提案した河道網の配列パターンの確率分布関数 $F(S, M, K)$ によってシミュレートした河道網パターンを用いて計算した。シミュレーション回数は5,000回である。

図-3.19～図-3.21 はマグニチュードが $m=6$ の場合について、サブ流域のリンク長の分散が $\sigma_L^2 = 10(\text{km}^2)$ で、流域面積の分散が $\sigma_A^2 = 20, 50, 100 (\text{km}^4)$ の3通りの計算結果である。流量の平均値、分散、3次、4次モーメントに対して、流量の立ち上がり部からピーク時にかけて伝播速度の影響はほとんど見られない。流量の減水部において伝播速度が変動する場合の方がやや流出が遅れる傾向が見られ、分散、3次、4次モーメントはこの部分で伝播速度一定の場合の方が大きくなるようである。実際の流出解析ではハイドログラフのピー

ク流量とその生起時刻が河川の管理面，防災面で重要であるので，伝播速度一定とする仮定でも十分実用的な条件であることが分かる．したがって，本研究の目的である流出量の確率応答の検討には，伝播速度一定の条件で十分である．ただし，伝播速度一定と仮定する場合に，伝播速度をどの程度に設定するかが問題となる．図-3.22は上述と同じ計算条件で，伝播速度だけを $V=1.0, 2.0, 3.0$ (m/s) と変化させたときの流量の確率変動を示している．

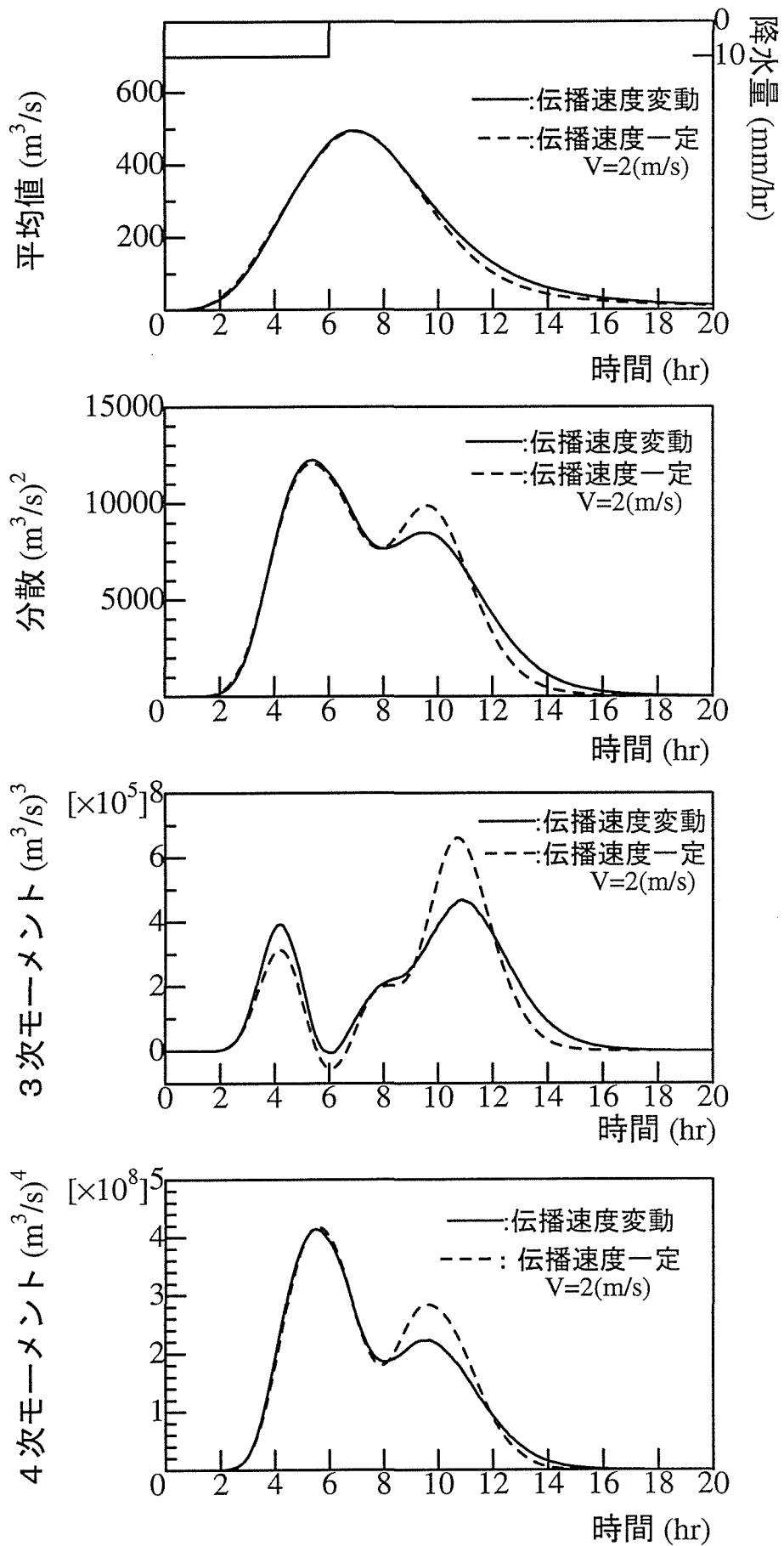


図-3.19 伝播速度が変動する場合の流出量の確率応答 ($\text{mag}=6$, $\sigma_A^2=100$)

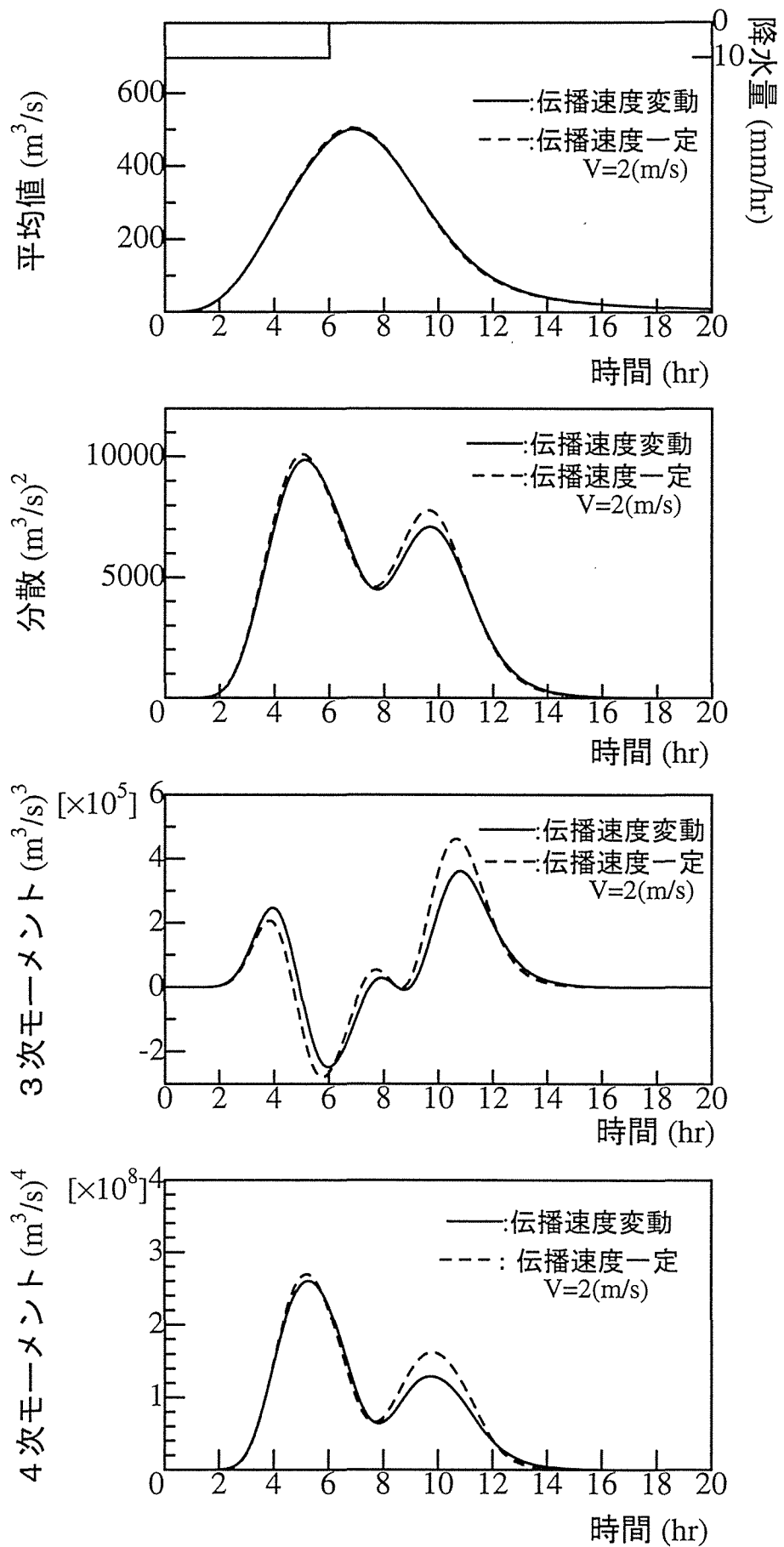


図-3.20 伝播速度が変動する場合の流出量の確率応答 ($\text{mag}=6$, $\sigma_A^2=50$)

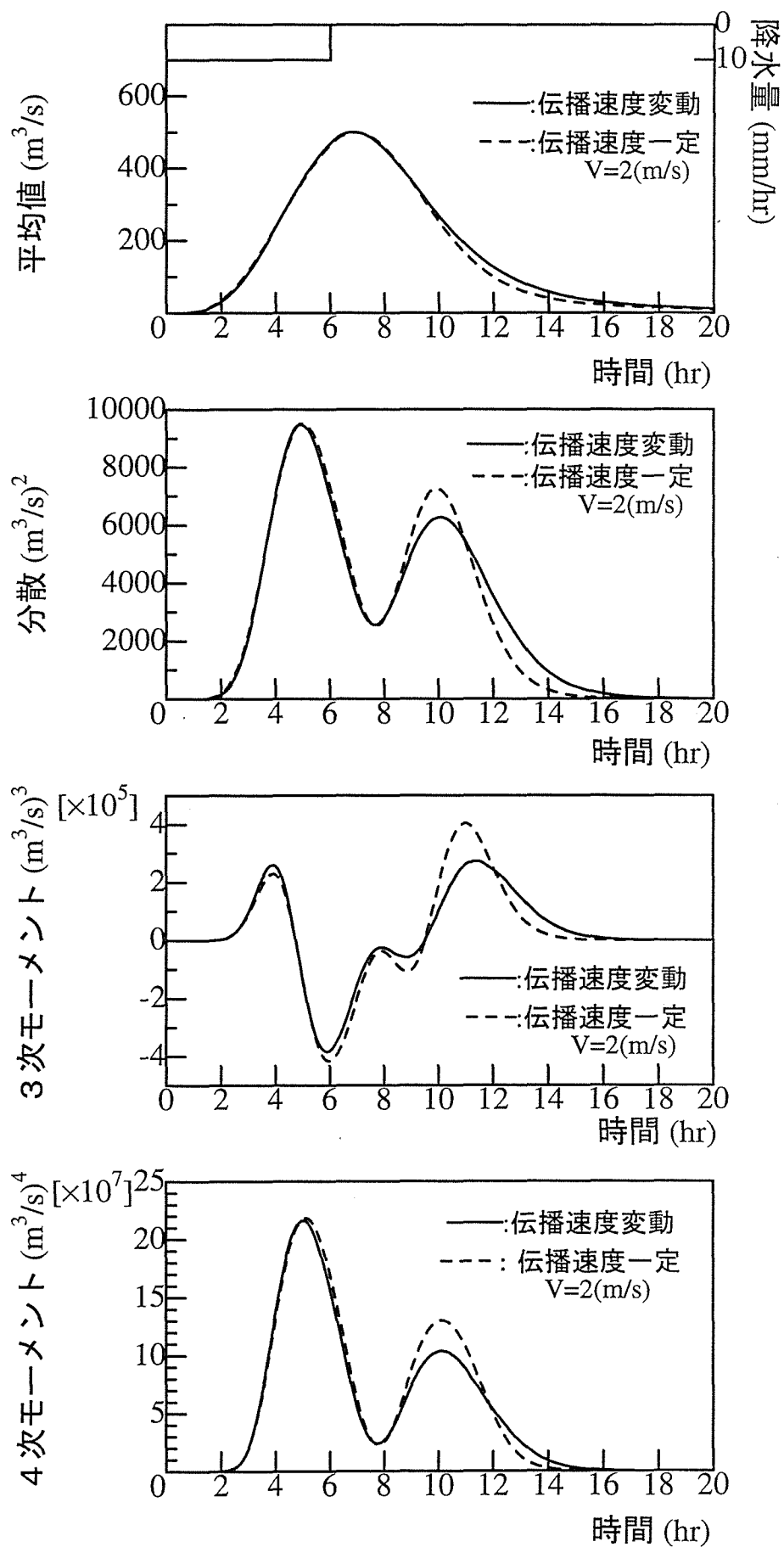


図-3.21 伝播速度が変動する場合の流出量の確率応答 ($\text{mag}=6$, $\sigma_A^2=20$)

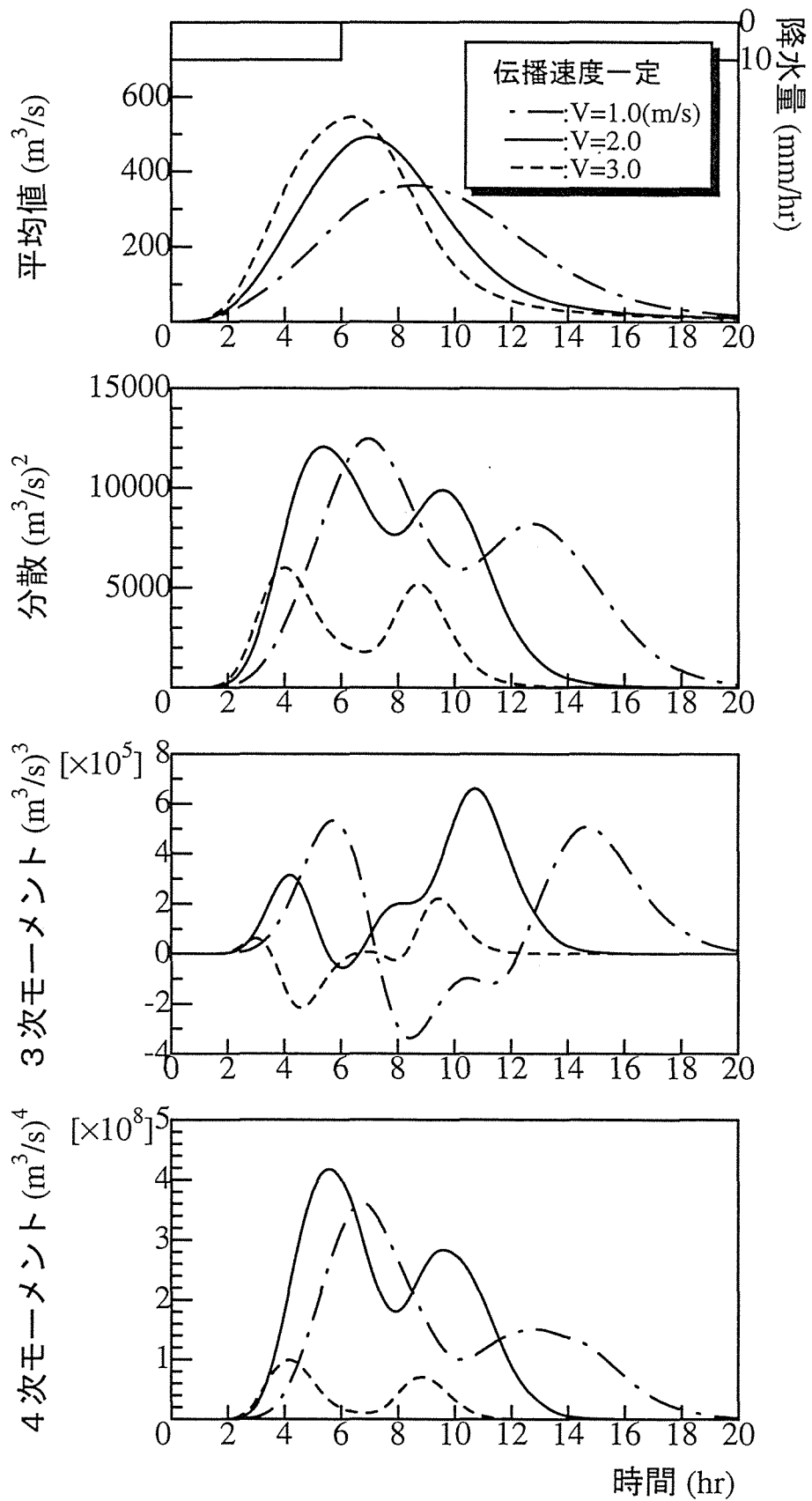


図-3.22 伝播速度による流出量の確率応答への影響

3.4 第3章のまとめ

本章では降雨－流出過程における流量の確率変動に着目し、確率変動を引き起こす原因の一つである流域場の地形特性の空間変動による流量の確率変動を、理論的に誘導する手法について言及した。以下に本章の成果を要約する。

- 1) 降雨－流出変換系のシステム方程式である流出モデルの流出パラメータが確率変動する場合の流出量の1次から4次モーメントを理論的に誘導する手法を提案した。サブ流域の流出モデルには星の貯留関数法を採用し、流域地形量等との関連が強い貯留係数を確率変数とにおいて、貯留指数が1以下の非線形システムの理論解を誘導した。
- 2) 誘導した理論解は全般的に見て、シミュレーション結果と良く一致していた。しかし、貯留係数の確率変動が大きくなると、次第にシミュレーションとの適合性が悪くなる傾向にある。この原因として、非線形項を線形近似したための誤差と、流量と貯留係数との高次の相関係数の項を無視したことが考えられる。
- 3) 貯留指数を1とおいた線形システムの場合は、流量と貯留係数との高次の相関係数の項だけが誤差の原因になり、貯留係数の変動係数が0.2以上になると流出量の3次以上の高次モーメントの誤差が大きくなる。
- 4) 非線形システムの場合の線形近似の影響も、貯留係数の確率変動が大きくなると誤差が目立つようになり、理論解の誘導で無視していた高次の項数を考慮する必要がある。
- 5) 河道網によるサブ流域からの流出量の集水機構はサブ流域の流出の遅れ時間に置き換え、流出量を線形重ね合わせることによって流域末端での流量を合成した。洪水波の伝播速度が一定の場合は、河道網パターンと流路長を考慮して遅れ時間の確率密度関数を導くことができた。
- 6) サブ流域の流出量の確率変動と流出の遅れ時間の確率密度関数から、流域末端における流量の1次から4次モーメントを理論的に導いた。シミュレーションによる理論解の検証では、良好な結果を示した。
- 7) 洪水波の伝播速度が流量に応じて変動する場合の流量の確率変動は、一定の場合と比較して、流量ハイドログラフの立ち上がり部からピーク時にかけてはほとんど同じであり、流量減水期に違いが目立つ程度である。

参考文献

- 1) 高棹琢馬, 宝馨, 楠橋康広: 洪水流出モデルの確率過程的評価に関する研究, 京都大学防災研究所年報, 第 28 号 B-2, pp.221-235, 1985.
- 2) 藤田睦博, 工藤睦信, 中尾隆志, 橋本識秀: 貯留型流出モデルの確率応答に関する研究 — 降雨が時間的に独立な確率過程の場合 —, 土木学会論文集, No.515/II-31, pp.1-11, 1995.
- 3) T.E. Unny: Hydrology Research in North America and in Japan - Problems in Hydrology Described Stochastic Differential Equations -, 水文・水資源学会誌第 4 巻 4 号, pp.9-18, 1991.
- 4) Rodriguez-Iturbe, I. and Valdes, J. B. : The Geomorphologic Structure of Hydrologic Response, *Water Resources Research*, Vol. 15, No. 6, pp.1409-1420, 1979.
- 5) Gupta, V. and Mesa, J. : Runoff generation and hydrologic response via channel network geomorphology — Recent progress and open problems —, *J. Hydrology*, Vol. 102, pp.3-28, 1988.
- 6) Chow, V. T.: Handbook of applied hydrology, McGraw-Hill, Inc, 1964.
- 7) Horton, R. E.: Erosional development of streams and their drainage basins : Hydrophysical approach to quantitative morphology, *Geol, Soc. Amer.*, Bull.56, 1945.
- 8) Shreve, R. L.: Statistical law of stream numbers, *J. Geology*, Vol.74(1), pp.17-37, 1966.
- 9) Werner, C. and Smart, J. S.: Some new methods of topologic classification of channel networks, *Geographical Analysis*, Vol.5, pp.271-296, 1973.
- 10) 石原藤次郎, 高棹琢馬, 瀬能邦雄: 河道配列の統計則に関する基礎的研究, 京都大学防災研究所年報, 第 12 号 B, pp.345-365, 1969.

- 11) 藤田睦博: 流域地形構造とその統計則に関する基礎的研究, 土木学会論文報告集, 第 234 号, pp.73-82, 1975.
- 12) 岩佐義朗, 小林信久: マグニチュードに基づく流域地形統計則およびその位数理論との関連性, 土木学会論文報告集, 第 273 号, pp.47-58, 1978.
- 13) 早川 博: 分布型流出モデルのサブ流域スケールに関する一考察, 水工学論文集, 第 36 巻, pp.555-560, 1992.
- 14) 星 清, 山岡勲: 雨水流法と貯留関数法との相互関係, 第 26 回水理講演会論文集, pp.273-278, 1982.
- 15) Bras, R. L. and Georgakakos, K. P.: Real time nonlinear filtering techniques in stream-flow forecasting -A statistical linearization aproach-, *Third International Symposium on Stochastic Hydraulics*, pp.95-105, 1980.
- 16) 友杉邦雄: 河域地形構成要素の平面量の分布特性に関する研究, 京大防災研究所年報, 第 19 号 B, pp.65-80, 1976.
- 17) 早川 博, 藤田睦博: 流域の河道網構造を考慮した流出特性, 水工学論文集, 第 35 巻, pp.155-160, 1991.
- 18) 工藤睦信, 藤田睦博, 清水康行, 竹本 晃: 分布型流出モデルに関する研究 一確率微分方程式の導入一, 水工学論文集, 第 39 巻, pp. , 1995.
- 19) 室田 明, 江藤剛治, 田中 剛: 水文量の和に関する統計的研究, 土木学会論文報告集, 第 223 号, pp.23-31, 1974.
- 20) 山辺功二: 水流の水理幾何についての一考察, 水温の研究, 第 15 巻, 第 2 号, pp.31-37, 1971.
- 21) 永井明博, 角屋睦: 洪水流出モデルの最適定数, 京都大学防災研究所年報, 第 24 号 B-2, pp.183-196, 1981.
- 22) 高棹琢馬, 椎葉充晴: 河川流域の地形構造を考慮した出水系モデルに関する研究, 土木学会論文報告集, 第 248 号, pp.69-82, 1976.
- 23) 早川博, 藤田睦博, 内島邦秀: 流域地形特性を考慮した分布型流出モデルの確率応答に関する研究, 土木学会論文集, No.545/II-36, pp.11-22, 1996.

第4章 流域スケールと降雨－流出特性

4.1 概説

降雨－流出解析における流出モデルの流域スケールと流出特性の定量化は、分布定数型流出モデルの基本となる基準単位流域の最適なスケールの決定にとっても不可欠であり、多くの研究者によって様々な検討がなされてきた。

Wood ら¹⁾は流域土壌の透水係数や降雨の空間変動を考慮して、サブ流域スケールの変化に伴う流出量の変動特性について調べ、単位流域スケールの基準となる REA (Representative Elementary Area) の概念を提案し、REA として約 1km^2 を示した。また、Wood らは他の流域での検討結果²⁾や流出量以外に蒸発散量や熱輸送量を評価するための REA³⁾についても検討している。この REA の概念は、分布型流出モデルの標準的な流域スケールの一つの指標として考えられ、最近、多くの研究者によって盛んに研究されてきている⁴⁾⁵⁾⁶⁾。

立川ら⁷⁾は東京大学愛知演習林白坂流出試験地 (0.88km^2) を対象に、三角形網モデルで流域を覆って総河道区分数 1151 個の流域に分割し、各河道位数毎、流域面積毎に流出計算を行った。平均ハイドログラフに対する標準偏差を求めると、流域面積が 0.1km^2 程度以上では、流出高のばらつきが非常に小さくなることを示し、Wood らの REA に相当する流域サイズを求めている。これはまた、どのくらいの大きさの流域を一まとめにして考えてよいかという高棹の基準面積⁸⁾の下限值にあたるとしている。

また、椎葉⁹⁾はこれまでに提案されてきた分布型流出モデルについて、その問題点を整理し、流域スケールを考える上での2つのアプローチを提案している。一つは、流域規模、あるいは地球規模で観測される新しい水文量を見つけ、その変化過程を分析するアプローチであり、もう一つは、山腹斜面水文学で得られた知見を生かした流域のスケールアップする方法を探るというアプローチである¹⁰⁾。分布型流出モデルの流域スケールを考える上での新しい試みとして、注目されているが、本研究では、オーソドックスに流域スケールと流出量の応答関係から、分布型流出モデルの最適な流域スケールにアプローチする。

一般に、流出解析で求められる理想的な条件とは、流出パラメータが流域の場の条件に強く依存しているので、流域の地質や地被状態、土壌の湿潤状態などの流域場の特性量が均質

で、かつ、降雨も流域全域で一様であるのが理想的である。流域の地質条件や植生等などの場の条件は、流域をあるスケールまで細分化するとほぼ均質 (homogeneous) と考えることができる。流域への入力である降雨も、空間的にみて一様とみなすことのできる雨域の空間的スケールが、受け皿である流域のスケールを規定することになるであろう。

この観点から、本論の第 4.2 節において降雨の受け皿となる流域の地質や植生等が均質であると見なすことのできる流域の大きさを、国土数値情報を利用して求めた。第 4.3 節においては、流域への入力である降雨の雨域の大きさを北海道の霧裏山に設置されたレーダ雨量計の観測データを用いて調べ、空間的にはほぼ一様と見なすことのできる雨域の大きさを検討した。ここで得られた流域のサイズ、雨域のサイズは、必ずしも流出モデルの流域スケールを規定する制約条件ではないが、少なくとも流域スケールの上限を与える大きさと考えることができる。

一方、本研究では、流域スケールを考えるもう一つのアプローチとして、自動制御システムの応答解析に用いられる周波数応答法を降雨流出系のシステム応答解析に適用した。降雨流出機構は、降雨を入力、流出量を出力とする応答モデルと考えられ、流域が変換システムである。つまり、流域は時間的に激しく変動している降雨波形の高周波成分をカットして平滑化する低域フィルターの一種とみなすことができる。この低域フィルターの性能は、サブ流域の大きさの他に河道による流出の遅れ効果にも関係しており、本手法は周波数領域で捉えた流出応答特性から流域スケールを検討している。第 4.4 節では第 3 章で導いた貯留係数が確率変動する貯留関数法をシステム関数として、降雨と流出量の関係 (ゲイン特性) を理論的に求め、ゲイン特性と流域地形量の関係を明らかにしている。更に、本研究ではこの手法を実流域に適用し、その解析結果から降雨流出システムに望まれる流域スケールを判断する考え方を提案する。

以上、本研究では流出現象と流域スケールに関する 2, 3 の検討を試みているが、流域の場の条件や降雨の条件等の空間スケール以外にも、対象とする流出現象の時間スケールも考える必要があることを忘れることはできない。つまり、同じ流域においても、洪水流出のように 1 日、あるいは 2 日程度で終了してしまう短期流出を対象とする場合と、地下水流出のように一月以上にもわたる長期流出を対象とする場合では、求められる流域スケールは当然異なってくる。

また、ある流域において流出解析や流出予測を行なう場合、私達は必要な水文資料を全て手にいれることができる訳ではない。入手できる水文資料の質に応じて、流出モデルの流域スケールは、制約を受けることも注意を払わなければならない。

4.2 流域場の流域特性が均質となる流域サイズ

降雨－流出解析において、降雨の受け皿となる流域の地質や植生、土地被覆状態などの流域特性が流出モデルのパラメータを決定する要因となっているので、流域特性が均質となる広さの流域を対象に流出解析することが望ましい。本節では、流域特性として国土数値情報¹³⁾の土地分類の中の表層地質と地形分類の項目を取り上げ、北海道の一级河川13水系において各々の項目が同じであるものの集合、すなわち均質とみなすことのできる面積を調べてみよう。

国土数値情報は、1968年に国土地理院が中心となって構築された全国的規模の地理情報システムである。このシステムの地域メッシュは、1/20万地勢図の1枚の広さを一区画としたメッシュ間隔80kmの1次メッシュ、次いでこれを8×8等分した一区画10km×10kmの2次メッシュ（これは、1/2.5万地形図1枚の広さに相当）、更に2次メッシュを10×10等分した一区画1km×1kmの3次メッシュの階層的に構成されている¹³⁾。データベース化された情報は、大別すると(1)国土の自然条件に関するデータ、(2)各種法規制指定地域等に関するデータ、(3)各種施設等に関するデータ、及び(4)経済・社会に関するデータに分類されている。国土の自然条件に関するデータとしては、第2章の地形量解析の擬河道網抽出で既に利用した標高（約250m間隔の格子点標高値）の他に、起伏量、傾斜、地形分類、表層地質、土壌、谷密度、河川流路、流域界、海岸線等についてのデータが整備されている。尚、ここで使用した地形分類、表層地質データは3次メッシュで与えられている。

国土数値情報の地形分類と表層地質の区分の定義は表-4.1、表-4.2に示す通りである。かなり細分化されているので、ここではこれらの項目を更に整理して表-4.3の26項目に再分類し、表-4.4に示す20流域を対象に、流域特性が均質となる面積について検討を加える。

表-4.1 地形分類（国土数値情報）

山地	大起伏山地	起伏量 600 m 以上の山地。
	中起伏山地	起伏量 400 ～ 600 m の山地。
	小起伏山地	起伏量 200 ～ 400 m の山地で、どの山地においても比較的広い面積を占めている。
	山麓地	山地の縁辺にあって従属的な位置を占めるもので、いずれも堆積面である。
火山地	大起伏火山地	起伏量 600 m 以上の火山。
	中起伏火山地	起伏量 400 ～ 600 m の火山。
	小起伏火山地	起伏量 200 ～ 400 m の火山。
	火山麓地	火山山麓をなすもので、いずれも堆積面である。
丘陵地	大起伏丘陵地	起伏量 100 ～ 200 m の丘陵。
	小起伏丘陵地	起伏量 100 m 以下の丘陵。
台地・段丘	砂礫台地	洪積世あるいは沖積世の砂礫等よりなる台地。
	ローム台地	火山灰質のロームにおおわれた台地。
	岩石台地	堆積物をあまりのせていない台地で、各地に小規模に分布する。
低地	扇状地性低地	沖積低地のうち主として扇状地と砂礫質の氾濫原で、各河川沿いに分布する。
	三角洲性低地	沖積低地のうち河川下流部のシルト質、粘土質のもので、三角洲をなすことが多い。
	自然堤防・砂州	石狩湾岸や石狩低地に主に見出される。石狩湾岸では一部に内陸砂丘が分布する。

表-4.2 表層地質（国土数値情報）

未固結堆積物	沖積世	礫・砂・粘土	氾濫原堆積物で、河川の上流部では礫が多く、下流部では砂や粘土を含む。
		砂	海浜、砂堤列、砂丘の構成物。代表的なものは、石狩湾岸の海岸砂丘、花岬砂堤列、紅葉山砂丘、苫小牧沿岸の砂丘列など。
		粘土	沖積低地を構成する粘土、シルトで、三角州堆積物、自然堤防堆積物を一括。
		泥炭	沖積低地の後背湿地や、谷底平野の一部を構成する。
		礫	扇状地を構成する堆積物。
	洪積世	砕屑物	崖錐堆積物。
		砂・礫・粘土	丘陵地域を構成する堆積物で、野幌丘陵では、いわゆる野幌層で代表され、一部鮮新統を含む可能性がある。登別地域は登別層、その他は、火山性の再堆積物が主体。
半固結—固結堆積物	第三紀・先第三紀	礫岩	積丹半島基部のものは、訓縫統基底を主体とし、その他は訓縫統中部および八雲統下部の礫岩を含む。
		砂岩	古第三系～新第三系の砂岩。後志南部地域、積丹半島、札幌南部地域の砂岩は、鮮新統に属し、一部は半固結。石狩地域は、盤ノ沢層、当別層、材木沢層を含む。積丹東部地域の砂岩は、石狩層群と川端統の一部。
		泥岩	古第三系～新第三系の各層準の泥岩・頁岩を一括。いわゆる硬質頁岩を含む。崩壊しやすい地層。
		砂岩・泥岩互層	エゾ層群の一部。一般に泥岩に富む互層で胆振東部に分布。
岩石	火山性	火山灰	第四系の未固結降下軽石で、樽前火山、恵庭火山の軽石および火山灰。
		ローム	未固結細粒褐色火山灰。
		火山砕屑物	未固結の火山岩塊、泥流、流れ山、その他二次堆積物。
深成岩類		輝緑岩質岩石 斑 石 花崗岩質岩石 はんれい岩質岩石 蛇紋岩質岩石	空知層群に属する輝緑岩質岩石で、胆振東部の坊主山に分布。 中新統の石英斑岩で、西南北海道に点在。 先第三系および、中新統の花崗岩質岩石で、花崗岩、花崗閃緑岩。 先第三系の塊状および、片状蛇紋岩で胆振東部に分布。
変成岩類		ホルンフェルス 結晶片岩質岩石 片麻岩質岩石	時代未詳の石英・絹雲母片岩で、西南北海道の京極周辺に点在。

表-4.3 特性量の項目

項目 No	地形分類	項目 No	表層地質
1	大起伏山地	16	礫・砂・碎屑物
2	中起伏山地	17	砂・礫・粘土
3	小起伏山地	18	粘土・泥炭
4	山麓地	19	礫岩・砂岩・珪岩
5	大起伏火山地	20	石灰岩・泥岩
6	中起伏火山地	21	砂岩・泥岩互層
7	小起伏火山地	22	ローム・火山灰
8	火山麓地	23	火山碎屑物
9	丘陵地	24	火山性岩石
10	火山性丘陵地	25	深成岩類
11	ローム台地	26	変成岩類
12	砂礫台地		
13	岩石台地		
14	扇状地		
15	三角州・砂州		

表-4.4 解析対象流域

No.	流域名	流域面積 (km ²)
1	留萌川	341
2	渚滑川	1,444
3	利別川	3,086
4	湧別川	1,744
5	常呂川	2,224
6	網走川	1,565
7	尻別川	1,878
8	沙流川	1,562
9	釧路川	1,118
10	後志利別川	457
11	夕張川	1,302
12	空知川	486
13	豊平川	852
14	石狩川中愛別	1,244
15	美瑛川	778
16	音更川	895
17	札内川	839
18	十勝川帯広	2,726
19	名寄川	862
20	釧路川	729

4.2.1 地形分類，表層地質の均質な面積

北海道の主要な 20 流域を対象にして，地形分類と表層地質のそれぞれの項目の特性量が流域内で均質となる部分の面積を調べた．一例として，表-4.4 の流域 No.18 である十勝川流域の地形分類（表-4.3，項目 No.1～15）は図-4.1(c) のようになっている．この中で項目 No.1～15 の各特性量が同一となる部分に流域を分割し，各々の大きさをメッシュ個数でカウントする．1 メッシュは $1\text{km} \times 1\text{km}$ の 3 次メッシュで与えられているので，メッシュ個数が面積 (km^2) となる．この計測結果の一例を表-4.5 に示す．十勝川流域の大起伏山地は図-4.1(c) の青い部分で，この特性量が均質な面積は 199 km^2 ， 3 km^2 ， 59 km^2 ， 4 km^2 の 4 個存在した．表層地質（表-4.3，項目 No.16～26）も同様にして，各流域毎に特性量が均質となる面積を調べた．なお，網走川流域，後志利別川流域，十勝川流域の地形分類と表層地質の特性量の分布を図-4.1～図-4.2 に示す．

表-4.5 地形分類の計測結果（十勝川流域）

項目 No	地形分類	個数 No	面積 (km^2)
1	大起伏山地	1	199
		2	3
		3	59
		4	4
2	中起伏山地	1	15
		2	69
		3	19
		4	6
		5	548
3	小起伏山地	1	9
		2	3
		3	9
		4	479
		5	3
		6	1
4	山麓地	1	2
		2	40
		3	13
		4	5
		5	34
		6	10

表-4.4 の 20 流域を対象に，流域特性量が均一となる面積の計測結果は，各項目 No 毎に頻度図で表し，図-4.3，図-4.4 に示した．各特性量のデータ個数は，約 20～200 とばらついているが，これは流域によっては存在しない特性量があったり，特性量の均質な面積がかなり大きいものを含むためである．

地形分類は，どの流域においても図-4.3 の項目 No.1～3 の (大・中・小) 起伏山地と No.9 の丘陵地が流域内のほとんどを占めており，この特性量の均質な面積にかなり大きい値が存

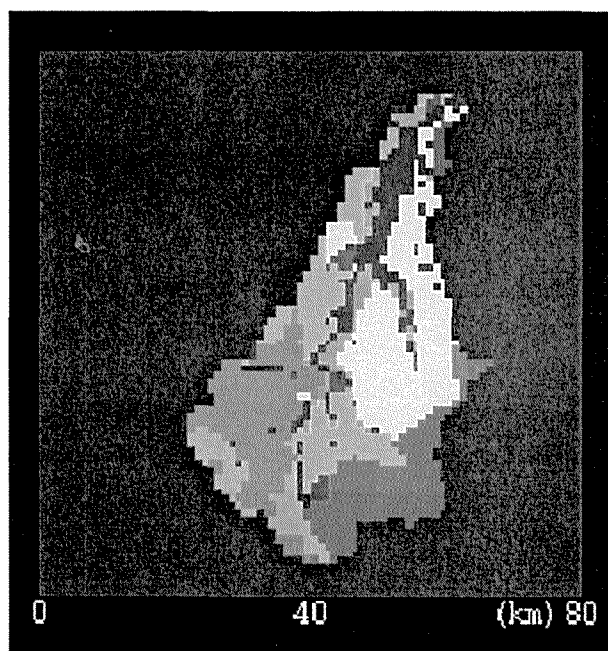
在していることが頻度図からわかる。NO.10の火山性丘陵地は、網走川流域と釧路川流域のみにしか存在していないため、この項目の頻度図は他と比べて極端な頻度図となっている。一方、表層地質は、図-4.4の頻度図からどの項目の特性量も均質となる面積の大きさが比較的小さく、項目 No.22 のローム・火山灰だけが、均質となる面積が大きくなっている。

また、これらの頻度図は、どの特性量においても指数分布形に相似した分布になっていることがわかる。つまり、各特性量の均質な面積の大きさは、色々な大きさの面積が幅広く分布しているのではなく、比較的小さな面積のものが大部分を占め、その中の所々に面積が大きなものが存在することを表している。

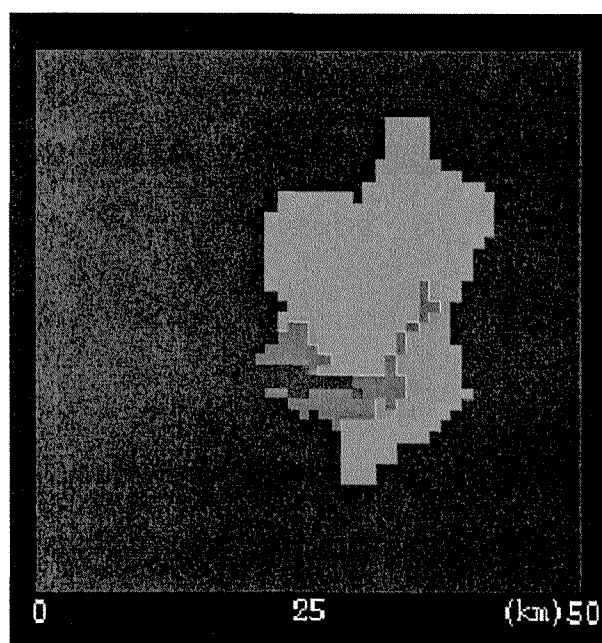
次に、計測結果から得られた各特性量毎の均質な面積の平均値（●印）と平均値 $\pm\sigma$ （標準偏差）が図-4.5に示されている。一般的に頻度図が指数分布に従うとき、平均値は標準偏差に等しくなる。

図の中で平均値と標準偏差 $\pm\sigma$ の範囲が小さい特性量は、山麓地（No. 4）、粘土・泥炭（No.18）である。これは、この特性量が占める割合がどの流域においても元来少ないため、均質となる面積の大きさも小さいと考えられる。一方、小起伏山地（No. 3）、ローム・火山灰（No.22）は、平均値と標準偏差 $\pm\sigma$ の変動の範囲が大きい。これは、この特性量の均質な面積がかなり大きくなる場合が多いことを意味している。

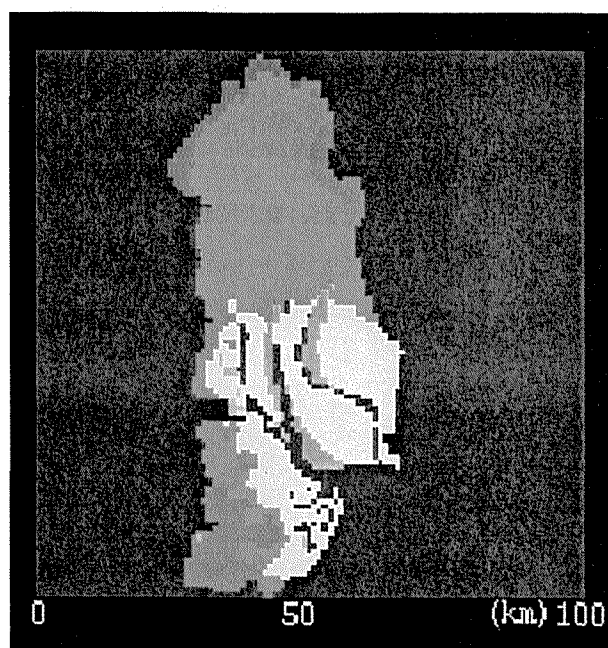
以上のように、各特性量毎に均質とみなせる面積は、特性量によって平均値、平均値 $\pm\sigma$ （標準偏差）の両方とも異なっている。どの特性量についても均質であるためには、平均値 $\pm\sigma$ （標準偏差）が全ての項目に共通している範囲を考えることにすると、この範囲は、約5～20km²となる。また、平均値だけを考えても、各特性量は約5～110 km²と幅広く分布している。したがって、全ての項目について均質となる面積は、この平均値の変動範囲の最小値である約5 km²となる。



(a) 地形分類 (網走川)

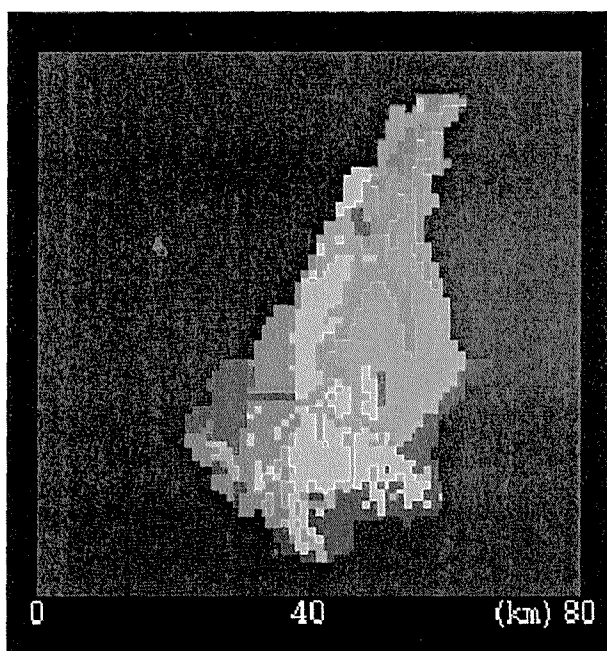


(b) 地形分類 (後志利別川)

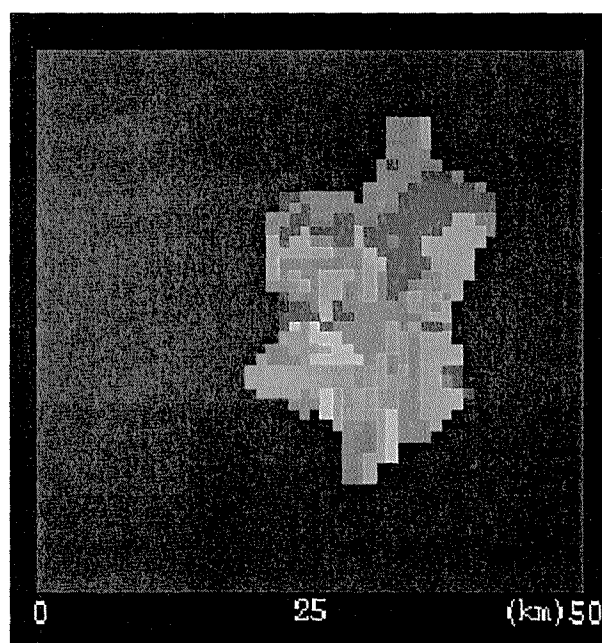


(c) 地形分類 (十勝川)

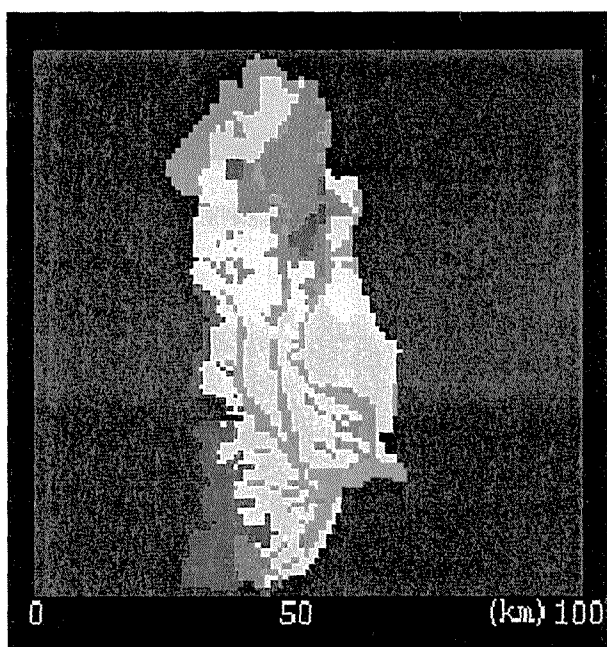
図-4.1 地形分類



(a) 表層地質 (網走川)

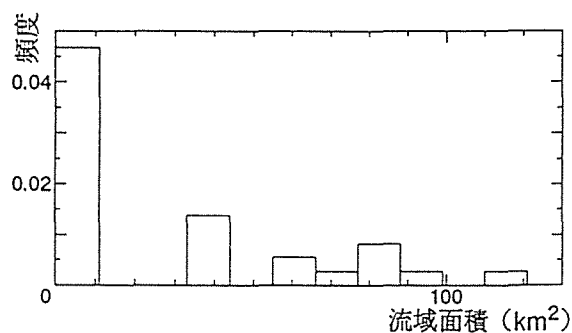


(b) 表層地質 (後志利別川)

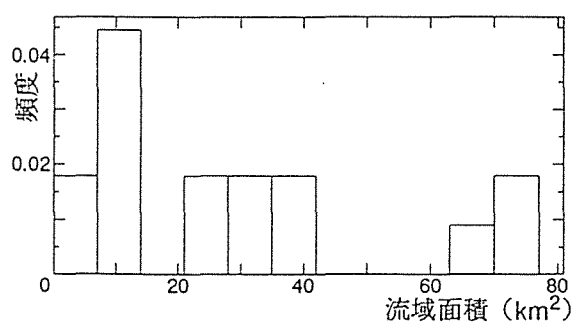


(c) 表層地質 (十勝川)

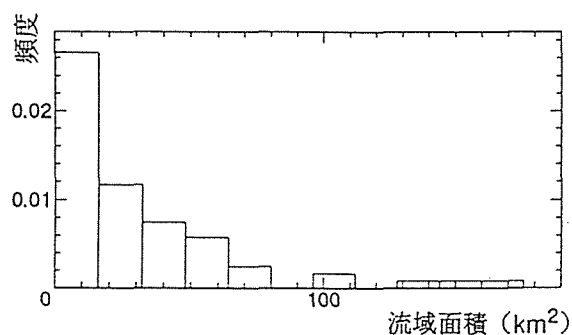
図-4.2 表層地質



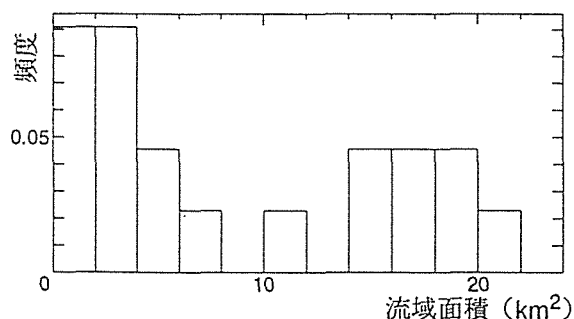
頻度図
(項目No. 1, 大起伏山地)



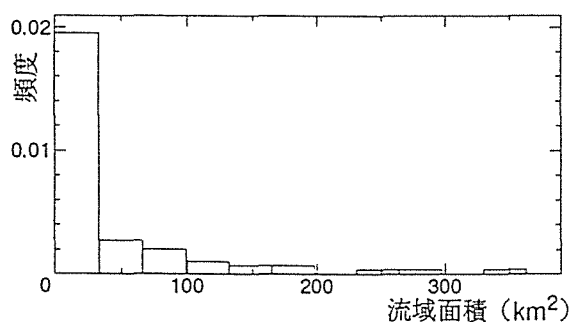
頻度図
(項目No. 5, 大起伏火山地)



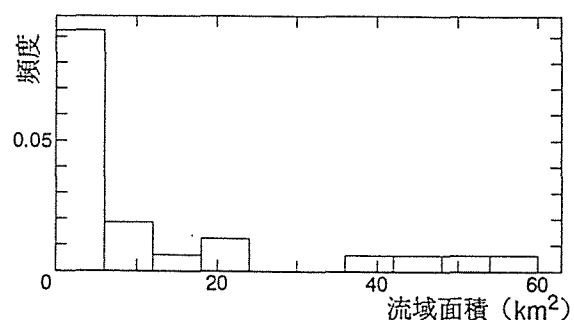
頻度図
(項目No. 2, 中起伏山地)



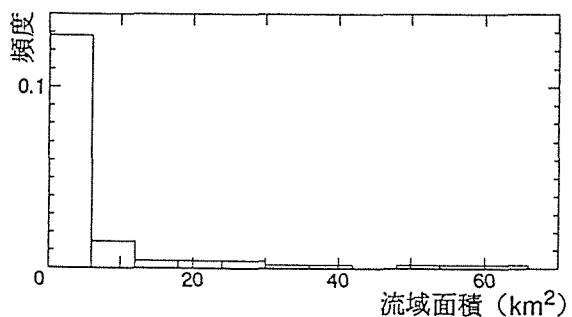
頻度図
(項目No. 6, 中起伏火山地)



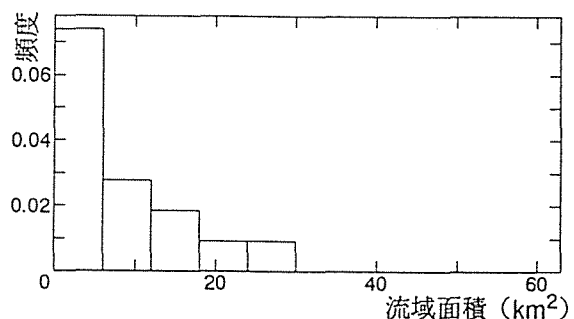
頻度図
(項目No. 3, 小起伏山地)



頻度図
(項目No. 7, 小起伏火山地)

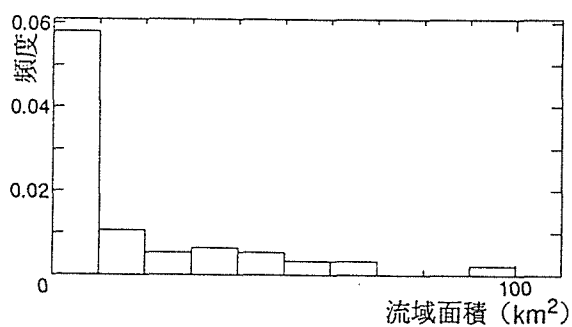


頻度図
(項目No. 4, 山麓地)

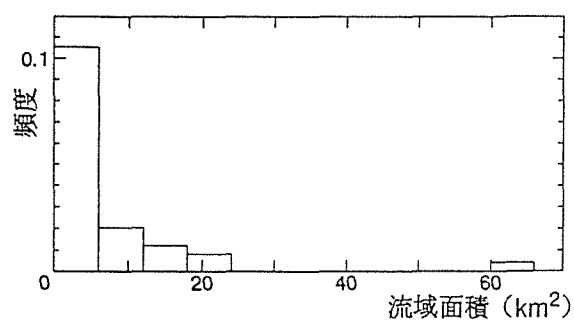


頻度図
(項目No. 8, 火山麓地)

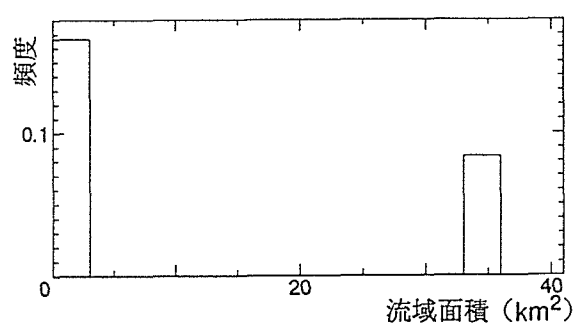
図-4.3 地形分類の頻度図 (その1)



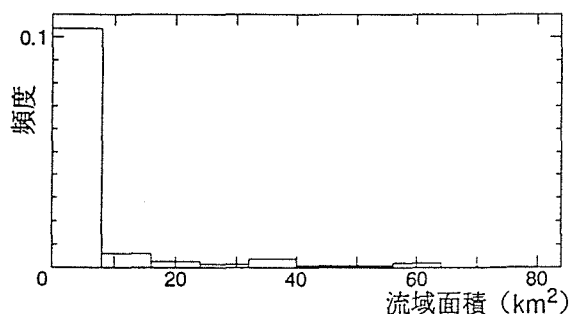
頻度図
(項目No. 9, 丘陵地)



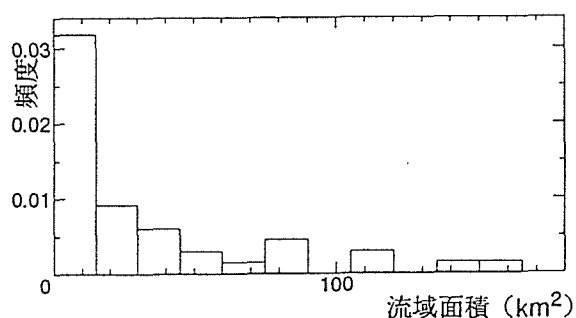
頻度図
(項目No. 13, 岩石台地)



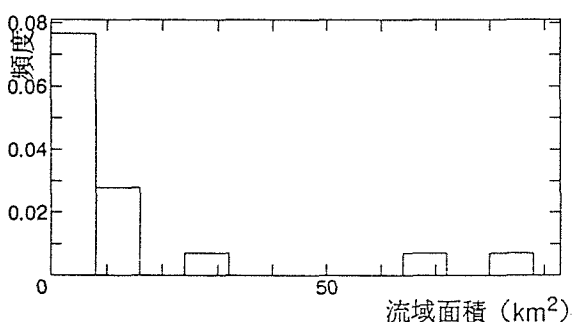
頻度図
(項目No. 10, 火山性丘陵地)



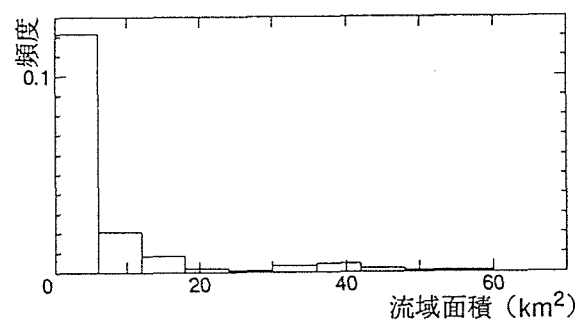
頻度図
(項目No. 14, 扇状地)



頻度図
(項目No. 11, ローム台地)

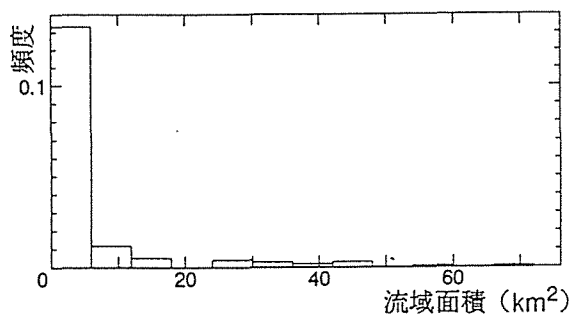


頻度図
(項目No. 15, 三角州・砂州)

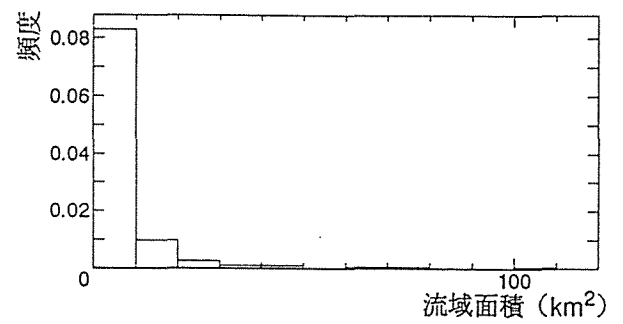


頻度図
(項目No. 12, 砂礫台地)

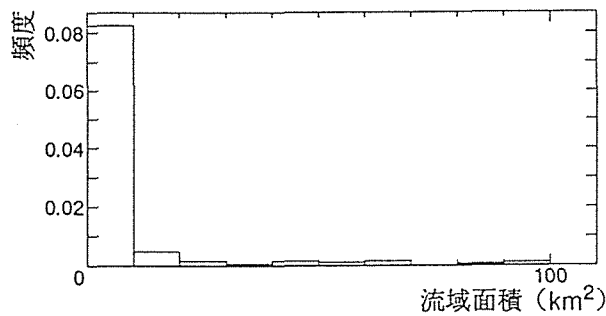
図-4.3 地形分類の頻度図 (その2)



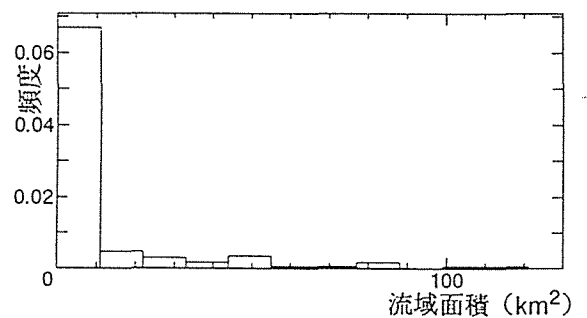
頻度図
(項目No.16, 礫・砂・碎屑物)



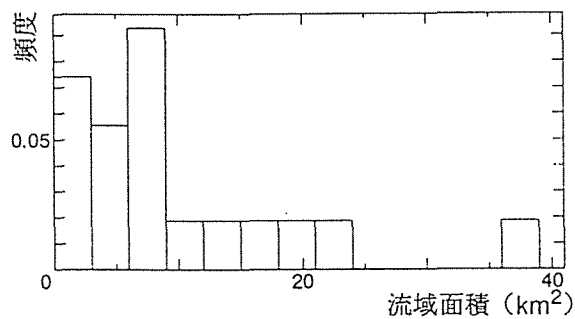
頻度図
(項目No.19, 礫岩・砂岩・珪岩)



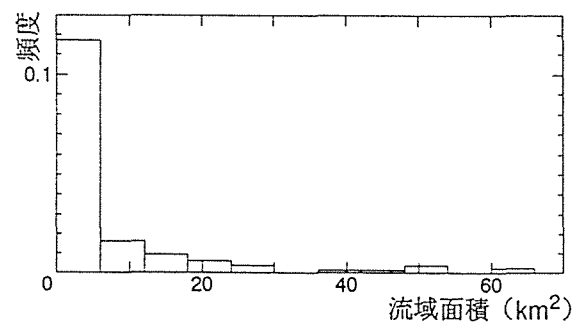
頻度図
(項目No.17, 砂・礫・粘土)



頻度図
(項目No.20, 石灰岩・泥岩)

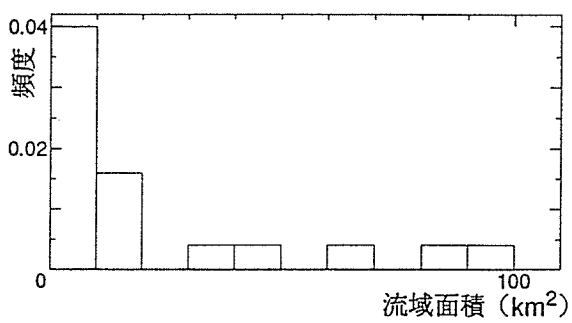


頻度図
(項目No.18, 粘土・泥炭)

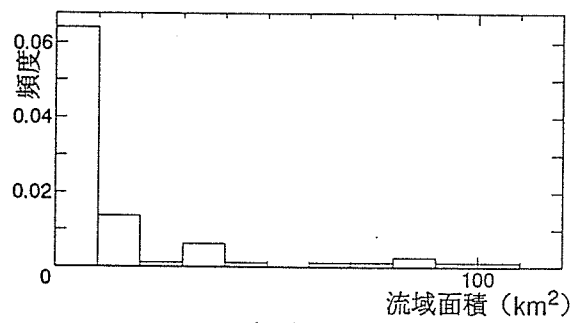


頻度図
(項目No.21, 砂岩・泥岩互層)

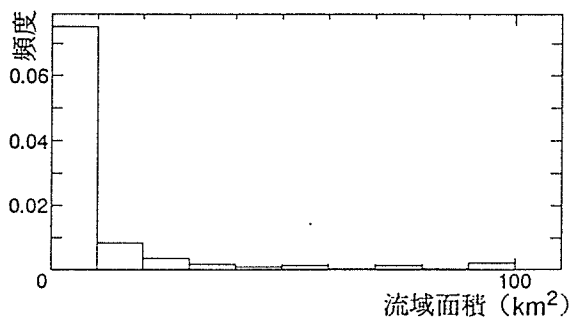
図-4.4 表層地質の頻度図 (その1)



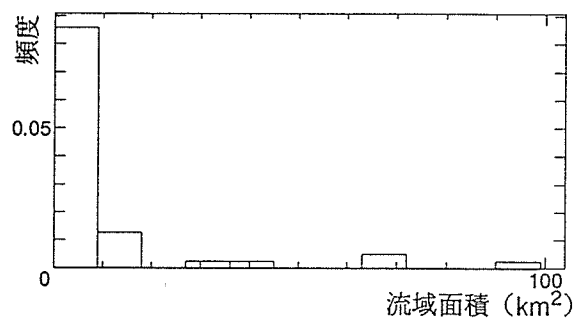
頻度図
(項目No. 22, ローム・火山灰)



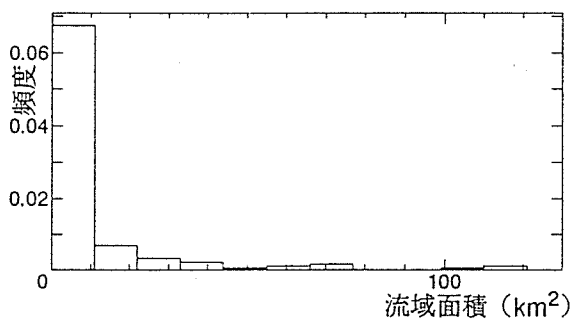
頻度図
(項目No. 25, 深成岩石)



頻度図
(項目No. 23, 火山碎屑物)



頻度図
(項目No. 26, 変成岩石)



頻度図
(項目No. 24, 火山性岩石)

図-4.4 表層地質の頻度図 (その2)

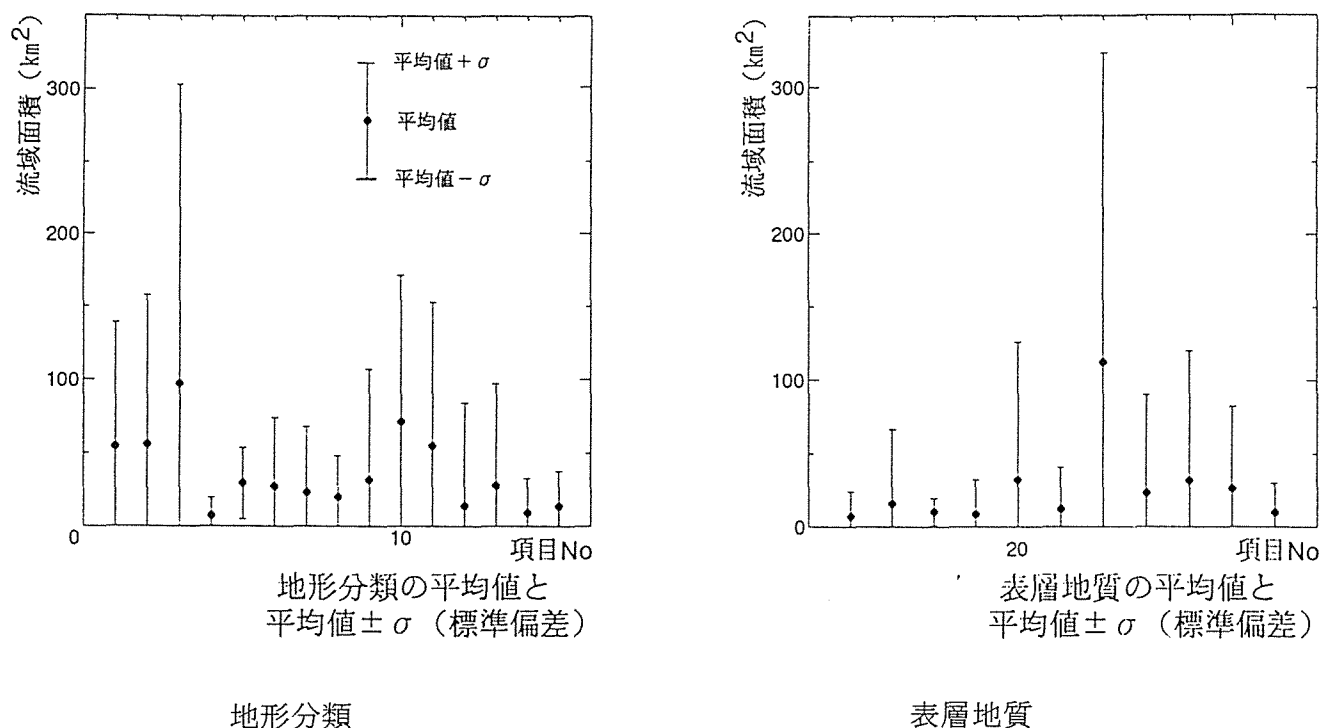


図-4.5 流域特性量が均質となる面積

4.2.2 地形分類と表層地質を組み合わせた均質な面積

地形分類あるいは表層地質の特性量の均質な部分には、地形分類に対して表層地質の特性量が、また、表層地質に対して地形分類の特性量が異なる部分が存在することがある。この部分は、流域場の特性量が均質であるとは厳密にはいえない。そこで、対象流域毎に地形分類と表層地質の両者の特性量が同じである、より均質となる面積を調べてみた。

前節で例に挙げた十勝川流域の地形分類と表層地質を組み合わせた図が、図-4.6(c)に示されている。この十勝川流域の場合、大起伏山地は表層地質の各項目の特性量を考慮することによって、表-4.5の計測結果が表-4.6のように、更に均質な部分に分割されている。

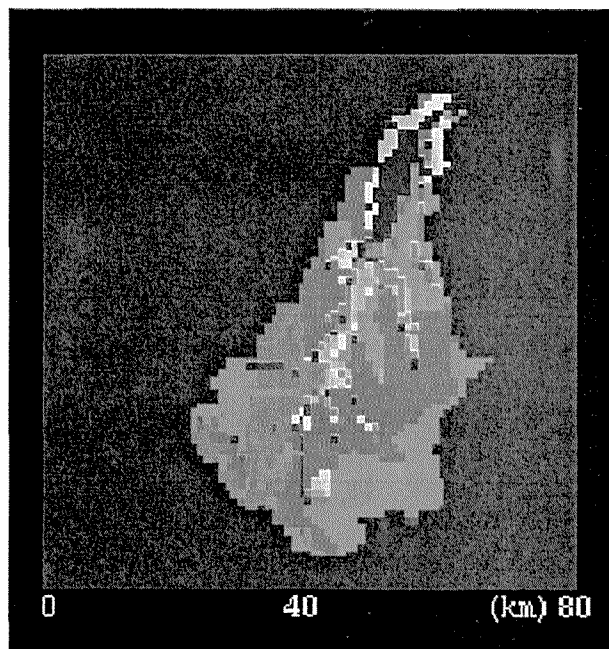
地形分類と表層地質の各項目を組み合わせ、両方の項目が同じ部分の面積を計測し、前節と同様に図-4.7、図-4.8に示す頻度図を求めた。この図は、地形分類、表層地質の各項目毎に、それに組み合わせた表層地質、地形分類の各項目が同じ部分の面積の頻度を表している。どの特性量の組み合わせも分布形がほぼ指数分布形になっているが、均質とみなす条件を厳しくくしているために、均質となる面積が小さくなり、より左に歪んだ分布になっている。

計測結果の平均値と平均値±σ (標準偏差) を図-4.9に示す。異なる特性量を組み合わせた場合、流域場の特性量が均質とみなせる面積の範囲は狭くなり、平均値の変動は約5～15km²となった。また、平均値±σ (標準偏差) の範囲が重複するのは、上限が約10km²である。したがって、この組み合わせた特性量が均質とみなすことのできる面積は、平均値の変

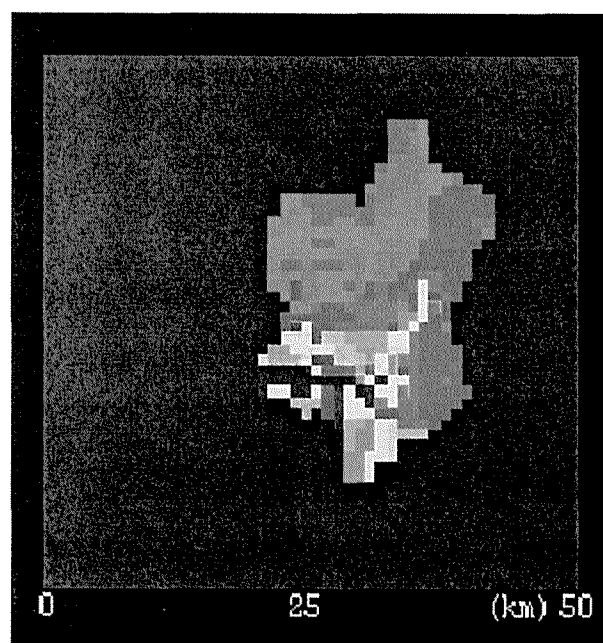
表-4.6 組み合わせの計測結果（十勝川流域）

項目 No.	地形分類	項目 No.	表層地質	個数 No.	面積 (km ²)
1	大起伏山地	19	礫岩・砂岩・珪岩	1	1
		20	石灰岩・泥岩	1	16
				2	4
				3	21
				4	4
		22	ローム・火山灰	1	1
				2	1
				3	2
				4	4
				5	4
		23	火山碎屑物	1	24
		24	火山性岩石	1	2
				2	2
				3	7
		25	深成岩類	1	2
				2	130
				3	3
				4	2
		26	変成岩類	1	29
				2	2
				3	1
				4	2
				5	1

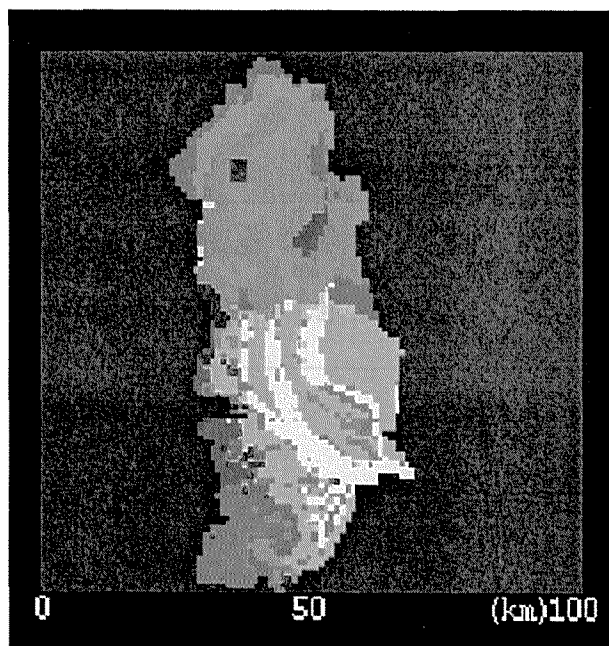
動の最小値である約 5 km² となり，特性量を組み合わせない場合と同じ結果となった．しかしながら，各特性量の変動の幅は小さくなっている．



(a) 地形分類と表層地質の組合せ (網走川)

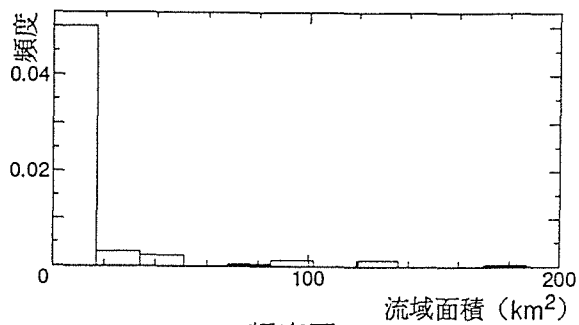


(b) 地形分類と表層地質の組合せ (後志利別川)

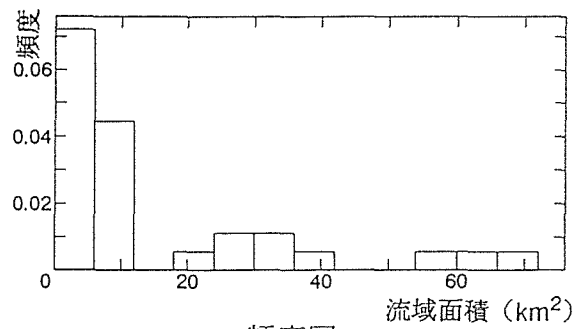


(c) 地形分類と表層地質の組合せ (十勝川)

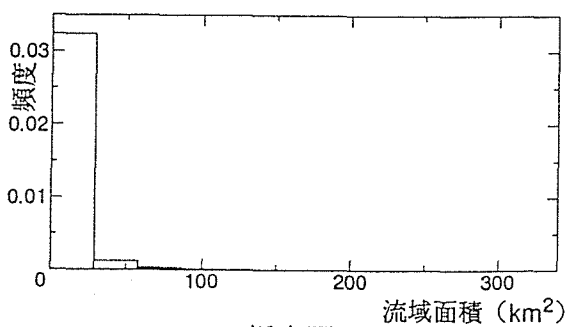
図-4.6 地形分類と表層地質と組み合わせた流域特性



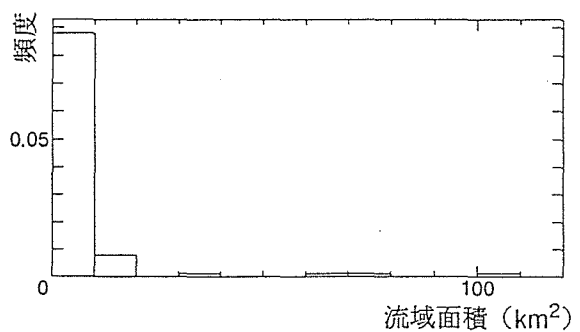
頻度図
(組み合わせ, 大起伏山地)



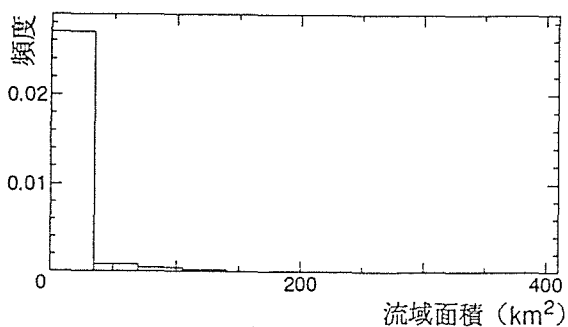
頻度図
(組み合わせ, 大起伏火山地)



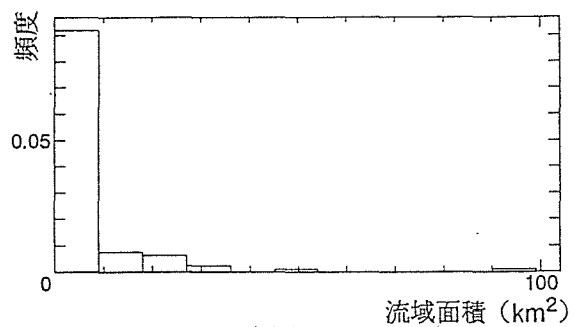
頻度図
(組み合わせ, 中起伏山地)



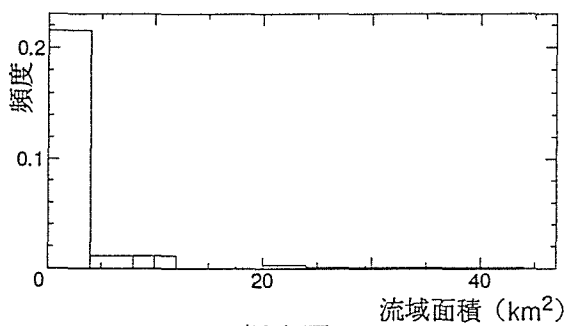
頻度図
(組み合わせ, 中起伏火山地)



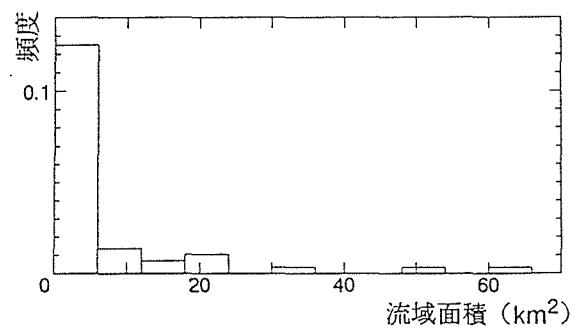
頻度図
(組み合わせ, 小起伏山地)



頻度図
(組み合わせ, 小起伏火山地)

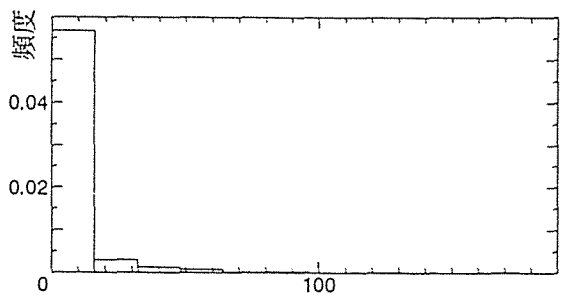


頻度図
(組み合わせ, 山麓地)

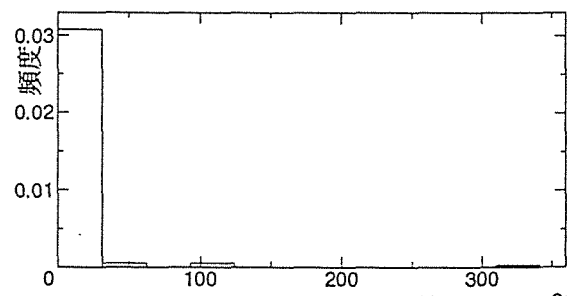


頻度図
(組み合わせ, 火山麓地)

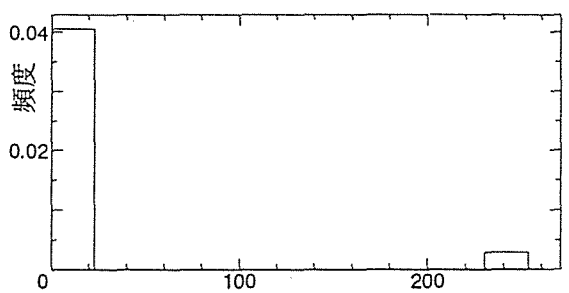
図-4.7 表層地質と組み合わせた地形分類の頻度図 (その1)



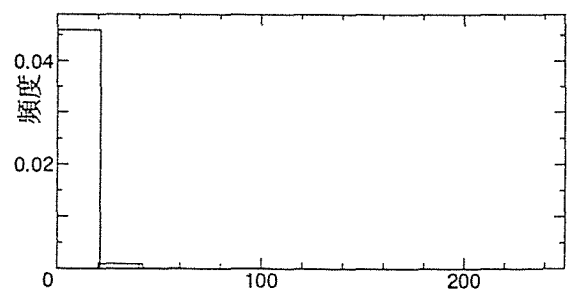
頻度図
(組み合わせ, 丘陵地)



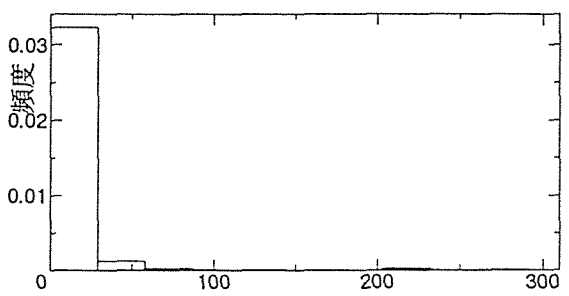
頻度図
(組み合わせ, 岩石台地)



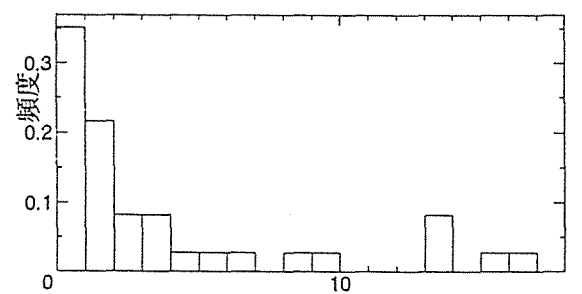
頻度図
(組み合わせ, 火山性丘陵地)



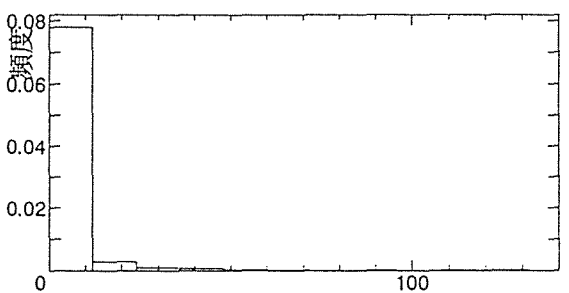
頻度図
(組み合わせ, 扇状地)



頻度図
(組み合わせ, ローム台地)



頻度図
(組み合わせ, 三角州・砂州)



頻度図
(組み合わせ, 砂礫台地)

図-4.7 表層地質と組み合わせた地形分類の頻度図 (その2)

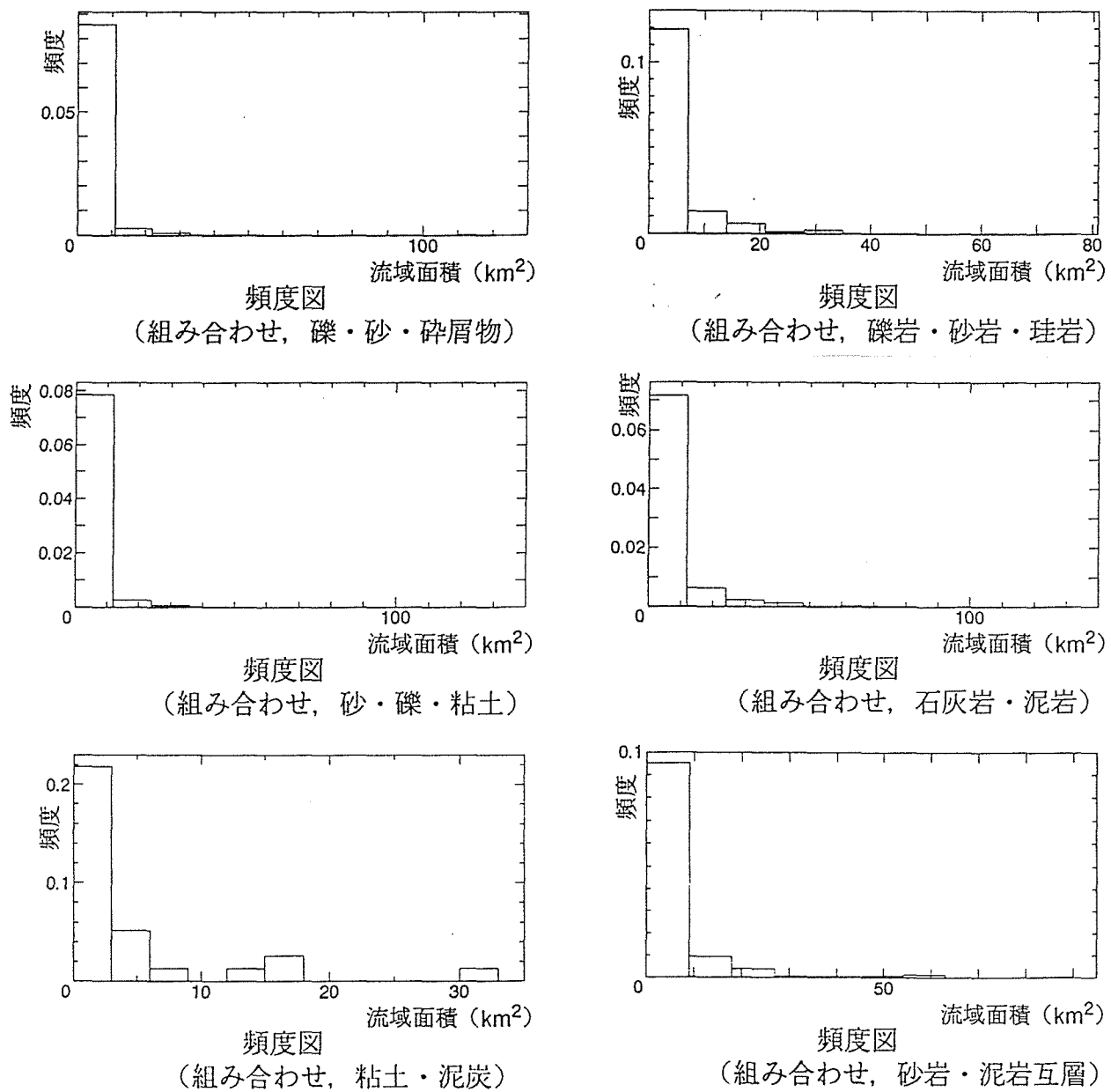


図-4.8 地形分類と組み合わせた表層地質の頻度図 (その1)

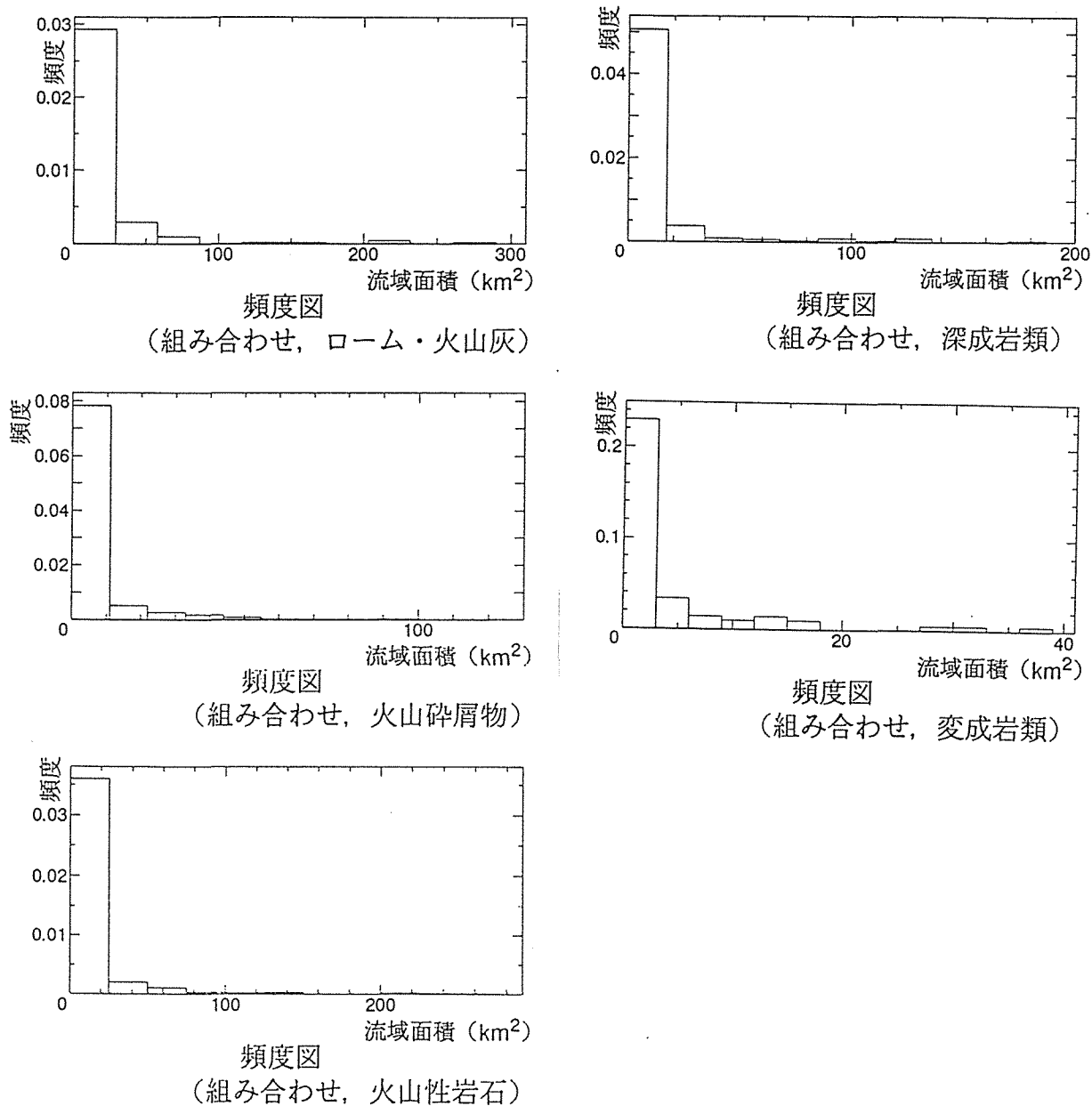


図-4.8 地形分類と組み合わせた表層地質の頻度図 (その2)

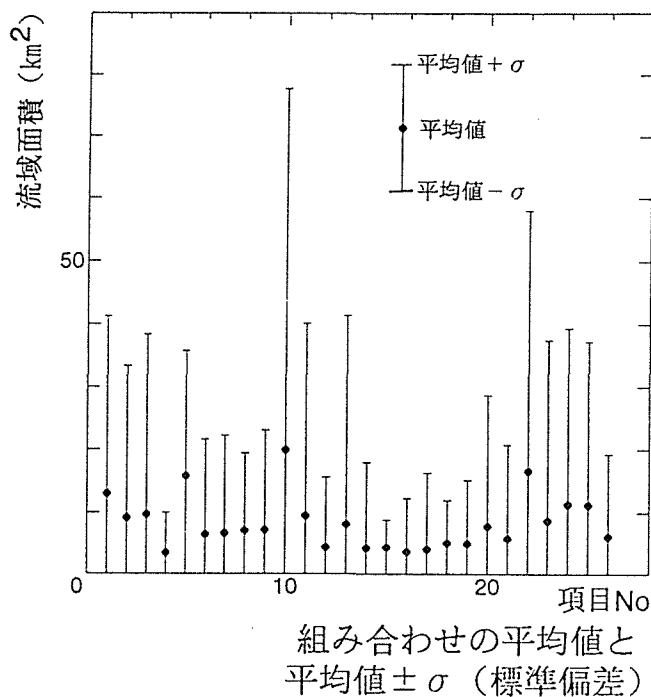


図-4.9 流域特性量を組み合わせた場合の均質となる面積

4.2.3 均質な流域サイズの検討

4.2.1 と 4.2.2 では、北海道の 20 流域を対象に、特性量が均質となる面積の頻度図、平均値と平均値 $\pm \sigma$ (標準偏差) を各特性量毎に示した。この結果から流域場の特性量が均質とみなせる面積は約 5 km^2 となることを示した。本節では、この結果を特定の流域に適用し、前述の均質とみなすことのできる面積が妥当なものであるかを検証する。

図-4.10 は十勝川流域のみの頻度図で、各項目毎だけではデータ数が少ないため、各項目を全てまとめて頻度を計算した。頻度図は、やはり指数分布形に相似した分布になっていることがわかる。

平均値と平均値 $\pm \sigma$ (標準偏差) を示した図-4.11 をみると、十勝川流域の均質とみなすことのできる面積は、平均値の変動を考慮すると約 10 km^2 となる。したがって、4.2.1 と 4.2.2 で得られた 5 km^2 の面積で十勝川流域を分割した場合、十勝川流域の均質とみなすことのできる面積の 10 km^2 よりも小さいので、この基準で分割した流域の特性量は均質とみなすことができ、この結果は妥当なものと考えられる。

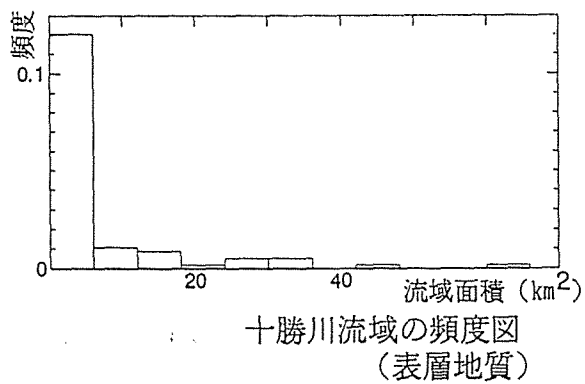
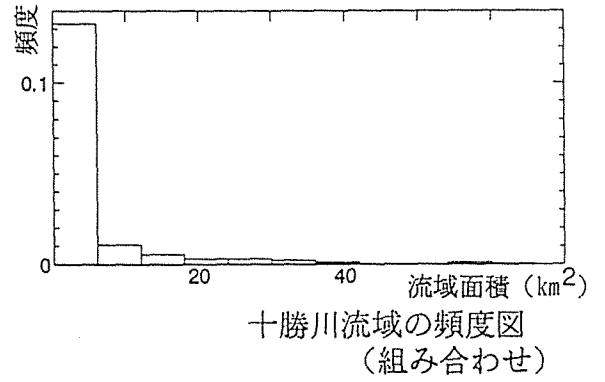
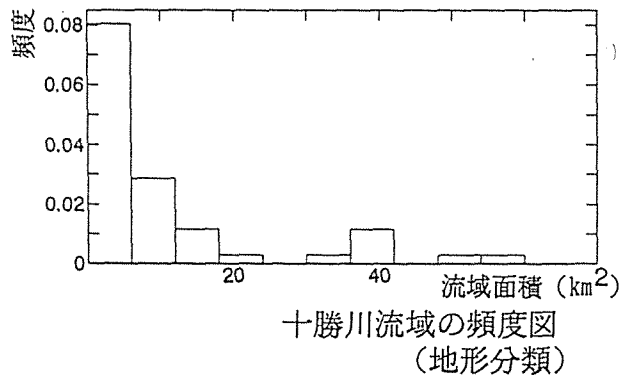


図-4.10 十勝川流域の流域特性量の頻度図

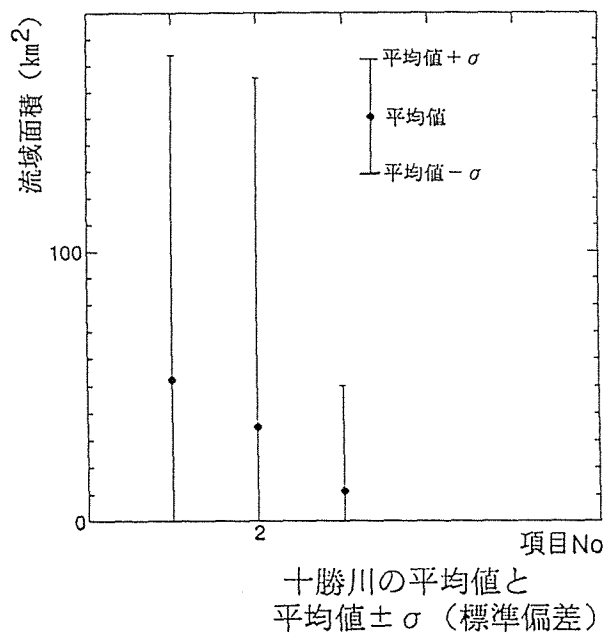


図-4.11 十勝流域の均質となる面積

4.3 降雨場の均質となる雨域サイズ

流出解析では、前節で述べた流域場の特性量が均質であることと共に、降雨場も空間的に一様に降ることが望ましい。この条件から、降雨として地点雨量をティーセン法などによって一様降雨とみなす流域代表降水量が流出解析に用いられている。

近年急速に整備されてきたレーダー雨量計は、面的（3次元レーダーでは空間的）な降雨強度が得られるため、精度の高い面積雨量を推定することができる。ここでは、流出解析上必要である一様な降雨とみなすことのできる面積を、このレーダー雨量計の観測データを基にして検討するものである。降雨の一様性を判断する基準として、種々の方法が考えられるが、本研究では平均雨量強度、降雨継続時間、降雨波形数（1降雨内で連続して降った降雨波形の個数）を取り上げ、これらの条件が同一である降雨の雨域面積について調べる¹¹⁾。

4.3.1 レーダー雨量計とは

レーダー雨量計とは、リモートセンシングの一種である。リモートセンシングは、対象物が発した波動を感じる受動センシングと、波動を発射して対象物で反射されて帰って来た波動から対象物を感じる能動センシングがあり、レーダー雨量計は、後者の能動センシングである。

レーダー雨量計には、

- 1) 瞬時性：雨滴の成長・落下、そして在来手法による観測の所要時間に比べれば観測は全く瞬時に行われる。
- 2) 連続性：レーダーのアンテナを回転させることにより、平面的（さらには立体的）に連続的に雨域を見ることができるので、狭い範囲の強雨を見落とすという欠点がない。
- 3) 直感性：上記2特徴を組み合わせ、表示方法を適切にすれば、雨量の空間的・時間的分布を直観的に見ることができる。

などの特徴をもつ。

したがって、レーダー雨量計は水文観測器機という範囲にとどまらず、河川・ダム・砂防・鉄道・道路その他多くの土木構造物の豪雨に対する安全管理技術一般において新しい目としての威力を大いに発揮し得るものである¹⁴⁾。

レーダー雨量計の原理は簡単に説明すると次のとおりである。

- 1) アンテナより、パルス状の電波を発射
- 2) 雨滴群より電波が反射しアンテナで受信

アンテナで受信された電波は電力 (P_r) として得られ、これを実際の降雨量に換算するための式が次式のレーダー方程式である。

$$P_r = \frac{C \cdot F \cdot K \cdot Z}{r^2} \dots\dots\dots (4.1)$$

$$Z = B \cdot R \cdot \beta \dots\dots\dots (4.2)$$

ここで、 r : 目標までの距離、 C, F : レーダーの性能などによって決まる定数、 K : 空気や途中の降雨雪による減水項、 Z : 反射因子、 B, β : 雨や雪の種類による定数 (レーダー定数)、 R : 降雨強度である。

レーダー雨量計では、この受信電力が円周方向に 128 等分、半径方向に 3 km 毎に円筒に分割して得られるメッシュ単位で与えられる。また、この受信電力が観測される時間スケールは 5 分間毎で、空間スケールは、**PPI**(Plan Position Indicator) の同一仰角でアンテナを回転させ雨量強度を極座標的に表示するものと、**CAPPI** (Constant Aititude Plan Position Indicator) の水平回転させながら逐次仰角を換え雨量表示するものがある。

4.3.2 降雨場の平均雨量強度・降雨継続時間・降雨波形数

本研究では、北海道開発局の道東レーダー (霧裏山 : 標高 613m, 形式 : **CAPPI**) の定量範囲 (半径 120km, 図-4.12) を対象区域とし、対象とした降雨は、定量範囲内の十勝ダム上流域 (トムラウシ, ユートムラウシ, オプタシケ, 湯の滝, 二股, ニソペツ, 丸山), 札内川流域 (札内川上流, 上札内), 足寄川流域 (稲牛, オンネトー) の計 11ヶ所の地上降雨データを参考に、1994 年 9 月から 10 月にかけての比較的降雨の強い 6 降雨 (表-4.7) を選定した。

レーダー雨量計のデータは、円筒座標メッシュで与えられているので、降雨が一様とみなすことのできる雨域面積を計測する場合に取り扱いが不便である。ここでは 3km×3km の直交座標メッシュに変換して、データ処理を行った。道東レーダー雨量計は **CAPPI** であり、5 分間隔で 10 仰角 (0.2, 0.4, 0.7, 0.9, 2.0, 4.0, 6.0, 8.0, 11.0, 17.0 度) の観測を行っている。ただし、今回は降雨の 3 次元分布特性までは踏み込まず、仰角 0.2 度のデータを解析に用いた。また、5 分間隔の降雨データは変動が激しいので、まず、これを積算して 1 時間の雨量強度にする。降雨の一様性の判断基準として取り上げた平均雨量強度、降雨継続時間、降雨波形数は、この 1 時間雨量から算出した。図-4.13~図-4.15 は対象とした 6 降雨の平均雨量強度、降雨継続時間、降雨波形数の平面分布を図示したものである。

表-4.7 対象とした降雨

No	降 雨 期 間
1	1994. 9. 15～ 9. 16
2	1994. 9. 20
3	1994. 9. 23～ 9. 24
4	1994. 9. 30
5	1994. 10. 12～10. 13
6	1994. 10. 16

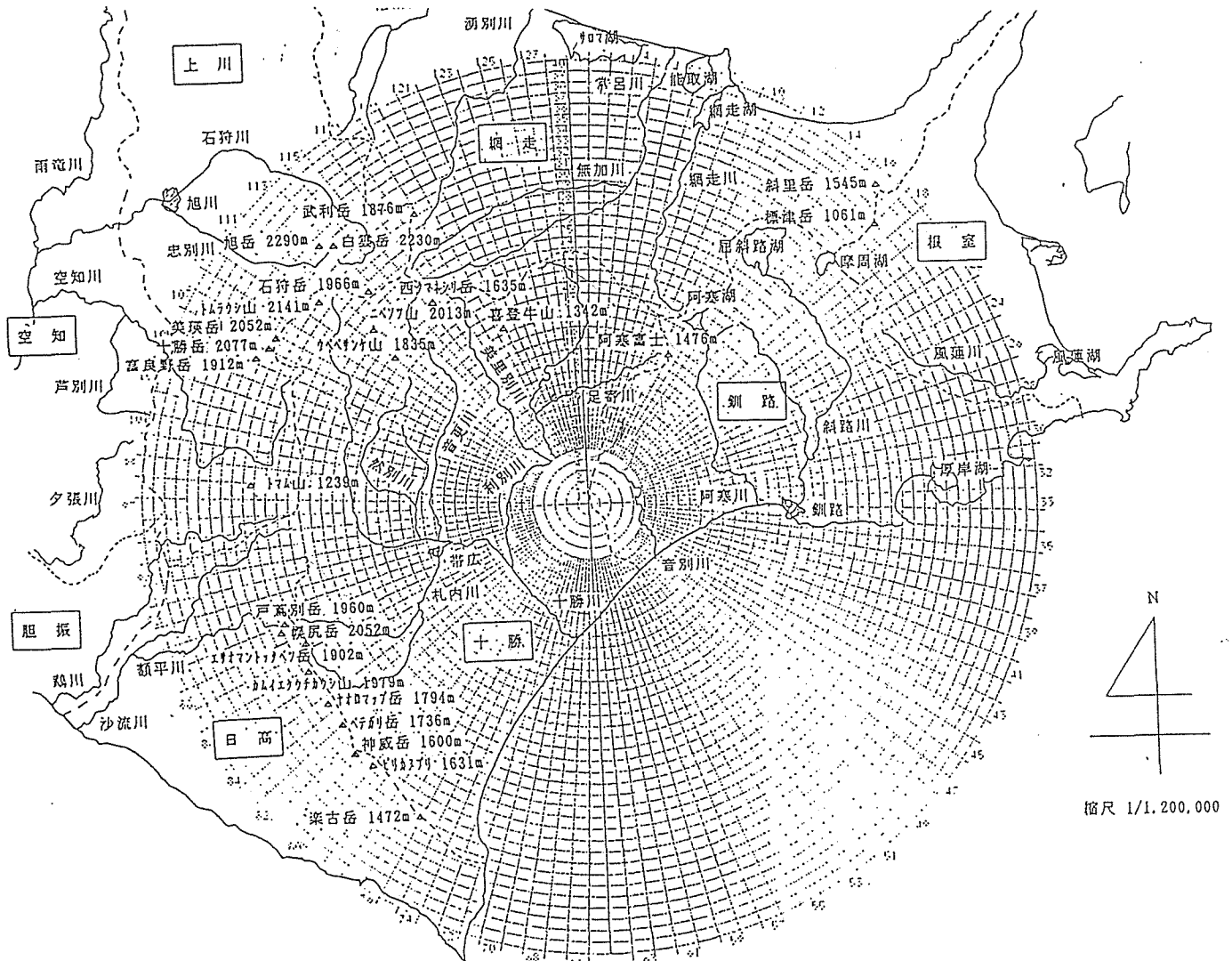
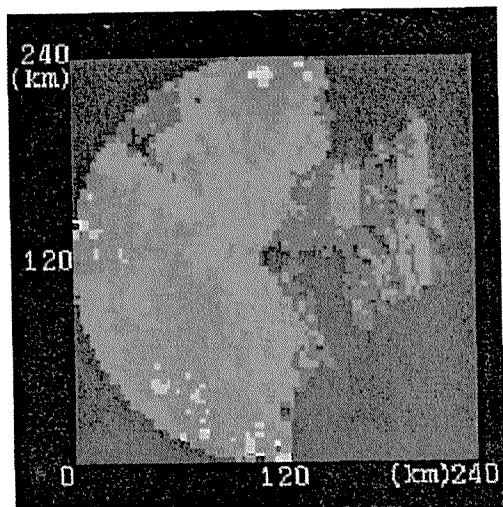
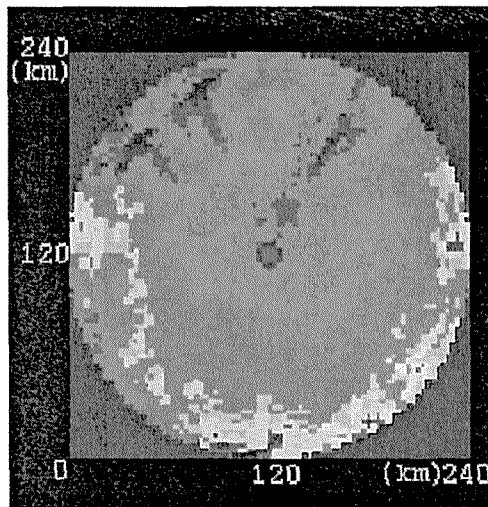


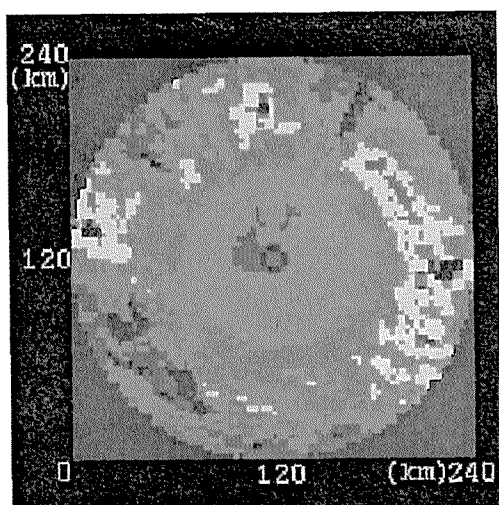
図-4.12 対象区域 (道東レーダーメッシュ図)



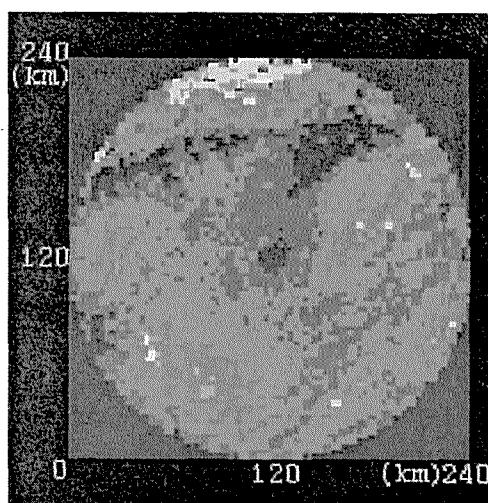
平均降雨強度 (mm/hr) [降雨 1]



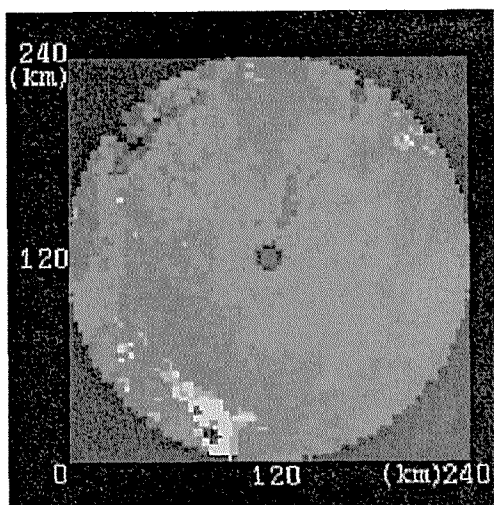
平均降雨強度 (mm/hr) [降雨 4]



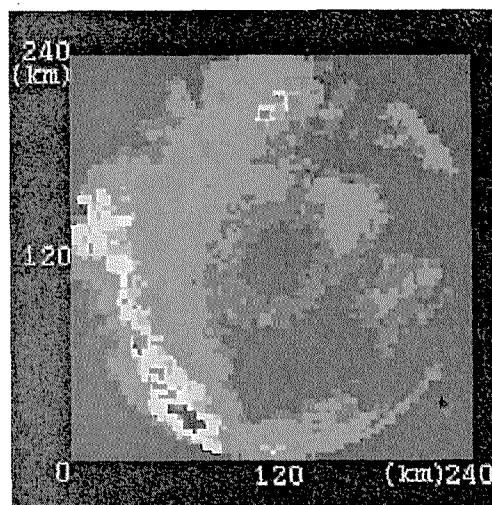
平均降雨強度 (mm/hr) [降雨 2]



平均降雨強度 (mm/hr) [降雨 5]



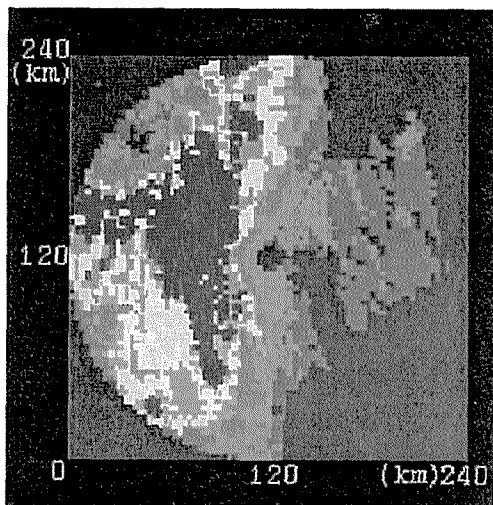
平均降雨強度 (mm/hr) [降雨 3]



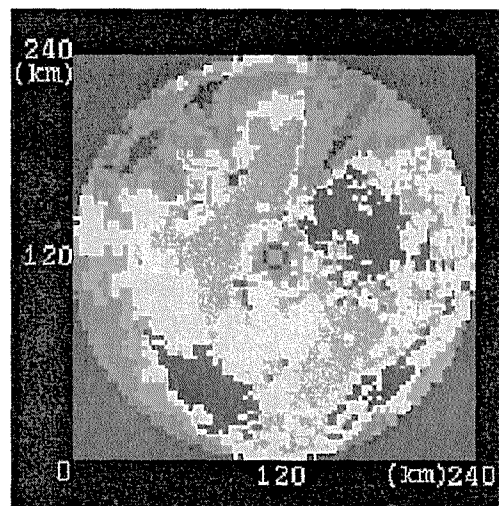
平均降雨強度 (mm/hr) [降雨 6]



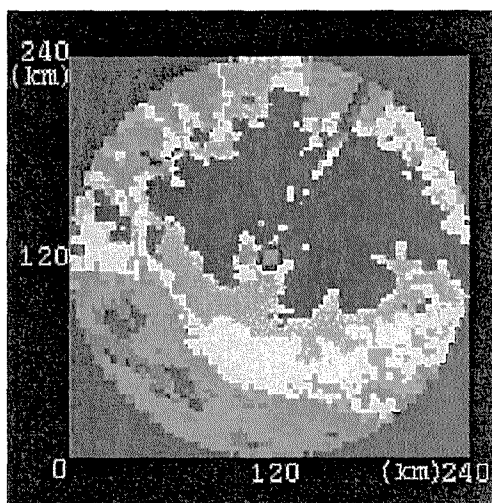
図-4.13 平均降雨強度 (mm/hr) の平面分布



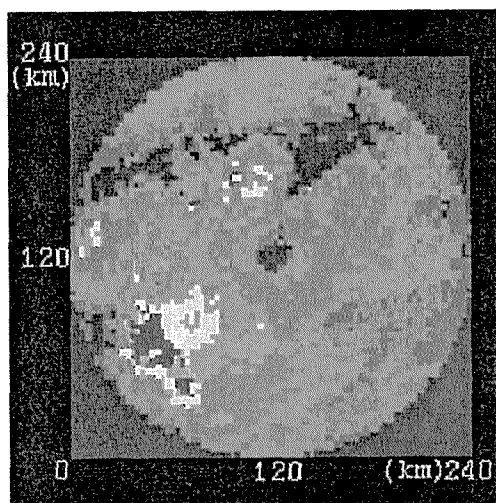
降雨継続時間 (hr) [降雨 1]



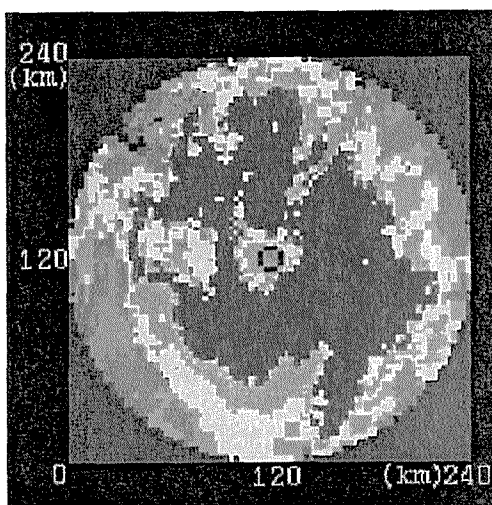
降雨継続時間 (hr) [降雨 4]



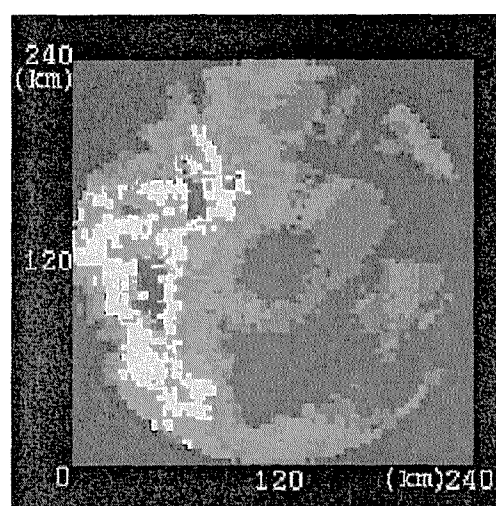
降雨継続時間 (hr) [降雨 2]



降雨継続時間 (hr) [降雨 5]



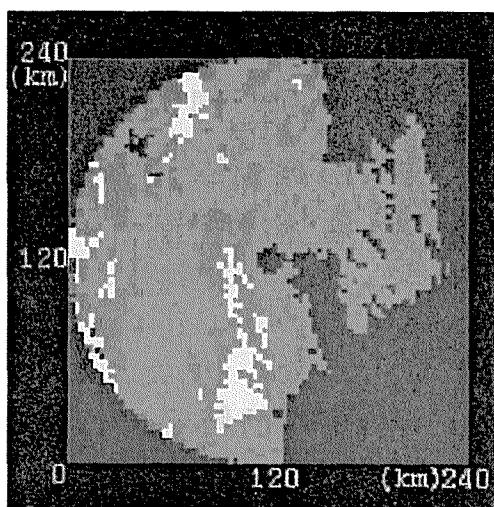
降雨継続時間 (hr) [降雨 3]



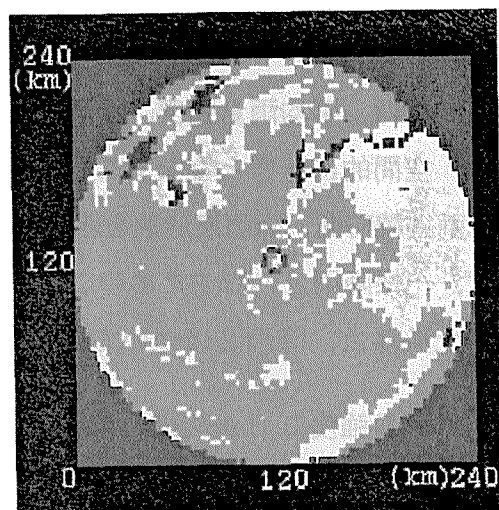
降雨継続時間 (hr) [降雨 6]

図-4.14 降雨継続時間 (hr) の平面分布

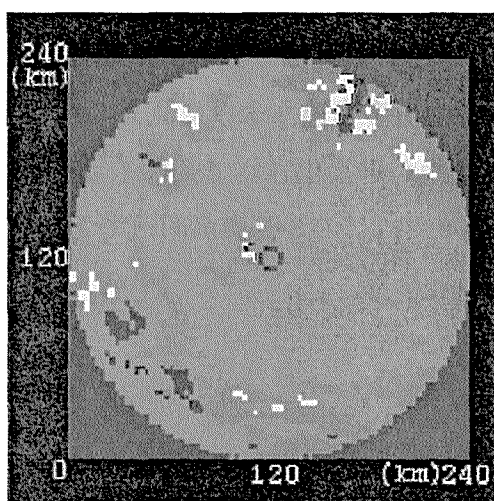




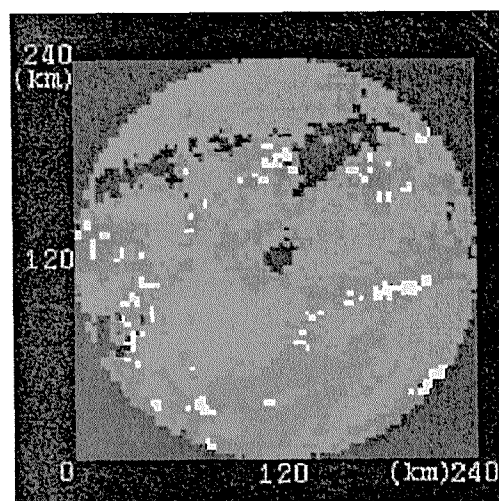
降雨波形数 (個) [降雨 1]



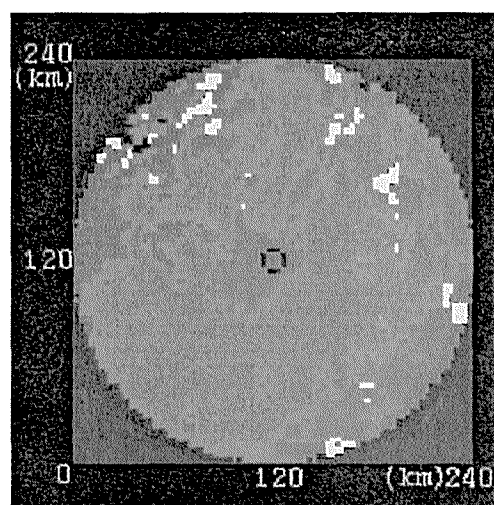
降雨波形数 (個) [降雨 4]



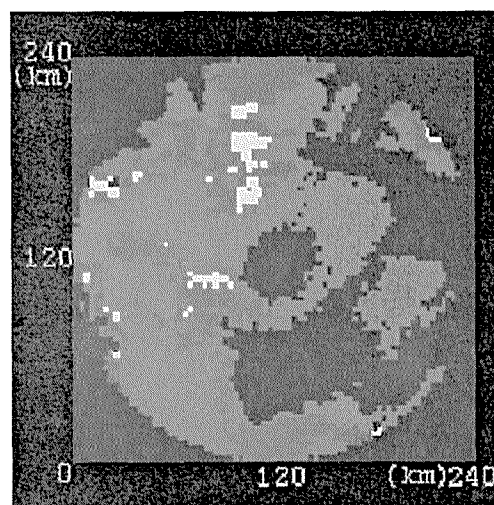
降雨波形数 (個) [降雨 2]



降雨波形数 (個) [降雨 5]



降雨波形数 (個) [降雨 3]



降雨波形数 (個) [降雨 6]

図-4.15 降雨波形数の平面分布



4.3.3 降雨の一様性の判断基準の検証

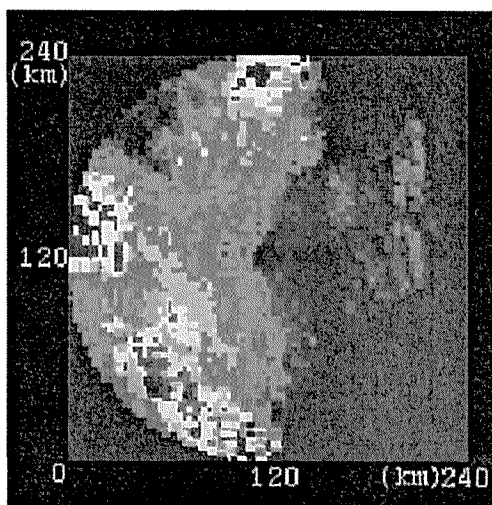
本研究では、平均雨量強度、降雨継続時間、降雨波形数の3要素が同じものを一様降雨とみなし、空間的に一様とみなすことのできる降雨面積を推定する。図-4.16は、平均雨量強度、降雨継続時間、降雨波形数を組み合わせ、3要素が同じものの集合に分類した図である。

まず、一様降雨とみなすためのこの基準が妥当であるか、あらかじめ検討しておく。検証に用いた条件は、降雨2について、

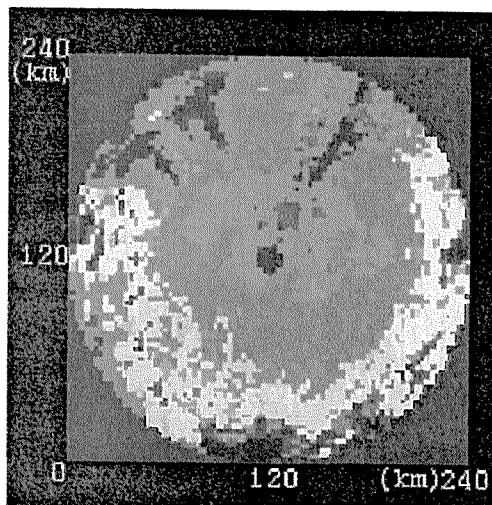
- 1) 平均雨量強度 3 (mm/hr), 降雨継続時間 8 (hr), 降雨波形数 1 個
- 2) 平均雨量強度 7 (mm/hr), 降雨継続時間 7 (hr), 降雨波形数 1 個

の場合である。上記1, 2の条件が該当するメッシュ点を図-4.16の雨域から抜き出し、5分間雨量と1時間雨量のハイトグラフを比較することによって、降雨の一様性を検証しよう。

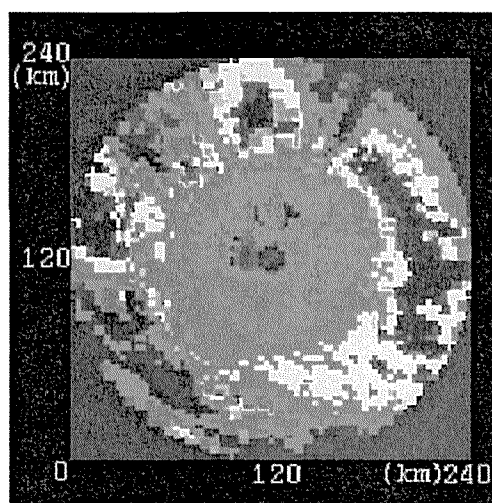
図-4.17と図-4.18が5分間と1時間雨量のハイトグラフである。5分間雨量のハイトグラフは、時間的な変動が大きいので、条件1, 2とも多少違うように見える部分もある。しかし、1時間雨量のハイトグラフを見ると、変動が平滑化されて条件1, 2の降雨ともにほぼ同様なハイトグラフを呈している。したがって、この3要素が同一であるメッシュ点の降雨は、ほぼ一様であるとみなして良いと考えられる。



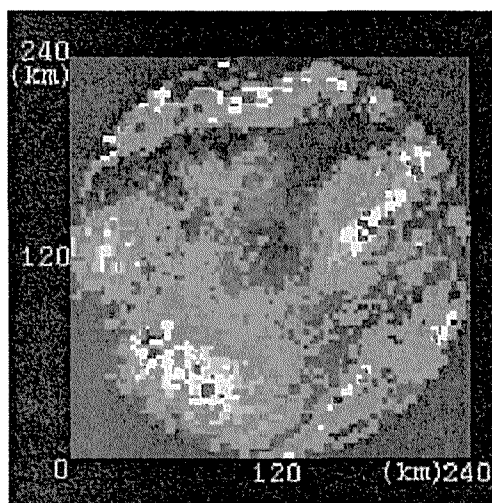
3要素の組合せ [降雨1]



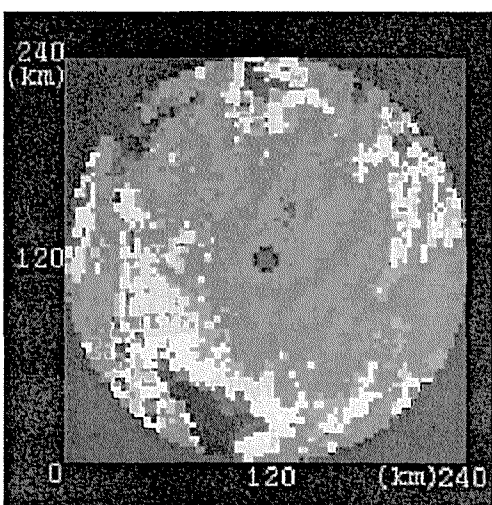
3要素の組合せ [降雨4]



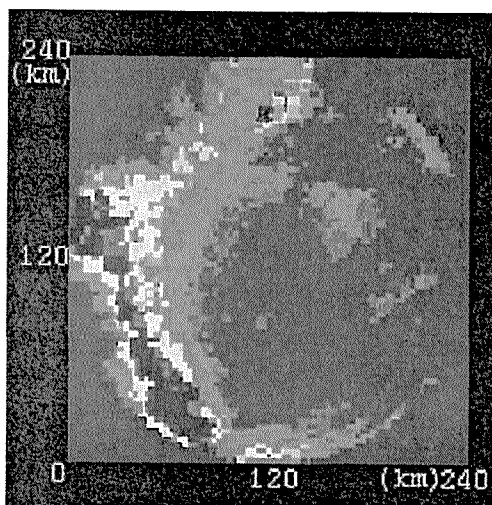
3要素の組合せ [降雨2]



3要素の組合せ [降雨5]

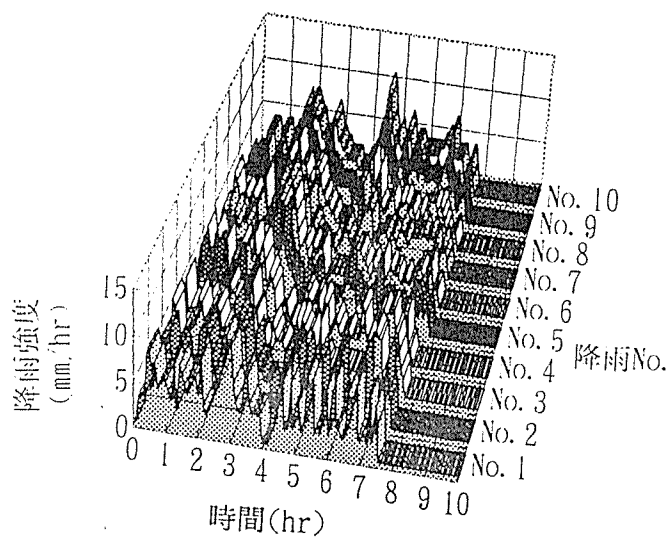


3要素の組合せ [降雨3]

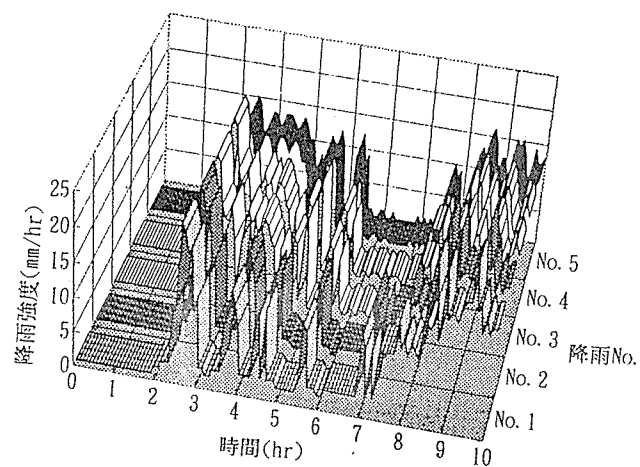


3要素の組合せ [降雨6]

図-4.16 3要素が同じ組み合わせのメッシュ点の平面分布

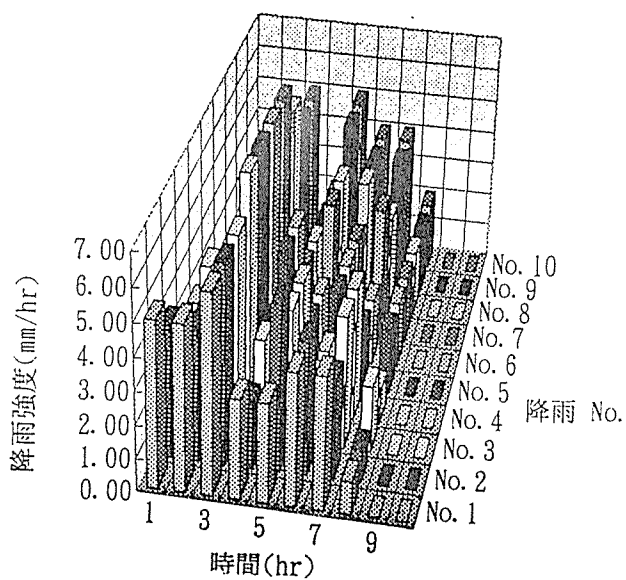


(条件 1)

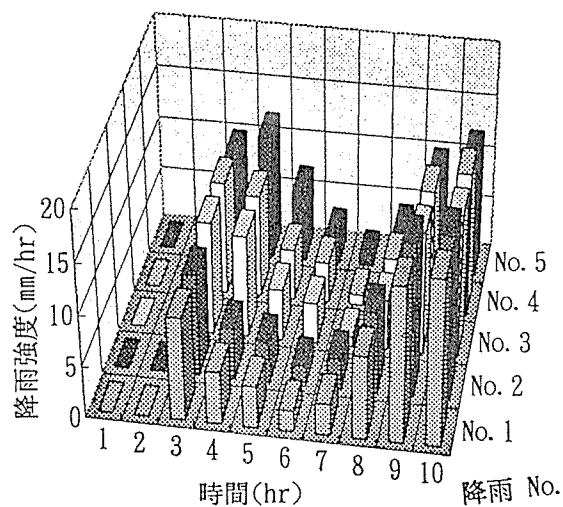


(条件 2)

図-4.17 5分間雨量ハイトグラフの場合



(条件 1)



(条件 2)

図-4.18 1時間雨量ハイトグラフの場合

4.3.4 一様な降雨の雨域サイズ

前節の検討結果から、3要素の値が同じメッシュ部分を一様降雨の範囲とみなし、その雨域面積を求めた。対象とした6降雨について、一様となる雨域サイズの計測結果は図-4.20の頻度図と、図-4.19の平均値と平均値 $\pm\sigma$ （標準偏差）で示されている。

雨域サイズの頻度図は流域場の特性量の場合と同じく、どの降雨についてもほぼ指数分布に類似した分布形を示し、一様降雨とみなすことのできる面積が比較的小さい面積に集中することがわかる。また、平均値と平均値 $\pm\sigma$ （標準偏差）の図をみると、平均値は、どの降雨についても約35~40km²程度になり、平均値 $\pm\sigma$ の範囲は降雨によらず、各々の降雨で重複する範囲の上限がほぼ100km²である。

以上のことから、一様降雨とみなすことのできる降雨場の雨域サイズの範囲は、下限として平均値の変動の範囲が最小である約35km²、上限は約100km²になると考えられる。

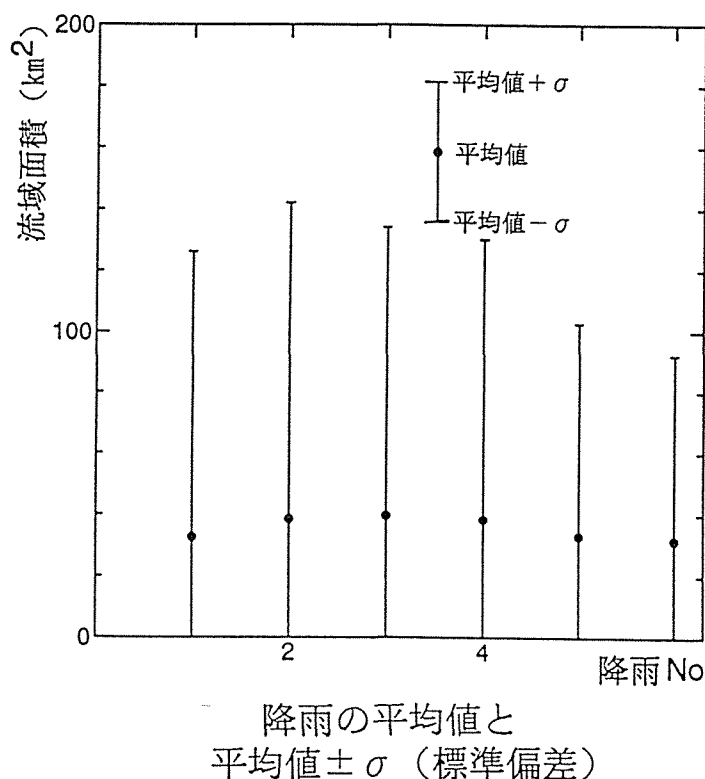
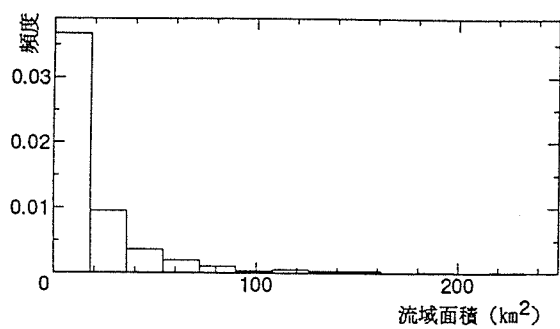
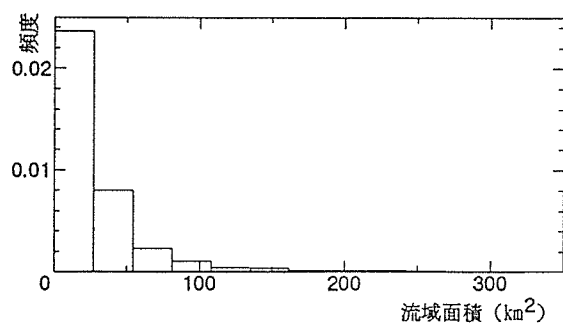


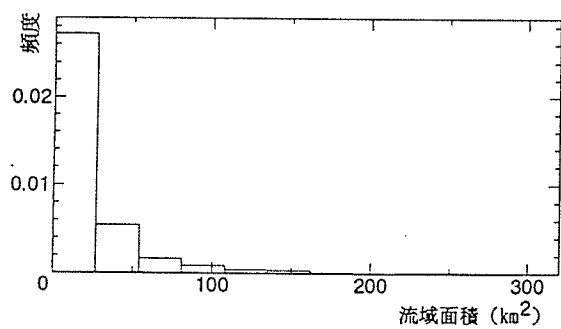
図-4.19 一様降雨の雨域サイズの平均と標準偏差



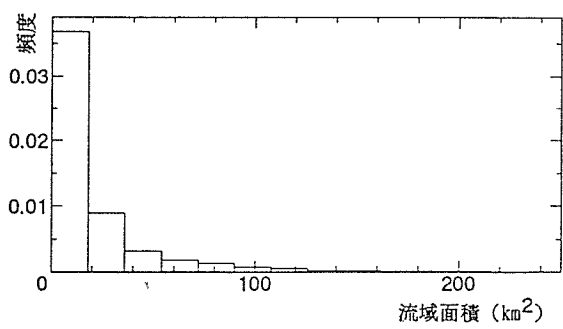
頻度図 (降雨 1)



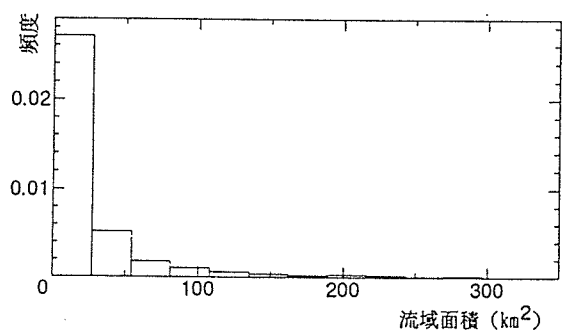
頻度図 (降雨 4)



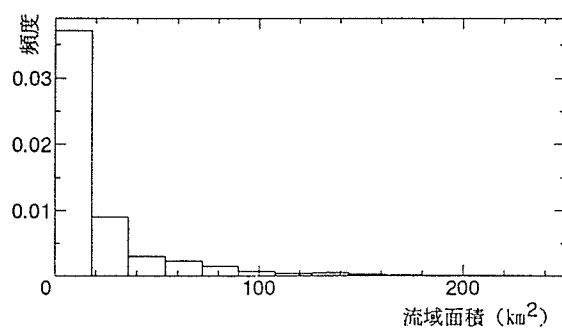
頻度図 (降雨 2)



頻度図 (降雨 5)



頻度図 (降雨 3)



頻度図 (降雨 6)

図-4.20 各降雨に対する雨域サイズの頻度図

4.4 流域の低域フィルター機能としての流域サイズ

降雨流出機構において、流域の斜面域は雨水を河道への流出量に変換する場であり、河道は斜面域からの流出量を合成し、流域末端へ運搬する働きをしている。降雨流出機構を降雨を入力、流出量を出力とした応答モデルであると想定すると、降雨流出系の応答モデルは、上述のように雨水が流域場で変換されるために、線形応答を示すことはほとんどなく、一般に非線形応答になると考えられる。つまり、流域は降雨が時間的に激しく変動していても、降雨の高周波数成分をカットして、低周波数成分のみを通過する低域フィルター (low pass filter, または high cut filter) の働きをしている。

更に、降雨の観測値は、実際の降雨をサンプリング間隔 Δt で離散化したものであり、この離散化も一種の低域フィルターに相当している。したがって、降雨流出系の応答システムは図-4.21 に示すように3個の低域フィルターを通過する非線形システムと考えることもできる。

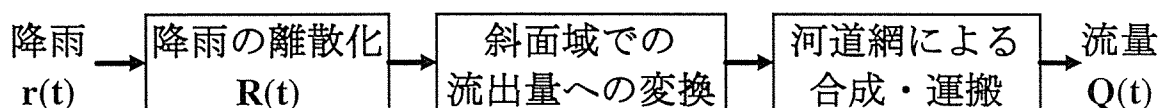


図-4.21 降雨流出系システム

線形システムの応答特性は、時間領域における過渡応答特性や定常応答特性、あるいは周波数領域における周波数応答特性を調べることによって評価できる。一方、非線形システムではこれらの手法はほとんど無力となってしまうが、近似的な意味で線形理論を適用したり、記述関数法のように非線形システムに拡張することが考えられてきた¹⁵⁾。

記述関数法は入力为正弦波である場合にのみ適用できる手法で、降雨流出系のように入力である降雨が不規則な波形である場合には適さない。したがって、降雨流出系の非線形システム解析には、近似的な意味での線形理論の適用を考えることになる。これまで降雨流出システムに周波数応答法の適用した例はほとんどなく、嵯峨¹⁶⁾や藤田^{17),18)}の研究があるだけである。嵯峨¹⁶⁾は降雨流出現象の非線形要素を考慮することができるならば、周波数応答法を降雨流出系にも適用可能と考え、周波数応答法を流出解析に適用して流出成分の分離や単位図の同定を試みている。

本研究も嵯峨の考えに準じ、流域システムの応答特性を周波数応答法により検討し、流域

を低域フィルターとして考えたときの働きと流域サイズの関係に注目し、降雨流出システムに望まれる流域スケールを検討する。

4.4.1 降雨流出系の応答特性

本研究で用いてきた流出モデルは、星が提案した2価の貯留関数法である¹⁹⁾。

$$\frac{dS}{dt} + q = r \quad \dots\dots\dots (4.3)$$

$$S = K_1 q^{P_1} + K_2 \frac{dq^{P_2}}{dt} \quad \dots\dots\dots (4.4)$$

ここに、 K_1, K_2 :貯留係数、 P_1, P_2 :貯留指数、 q :流出量(流出高: mm/hr)、 S :貯留量(貯留高: mm)、 r :降雨量(mm/hr)である。上式はまた、以下のように書き直すことができる。

$$K_2 \frac{d^2 Q^{P_2}}{dt^2} + K_1 \frac{dQ^{P_1}}{dt} + Q = r \quad \dots\dots\dots (4.5)$$

つまり、本研究の降雨流出系システムは、入力としての降雨量 $r(t)$ が与えられたときの出力が流出量 $Q(t)$ となる入出力非線形微分方程式で表現できる。第3章で既に述べたように、サブ流域の地形量やサブ流域を連結している河道網が確率変動する場合には、上式の微分方程式を貯留係数 K_1, K_2 が確率変動とした確率微分方程式と考えることになる。

ここで、降雨量 $r(t)$ は本来、連続量として与えられるべきものであるが、実際に観測される降雨量は、ある時間間隔 Δt の離散的な降雨量 $R(t)$ として与えられる。両者の関係は次式で表される。

$$R(t) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t}^t r(\tau) d\tau \quad \dots\dots\dots (4.6)$$

ナイキストのサンプリング定理によると、サンプリングの時間間隔を Δt として周期関数を考える場合に、半周期が Δt 以下の周期成分については消滅してしまう¹⁵⁾ので、 Δt が与えられた場合は周期 $2\Delta t$ までの降雨成分を考慮していることになる。このときの角周波数 ω は次式で与えられる。

$$\omega = \frac{\pi}{\Delta t} \quad \dots\dots\dots (4.7)$$

降雨流出システムは本来非線形システムであるが、近似的に線形システムと考え¹⁶⁾、その基本的な性質である応答特性を調べる手法の一つである周波数応答法を降雨流出システムに適用する。

線形システムの応答特性を調べる方法には、時間領域における過渡応答特性と定常応答特性を調べる方法と、周波数領域でシステムの特性を捉える周波数応答法がある¹⁵⁾。降雨流出システムについて考えると、式(4.5)の P_1, P_2 が1の場合が線形システムである。

$$K_2 \frac{d^2 Q}{dt^2} + K_1 \frac{dQ}{dt} + Q = r \quad \dots\dots\dots (4.8)$$

上式の微分方程式の解は，時間領域で考えると過渡応答と定常応答の和として与えられ，流出ハイドログラフに相当している．第3章では降雨強度が一定である場合の流出量の平均値，分散などの確率応答を明らかにしているが，これは流域システムの定常応答を調べていることになる．

一方，周波数応答特性は，降雨と流出量の関係を降雨の各周波数成分毎にみたもので，未知の伝達関数を持つシステムの動特性試験法である．降雨流出系システムでは，入力である降雨波形の振幅と出力である流出量の振幅の比，ゲイン G (Gain) と降雨の周波数 ω の関係，あるいは，位相差 ϕ と周波数 ω の関係を求め，流域によって損失する降雨情報の度合を示している．

今，降雨データとして

$$r(t) = \bar{r} + B \sin(\omega t) \dots\dots\dots (4.9)$$

の周期関数を与えた場合に，式 (4.8) が定常状態に達した時の流出量 $Q(t)$ は

$$Q(t) = \bar{r} + C \sin(\omega t + \phi) \dots\dots\dots (4.10)$$

となる．このときのゲイン $G(\omega)$ と位相差 ϕ は，理論的に容易に求めることができる．

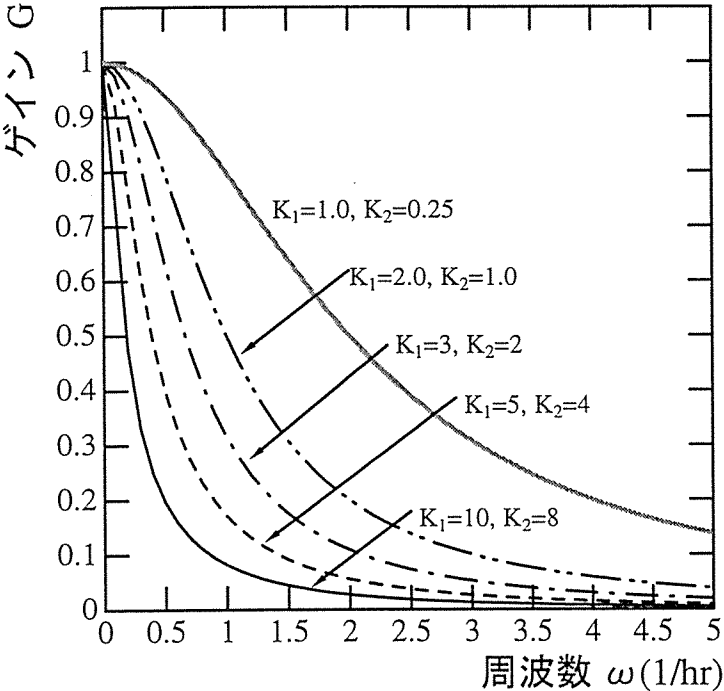


図-4.22 線形システムのゲインと周波数の関係 [ボード線図]

$$G = \frac{C}{B} = \frac{1}{\sqrt{(1 - K_2\omega^2)^2 + K_1^2\omega^2}} \dots\dots\dots (4.11)$$

$$\tan(\phi) = -\frac{K_1\omega}{1 - K_2\omega^2} \dots\dots\dots (4.12)$$

図-4.22 は、線形システムのゲインと周波数の関係を図示したものである。ゲインは貯留係数 K_1, K_2 が大きくなると (時定数が大きくなる)、流域の低域フィルターの働きによって降雨の高周波成分がほとんど損失してしまうことを示している。仮に、1 時間間隔の降雨データが与えられたとすると、カットオフ (cut off) 周波数 ω_c は式 (4.7) から $\omega_c = \pi$ となる。

次に、システム方程式が非線形である場合 ($P_1, P_2 \neq 1$) のゲインと周波数の関係式を求める。非線形の場合は線形と違って理論解を誘導することができないので、近似解を求めることになる。式 (4.9) を式 (4.5) に代入して非線形項をテーラー展開し、微小項を無視することによって次式が誘導できる。

$$G = \frac{C}{B} = \frac{1}{\sqrt{(1 - P_2 K_2 \bar{r}^{P_2-1} \omega^2)^2 + (P_1 K_1 \bar{r}^{P_1-1} \omega)^2}} \dots\dots\dots (4.13)$$

$$\tan(\phi) = -\frac{P_1 K_1 \bar{r}^{P_1-1} \omega}{1 - P_2 K_2 \bar{r}^{P_2-1} \omega^2} \dots\dots\dots (4.14)$$

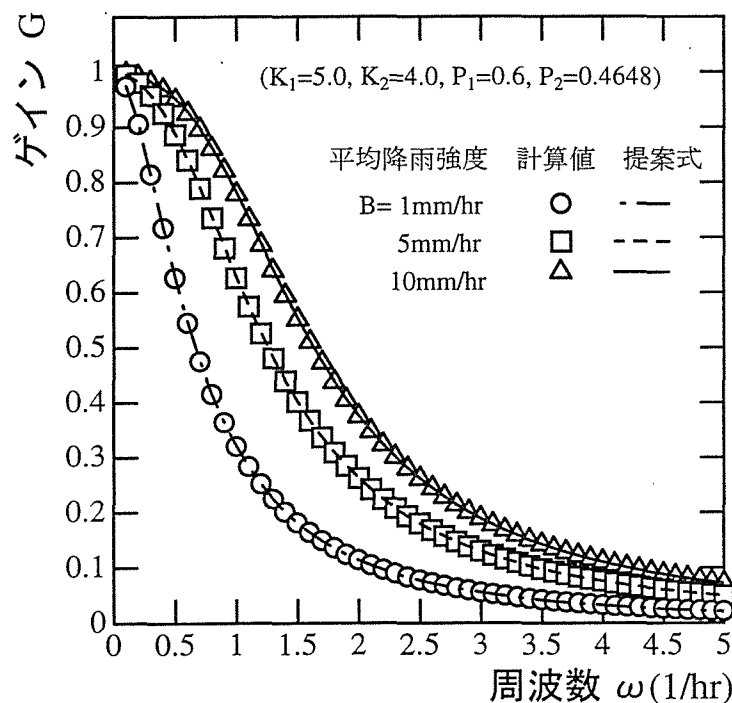


図-4.23 非線形システムのゲインと周波数の関係 [ボード線図]

この式は、近似式であるので、式 (4.5) に式 (4.9) の降雨波形を代入して数値計算で求めた流出量のゲインと提案式を比較する。図-4.23 は図中に記してある K_1, K_2, P_1, P_2 の条件下で、3 種類の降雨強度の比較を行なった。いずれも場合も提案式は計算値に一致しており、適合性は高い。したがって、これ以降のゲインの計算にはこの提案式を用いることにする。

4.4.2 流域サイズとゲインの関係

前節では、星の貯留関数法をシステム方程式にした場合のゲインを求める式を提案した。本節ではこの式を用いてサブ流域の流域サイズと周波数応答特性について言及する。

星の貯留関数法の貯留係数 K_1, K_2 と貯留指数 P_1, P_2 は流域の面積と降雨強度との間に次式の関係がある¹⁹⁾。

[矩形降雨波形の場合]

$$K_1 = 2.823 f_c^{0.6} A^{0.24} \dots\dots\dots (4.15)$$

$$K_2 = 0.2835 K_1^2 \bar{r}^{-0.2648} \dots\dots\dots (4.16)$$

$$P_1 = 0.6, \quad P_2 = 0.4648 \dots\dots\dots (4.17)$$

ここに、 f_c :流域ファクター ($= N/\sqrt{s}$), N : 等価粗度係数 (m-sec 単位), s : 斜面勾配, \bar{r} : 平均降雨強度 (mm/hr) である。

まず、矩形波形の降雨を対象に、流域面積を $0.1(\text{km}^2) \sim 100(\text{km}^2)$ まで順次大きくしていった場合の流域の周波数特性を調べてみる。非線形システムでは降雨強度も周波数特性に関係しているので、5種類の降雨強度について流域のゲイン特性を求めた (図-4.24)。流域面積とゲインの関係は、流域面積が大きい程降雨情報の損失が大きく、小さな流域程損失が少ない。また、降雨強度によって、この関係はシフトし、弱い雨の時ほど降雨情報の損失が大きく、台風のような降雨強度が強い雨の場合には損失が少なくなる。

いま、対象とする流域の面積が与えられたとしよう。仮に $100(\text{km}^2)$ とすると、降雨強度が $1(\text{mm/hr})$ のような弱い雨の場合に、ゲインが 0.1 以上となる降雨の周波数は、 Δt が $3(\text{hr})$ 以上の場合である。もし、 Δt が $1(\text{hr})$ の降雨データが与えられている場合、このデータを有効に利用するためには、この流域を分割してゲインが 0.1 以上になる流域面積まで小さくする必要がある。この様に、流域面積、降雨強度とゲインの関係がこの周波数応答の関係図から容易に理解できる。逆に、降雨強度が強い雨の場合には、流域の低域フィルターとしての働きによる情報の損失が少ないので、流域をそれほど分割する必要はないことになる。

次に、式 (4.15) の流域ファクター f_c が変動する場合の周波数応答特性について調べてみる (図-4.25)。 f_c の値は、実流域の流出解析結果をみると、約 3 程度の値をとることが多いようである¹⁹⁾。 f_c の値が大きくなるということは、その定義から等価粗度係数が大きくなる場合か、斜面の勾配が緩くなる場合である。本研究は研究対象の流域サイトを山地河川にしているので、 f_c の増加は、等価粗度係数の増加に結び付けて考えることになる。したがって、地表面の粗度が荒くなって f_c の値が大きくなると、斜面上の雨水が流れにくくなり、降雨情報の損失も大きくなるという現象を、これらの図は適切に説明している。

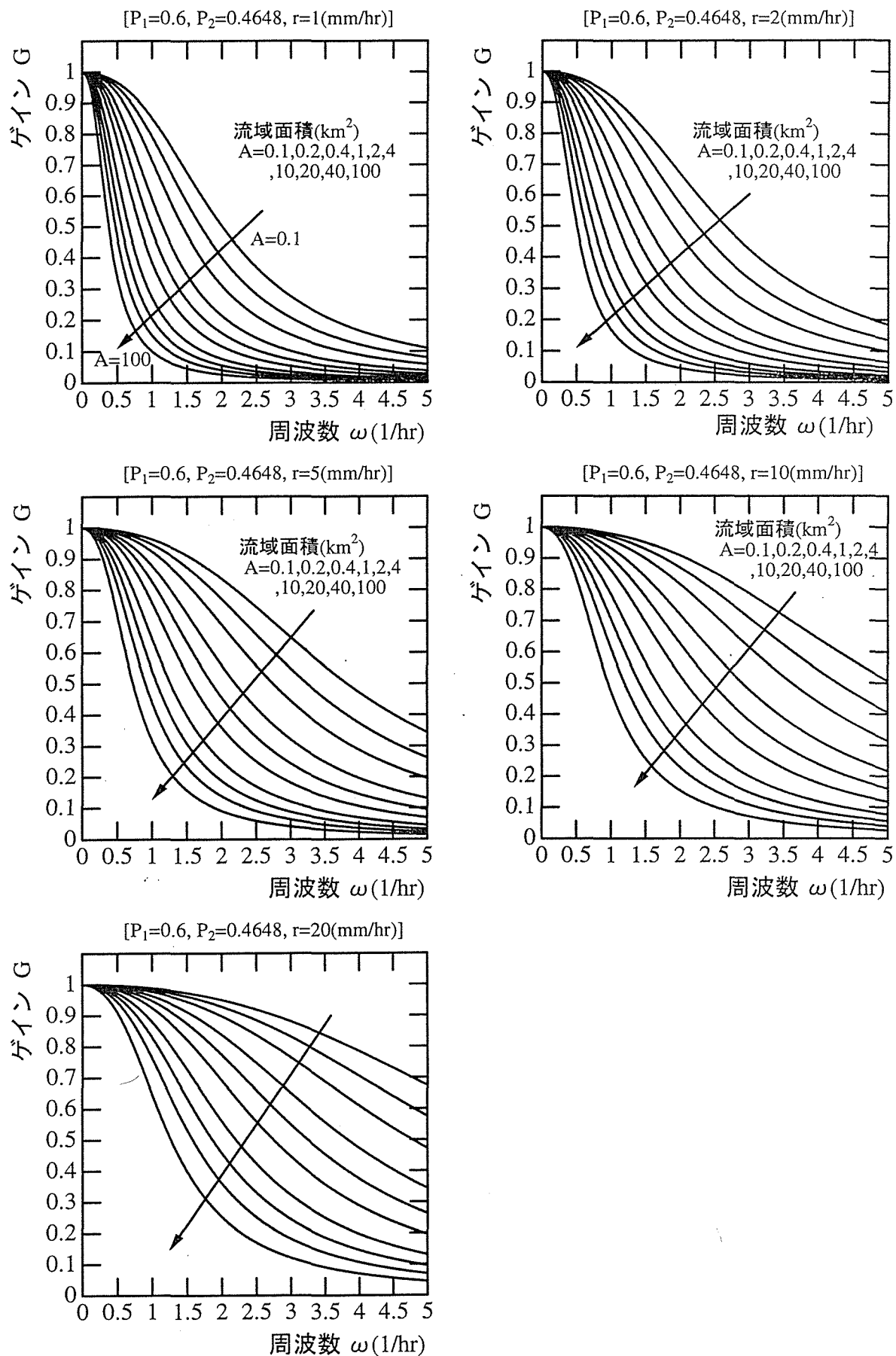


図-4.24 周波数特性に対する流域面積の影響

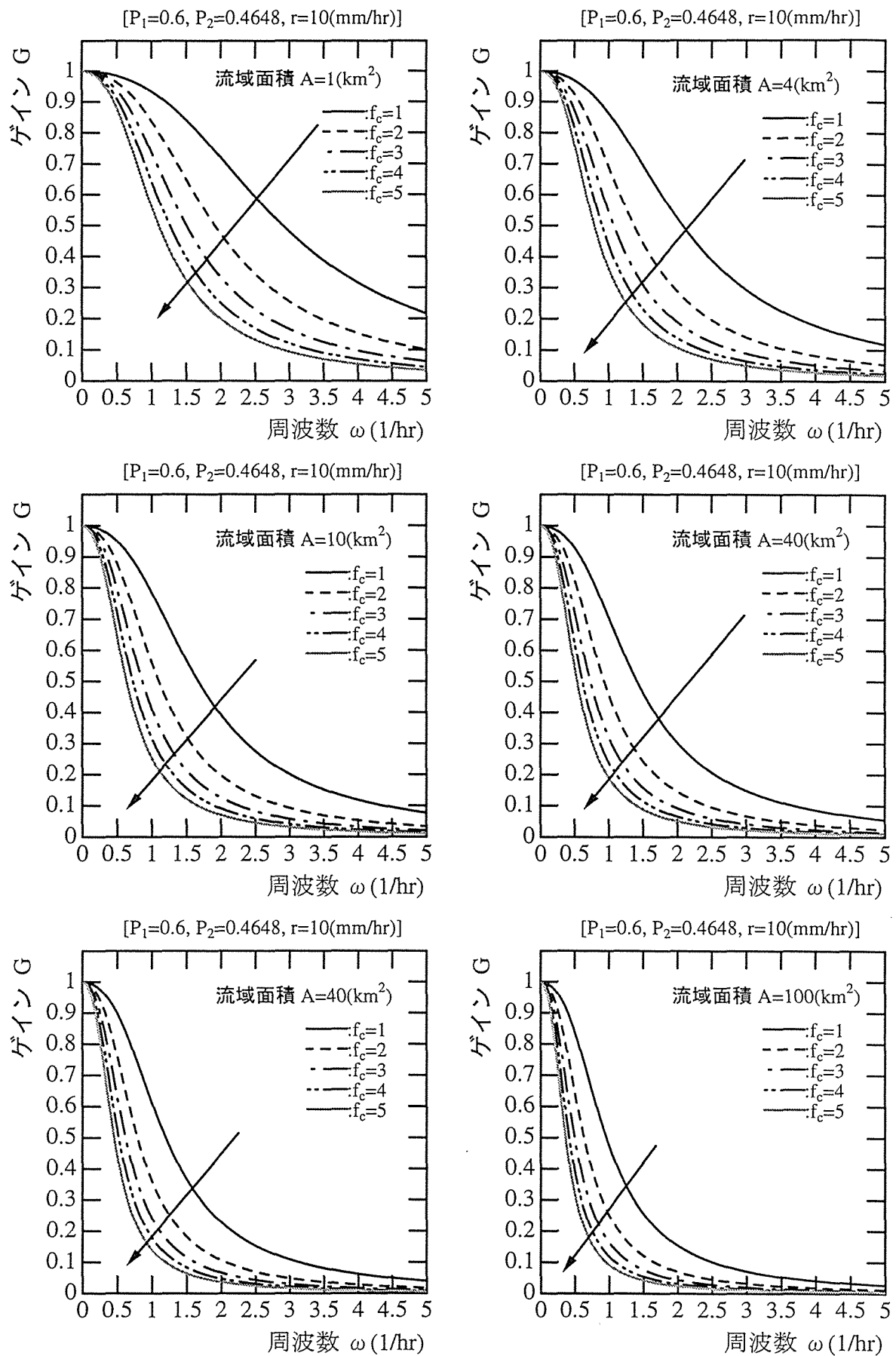


図-4.25 周波数特性に対する流域ファクター f_c の影響

4.4.3 流域の河道網の低域フィルターとしての働き

前節までは、一つの流域を対象に、その流域面積と周波数応答特性の関係について検討を加えてきた。本節では、ある流域をサブ流域に分割し、各サブ流域からの流出量を流域末端まで運搬する河道の効果を含んだ、流域全体としての低域フィルターの役割を明らかにする。

流域を分割した個々のサブ流域の周波数応答は、既に、ゲイン (式 (4.13)) と位相差 (式 (4.14)) が求められている。問題は、各サブ流域からの流出量が流域末端まで運搬される際の流出の遅れ時間とゲインの関係である。

流域面積が A_i であるサブ流域からの流出量が定常状態に達した時の流出量 $q_i(t)$ は式 (4.10) から

$$q_i(t) = \bar{r} + C_i \sin(\omega t + \phi_i) \dots\dots\dots (4.18)$$

となる。ここに、 C_i は定常状態の流出量の振幅である。サブ流域から流域末端までの流下距離を R_i とおき、流出量の伝播速度 v を一定速度に仮定すると、サブ流域の流出量 $q_{ei}(t)$ は、流域末端では以下のように表される。

$$q_{ei}(t) = \bar{r} + C_i \sin\left\{\omega\left(t - \frac{R_i}{v}\right) + \phi_i\right\} \dots\dots\dots (4.19)$$

流域が n 個のサブ流域から構成されている場合、流域末端における流量 $Q_t(t)$ は

$$Q_t(t) = \sum_{i=1}^n A_i q_{ei}(t) = \sum_{i=1}^n A_i \left(\bar{r} + C_i \sin\left\{\omega\left(t - \frac{R_i}{v}\right) + \phi_i\right\} \right) \dots\dots\dots (4.20)$$

ゲインを求めるには、流出高にしなければならないので、上式を流域面積 $A_t = \sum_{i=1}^n A_i$ で除して、

$$Q_h(t) = \bar{r} + \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{A_t} C_i \sin\left\{\omega\left(t - \frac{R_i}{v}\right) + \phi_i\right\} \dots\dots\dots (4.21)$$

となる。上式の右辺の変動成分は、展開して振幅成分 C' だけを整理すると、

$$C' = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n \frac{A_i}{A_t} C_i \cos\left(\phi_i - \omega \frac{R_i}{v}\right)\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n \frac{A_i}{A_t} C_i \sin\left(\phi_i - \omega \frac{R_i}{v}\right)\right)^2} \dots\dots\dots (4.22)$$

となり、振幅成分に位相差 ϕ_i と遅れ時間 R_i/v が含まれていることに注目して頂きたい。最終的に流域全体のゲイン G_t は、次式から求めることができる。

$$G_t = \frac{C'}{B} = \frac{1}{B} \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n \frac{A_i}{A_t} C_i \cos\left(\phi_i - \omega \frac{R_i}{v}\right)\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n \frac{A_i}{A_t} C_i \sin\left(\phi_i - \omega \frac{R_i}{v}\right)\right)^2} \dots\dots (4.23)$$

$$= \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n \frac{A_i}{A_t} G_i \cos\left(\phi_i - \omega \frac{R_i}{v}\right)\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n \frac{A_i}{A_t} G_i \sin\left(\phi_i - \omega \frac{R_i}{v}\right)\right)^2} \dots\dots\dots (4.24)$$

ここで、 G_i はサブ流域のゲインである。したがって、流域全体のゲインは、各サブ流域のゲインと位相差、河道網による遅れ時間の3者に関係していることが理解できる。なお、上式において、河道網による流出の遅れ時間を無視する場合には、伝播速度 v を無限大にすれば良い。即ち、サブ流域からの流出の遅れを無視して合成した場合の流域全体のゲイン G_S は、次式で表される。

$$G_S = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n \frac{A_i}{A_t} G_i \cos \phi_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n \frac{A_i}{A_t} G_i \sin \phi_i\right)^2} \dots\dots\dots (4.25)$$

本論文の第3章では、サブ流域の地形量が確率変動し、河道網構造も確率変動する流域からの流出量の平均値、分散等を理論的に誘導した。ここで議論している周波数応答のゲインは、式(4.9)で表される周期変動降雨を、第3章の確率微分方程式に代入して求めた流出量の平均値からも、またゲインを求めることができる。

図-4.26は、式(4.24)と3章で求めた確率微分方程式を直接解いて求めたゲインを比較した結果である。計算条件は図中に記載している。上図が河道網による流出の遅れを無視し、サブ流域からの流出量を合成した場合で、下図が平均的な河道網 $C(m, j)$ による流出の遅れを考慮した場合である。両者ともに、サブ流域の地形量、具体的には流域面積の確率分布は互いに独立であるとの条件で計算を行なっているので、ほぼ一致した結果を得ている。若干、両者に差がみられるのは、式(4.24)の計算は確率微分方程式との比較のためにシミュレーション法を用いているので、シミュレーションによって得られた流域面積の統計量と、確率微分方程式に与えた流域面積の統計量との差が、このゲインの違いになっているものと考えられる。

確率微分方程式を直接解いてゲインを求める手法は、従来、流出量などの確率変動量を推定する際に用いたシミュレーションに付きまとう、与えた確率統計量と実際にシミュレーションから得られた統計量に差が生じてしまうというシミュレーション法の曖昧な面を払拭する大変有用な手法ということになる。なお、実流域を対象にする場合には、式(4.24)から流域のゲインを容易に算定することができる。

図-4.26において、上図はサブ流域におけるゲイン特性を示していて、マグニチュードが大きくなって流域が細分化されるほど、ゲインの低下は少ない。一方、下図の河道網による流出の遅れの効果を考慮した流域全体のゲイン特性とみると、マグニチュードに依らず、ほぼ同じゲイン特性を示している。これは、サブ流域からの流出量が河道網という低域フィルターを通過することによってゲインが低下し、その低下の割合はマグニチュードが大きく河道網構造が複雑になるほど大きいことになる。したがって、この河道網による低域フィルターの働きを定式化しておく必要がある。

サブ流域からの流出量が定常状態に達したときの流出量 $q_i(t)$ を河道網に対する入力値と

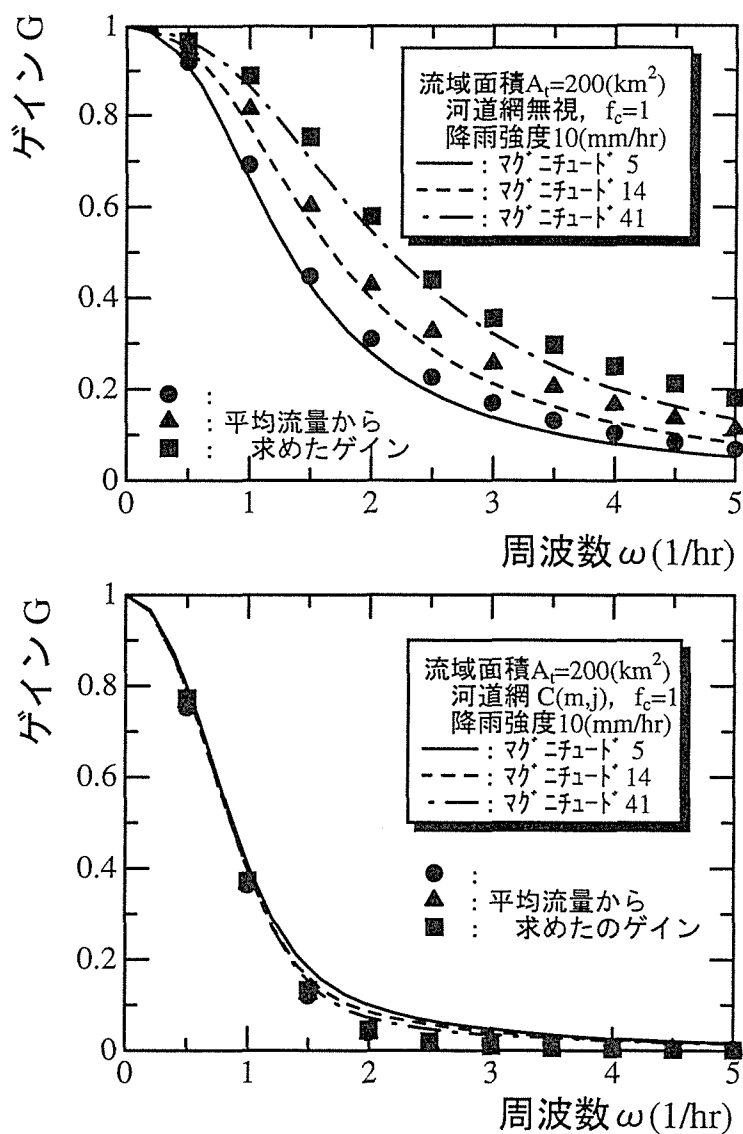


図-4.26 式(4-24)と平均流量から得たゲインの比較

考え、ここでは簡単に振幅が1の波形とする。

$$q_i(t) = \sin(\omega t) \dots\dots\dots (4.26)$$

とおくと、各サブ流域の流域末端における流出量 $q_{ei}(t)$ は

$$q_{ei}(t) = \sin\left\{\omega\left(t - \frac{R_i}{v}\right)\right\} \dots\dots\dots (4.27)$$

となる。流域が n 個のサブ流域から構成されている場合、流域全体の流量 $Q_t(t)$ は

$$Q_t(t) = \sum_{i=1}^n A_i q_{ei}(t) = \sum_{i=1}^n A_i \sin\left(\omega t - \omega \frac{R_i}{v}\right) \dots\dots\dots (4.28)$$

となる（出力値）ので、（出力値／入力値）の比から河道網によるゲイン G_L を求めることにすると

$$G_L = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{A_t} \sin\left(\omega t - \omega \frac{R_i}{v}\right) \dots\dots\dots (4.29)$$

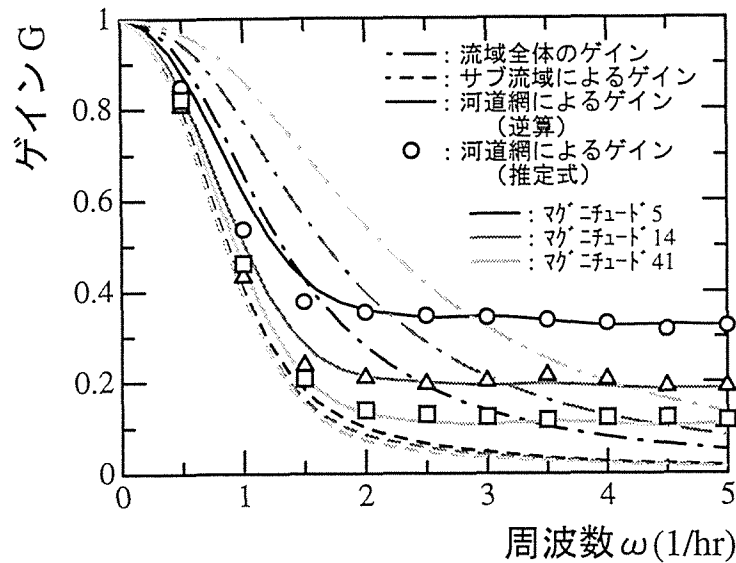


図-4.27 河道網によるゲインの特性

となる。

降雨流出システムは図-4.21 に示したような非線形システムであるが、仮に線形システムに近似して考えると、流域全体のゲイン G_t はサブ流域の降雨-流量変換系のゲイン G_s と河道網における運搬・合成による流出遅れのゲイン G_L の積で表されることになる¹⁵⁾。図-4.27 は図-4.26 に示す G_t と G_s の比から逆算した河道網によるゲインと式 (4.29) による結果を比較したものである。概ね両者は良く一致しており、流域全体の低域フィルター特性はサブ流域によるフィルターと河道網によるフィルターが連結した線形システムで近似でき、各ゲインの積によって流域全体のゲインを得ることができることを示している。したがって、流域末端における流出量は、各フィルターのバランスによって決定されるべきであり、自ずと各フィルター特性から得られる最適な流域スケールが決定される。

以上のように降雨流出系の周波数応答特性から最適な流域スケールを導く方法の方向性は示されたが、その具体的な検討に入る前に、まず、流域全体としての周波数応答特性と流域面積、サブ流域面積あるいは流域の分割数、河道網の違いによる影響について、第2章で得られた平均的な流域特性量をもつ仮想的な流域を対象に検討しておくことにする。

解析に先立ち、まず、仮想的な流域の地形特性量について若干触れておく。ここでは、流域の面積が変化した場合の、流域末端における流量の周波数応答を検討するものである。したがって、この検討に用いる地形量の特性は、分割したサブ流域の平均流域面積が同じ場合には、サブ流域面積の分散や、サブ流域の平均リンク長やその分散も同程度であることが望ましい。今回検討に用いた地形量の特性は、第2章で地形量解析した結果を全て集めて平均化した地形量を用いた。図-4.28 は、平均リンク長、リンク長の分散と流域面積の分散を、

平均流域面積に対してプロットした図で、解析には図中に示す回帰式の関係を利用した。

ここでは 50, 100, 200, 300, 400, 500(km²) の 6 通りの流域面積を持つ仮想的な流域を対象に、流域を分割してサブ流域のサイズを小さくしていった場合の流域末端流量での周波数応答特性を検討する。なお、計算条件として、降雨波形は式 (4.9) で表される周期波形を与え、平均降雨強度は 10(mm/hr) である。流域ファクターは $f_c=1.0$ の場合で、河道における流量の伝播速度は $v=2$ (m/sec) である。

流域の河道網構造は、次の 3 種類の河道網パターンを検討した。図-4.29 が与えられたマグニチュードの考えられる全ての河道網パターンを考慮した場合で、図-4.30 がそれを平均化した河道網パターン $C(m, j)$ を用いた場合、最後の図-4.31 は第 2.2.3 節で提案した骨格の河道網から河道網が発達していく場合で、各々流域末端流量の周波数応答特性を示している。図中で、○, □, △の記号が付いているのが、河道による流出の遅れを無視し、サブ流域での流出量への変換と流域末端での流出量の合成によるフィルターを通過した場合のゲイン G_s で、記号の付かない線群が河道による流出の遅れも考慮した流域末端流量のゲイン G_t で、いずれのゲインも平均値を表示している。

これらの図を眺めると、河道の遅れ効果を無視したサブ流域によるゲイン G_s は、サブ流域の平均流域面積が同じであると、全体の流域面積が異なってもほぼ同じゲイン特性を示している。一方、流域末端でのゲイン G_t は、流域面積が 200(km²) 以上の場合、マグニチュードによってサブ流域によるゲイン G_s には差があるものの、河道による遅れの効果を考えた場合は流域のマグニチュードによらずほとんど同じ周波数応答特性を示している。

では、河道網における流出の遅れによるフィルターのゲイン特性 (G_L) について、3 種類の河道網パターン毎に図-4.32~4.34 に示す。これらの図から河道網によるゲイン G_L はマグニチュードが大きくなって河道網が複雑になるほどゲインの損失が大きく、全体の流域面積が大きくなるほど $\omega=1$ 付近までに急激にゲインが低下することが分かる。この河道網によるゲインは流量の伝播速度 v に影響され、 v を大きくしていくと、ゲイン G_L は次第に大きくなり、やがて $v = \infty$ になると $G_L=1$ となって、河道網による損失がないことになる。

また、図-4.35 は河道網パターンの取り扱いの違いを比較してみたものである。本研究では河道網の効果を評価するために、与えられたマグニチュードに対する全ての河道網パターン、その平均的な河道網パターン ($C(m, j)$)、あるいは骨格をなす河道網パターンを提案しているが、その違いについてゲイン G_L の特性から比較検討する。ここでは、流域面積が 50(km²) と 200(km²) について、河道網パターンの違いによる影響を比較しているが、全ての河道網パターンを考慮した場合とその平均的な河道網パターン $C(m, j)$ は G_L , G_t に大きな違いはみられない。特定の骨格をなす河道網パターンは他と比較するとややゲイン G_L が大きくなっているが、流域末端流量のゲイン G_t を比べると、大差がない。この違いは流域

面積が大きいほど少ない。したがって、本来は全ての河道網パターンを考慮すべきであるが、3者の中で最も取り扱いが容易であり、流域面積の影響をあまり受けない平均的な河道網パターン $C(m, j)$ を用いて、一般的な流域における河道網の低域フィルターとしての特性を検討することが得策である。

以上、まとめると、流域面積が $200(\text{km}^2)$ を越える規模の流域は、分割数が 80 程度までは、いずれの分割でも河道による流出の遅れ効果の方が支配的で、サブ流域によるゲインの違いが流域末端流量のゲイン G_t の違いにはならず、分割による流出特性に対する違いが顕著ではない。つまり、ゲイン G_t の周波数応答特性から流域の流出特性をみた場合、流域分割による影響がないように思えるが、個々にサブ流域によるゲイン G_s と河道網によるゲイン G_L をみると、流域の分割数によってかなり差が大きい。したがって、両者のゲインがバランス良く同程度のゲインとなる流域分割数（サブ流域サイズ）が、最適な分割数と考えられる。

次に、この流域分割の影響が周波数応答特性に比較的良く現れているのは流域面積が $100(\text{km}^2)$ 以下の場合である。この場合、サブ流域によるゲイン G_s は分割によってサブ流域スケールが小さくなり、分割数に対してかなり幅の広いゲイン特性を示している。一方、河道網によるゲイン G_L は、流域面積が小さいと流路長も短くなるためにフィルターがあまり作用せず、流域全体としてはサブ流域によるゲイン特性の影響を強く受ける結果となる。

また、 $200(\text{km}^2)$ の流域をもう少し詳細に見てみると、 $\omega=\pi/2$ 、すなわち、 $\Delta t=2(\text{hr})$ 以上の高周波成分は大部分がカットされているので、実際の降雨量観測で用いられている $\Delta t=1(\text{hr})$ のデータを用いた流出解析では情報過多の解析になり、無駄が多いということが、この周波数応答解析結果から理解できる。もし、 $\Delta t=1(\text{hr})$ のデータを有効利用するためには、サブ流域サイズをもっと小さくする必要があることを意味している。

以上の結果は、一様な矩形降雨が降り続くと言う極めて限られた条件の下で得られたものである。したがって、次節では実降雨に近い三角形降雨を対象に同様な検討を行う。

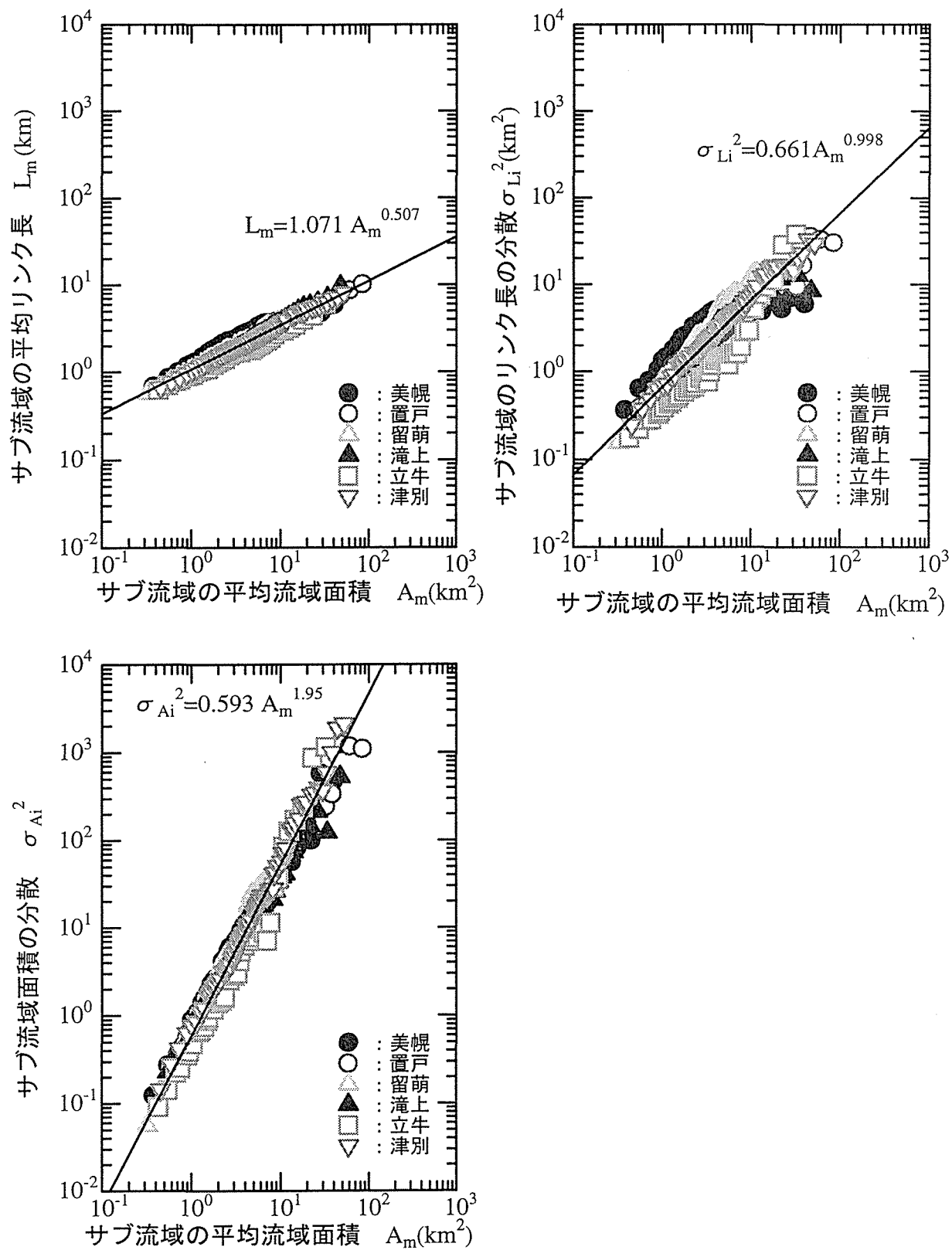


図-4.28 計算に用いた平均的なサブ流域地形量

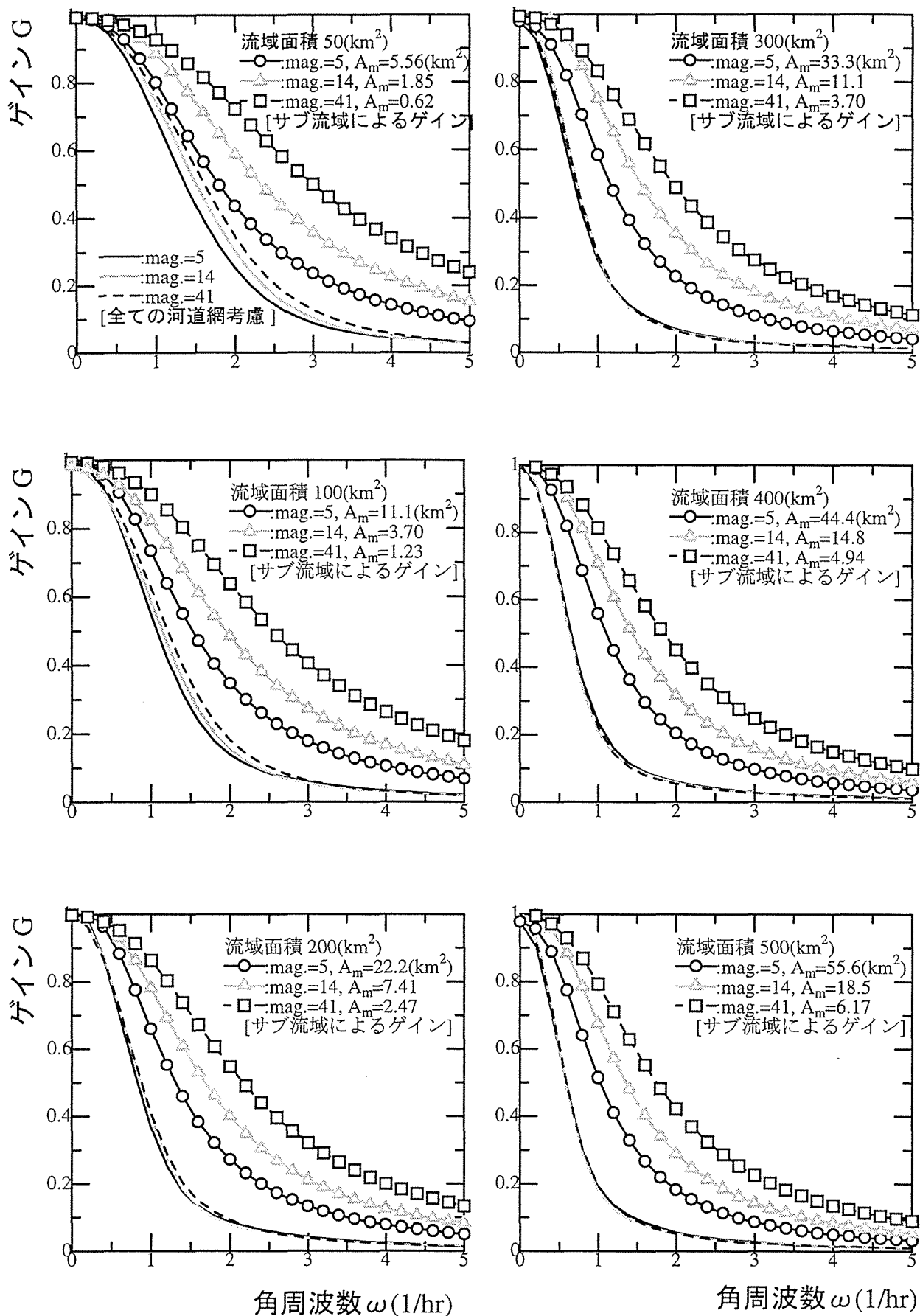


図-4.29 全ての河道網パターンを考えた流域末端流量の周波数応答特性

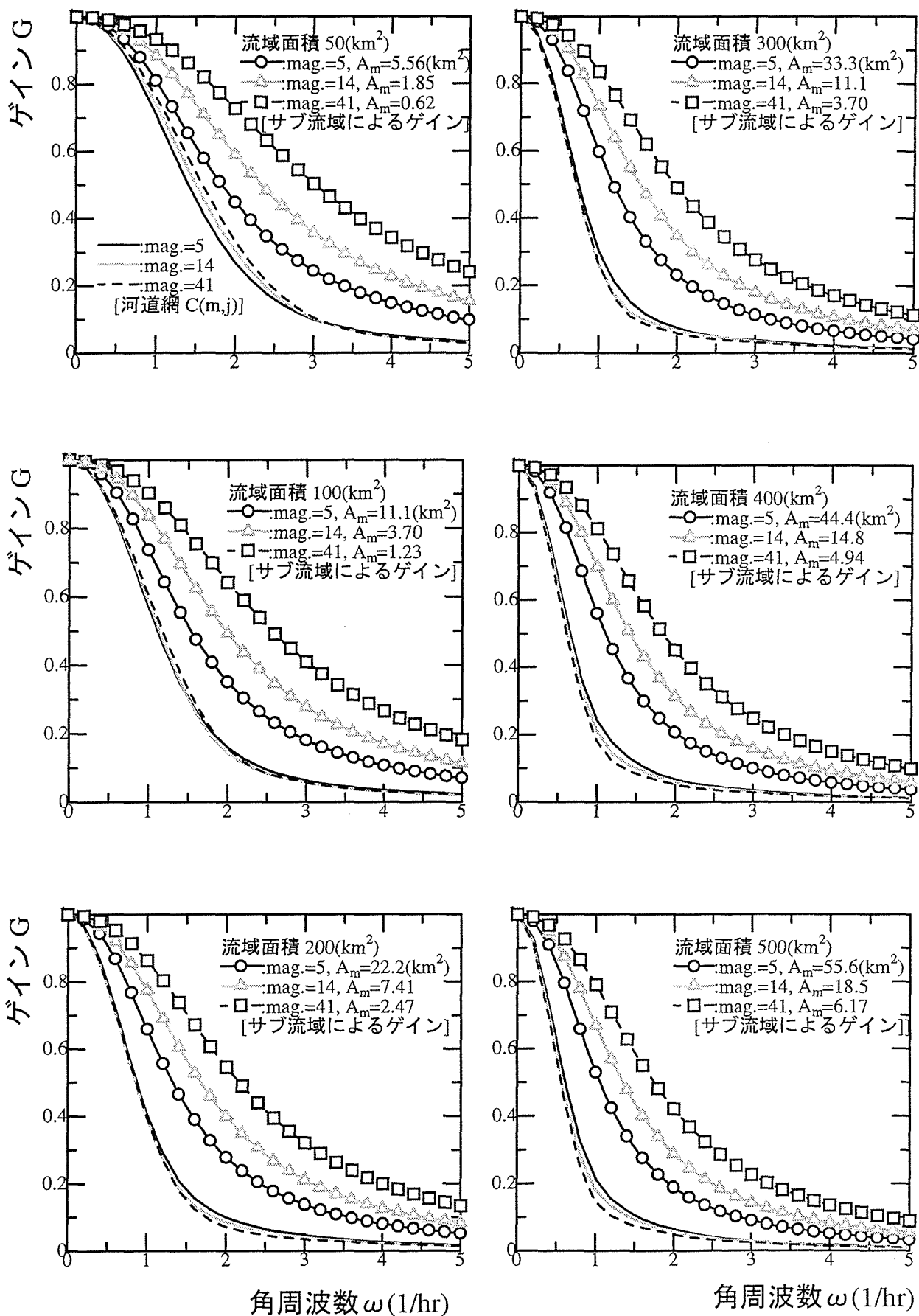


図-4.30 平均的な河道網 $C(m, j)$ の流域末端流量の周波数応答特性

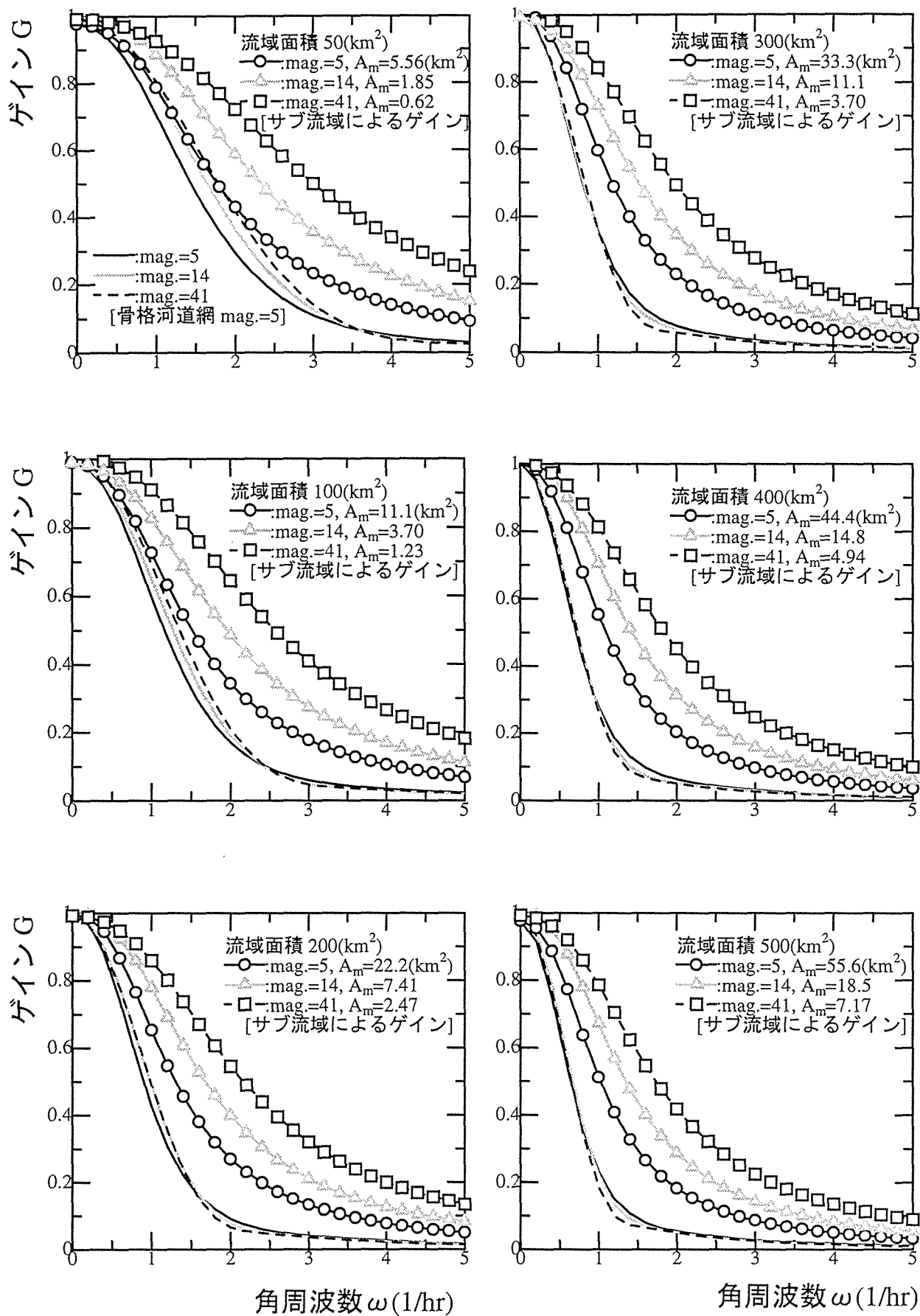


図-4.31 マグニチュード5の骨格河道網から細分化する河道網の流域末端流量の周波数応答特性

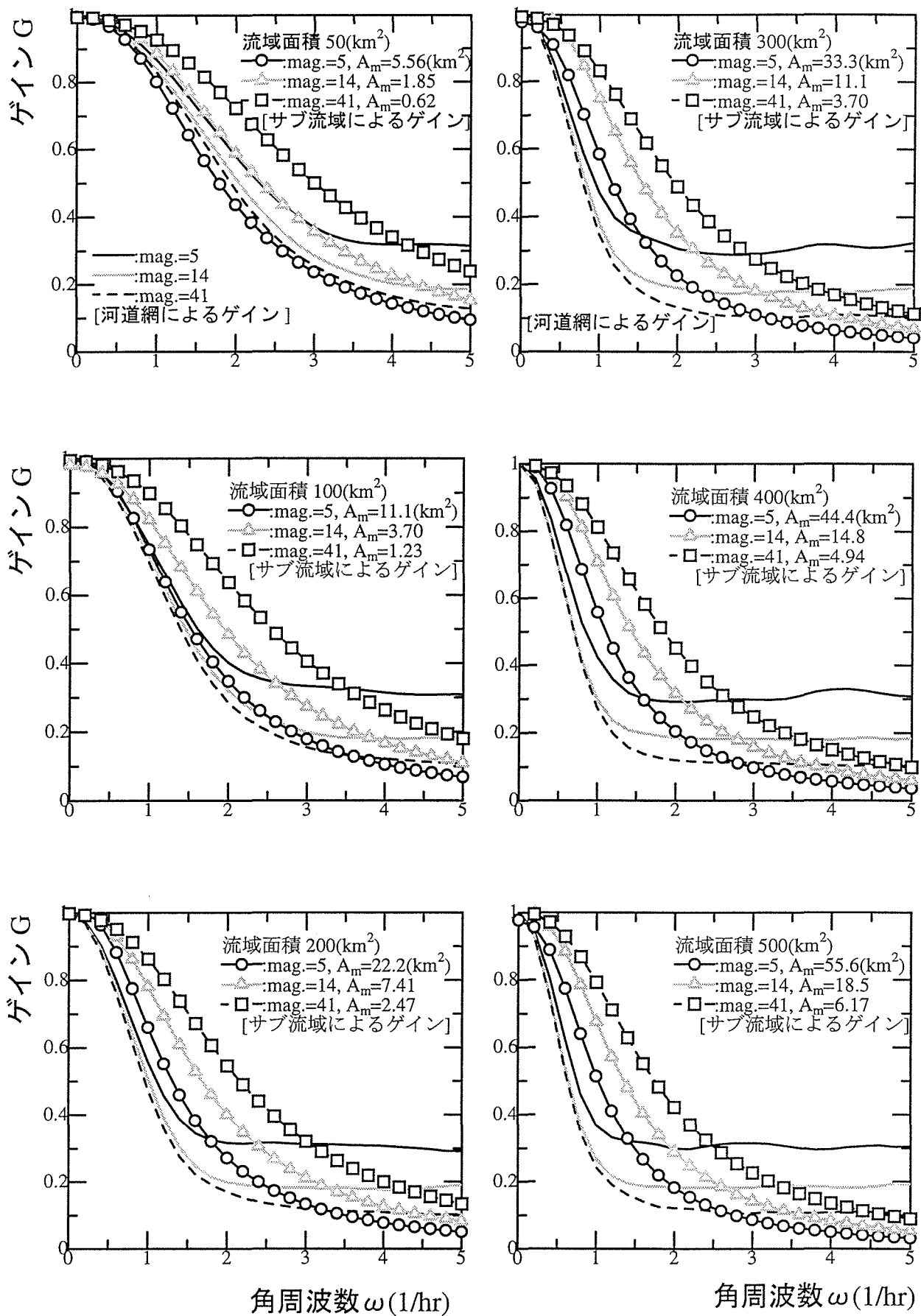


図-4.32 全ての河道網パターンを考えた河道網による周波数応答特性

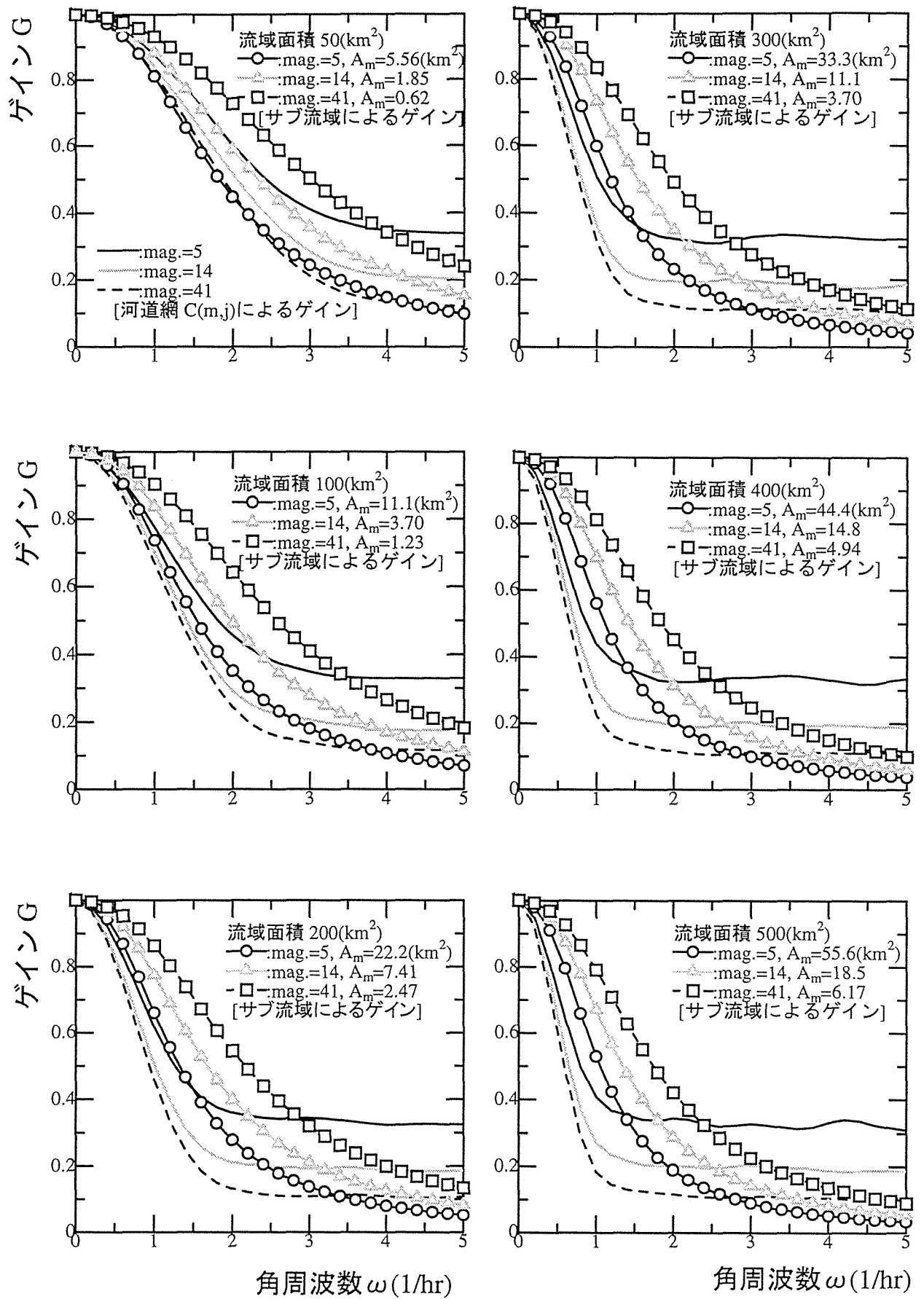


図-4.33 平均的な河道網 $C(m, j)$ による周波数応答特性

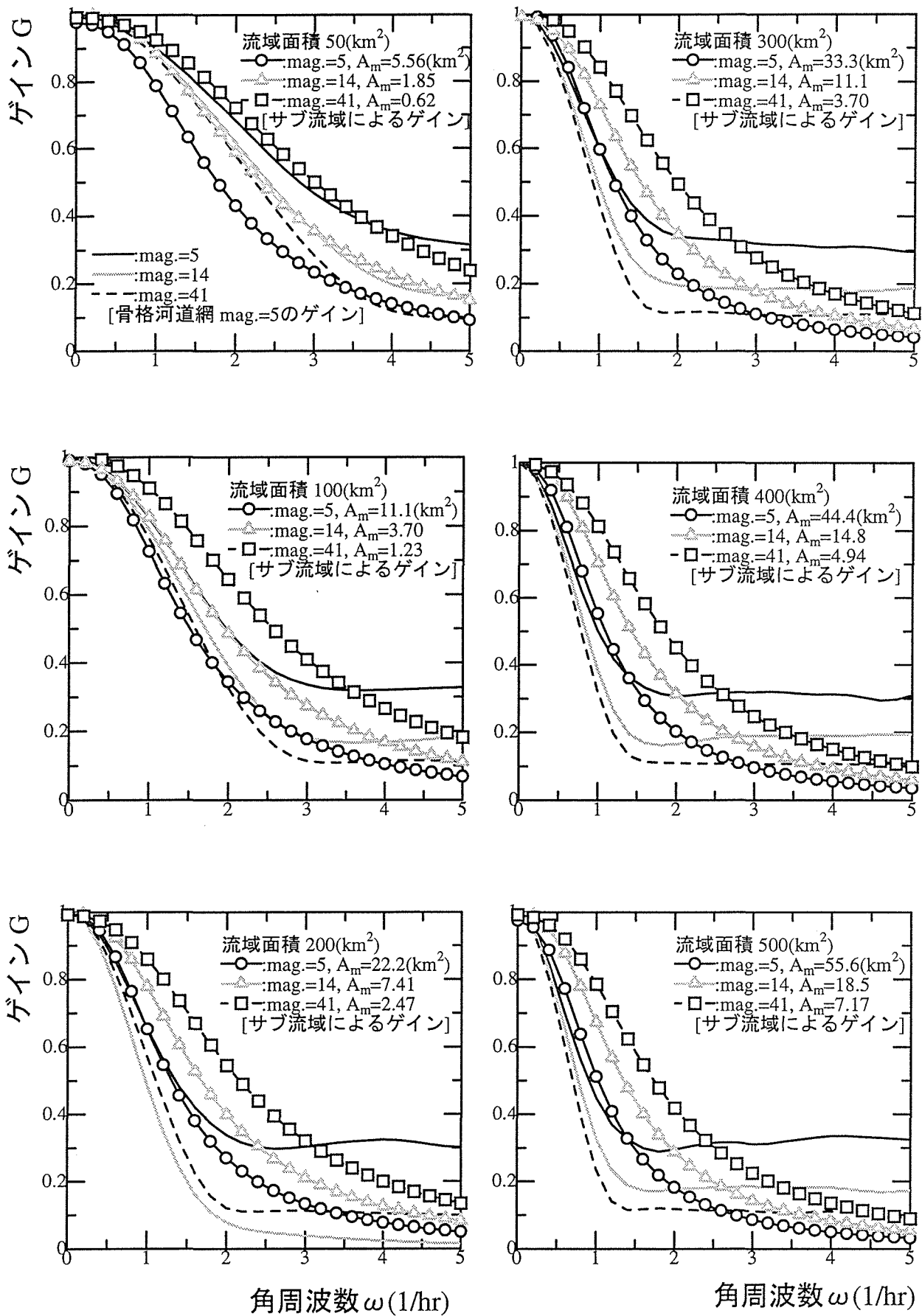


図-4.34 マグニチュード5の骨格河道網から細分化する河道網による周波数応答特性

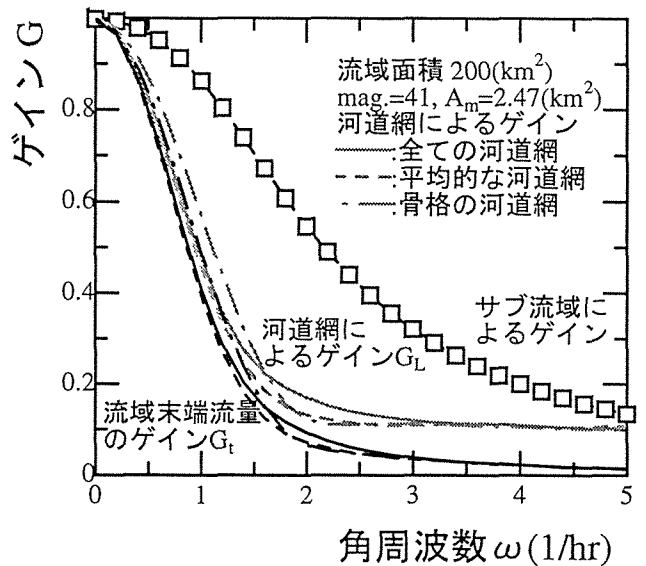
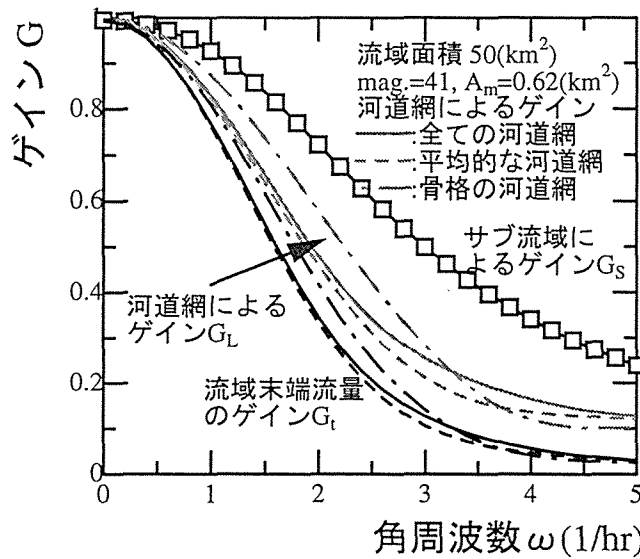
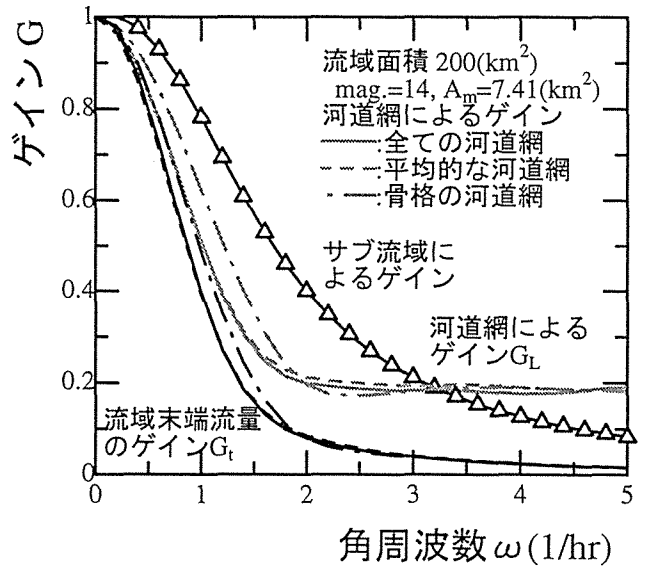
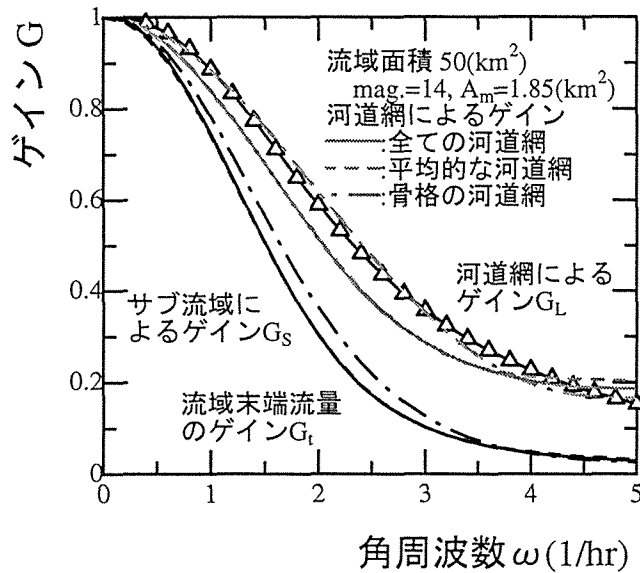
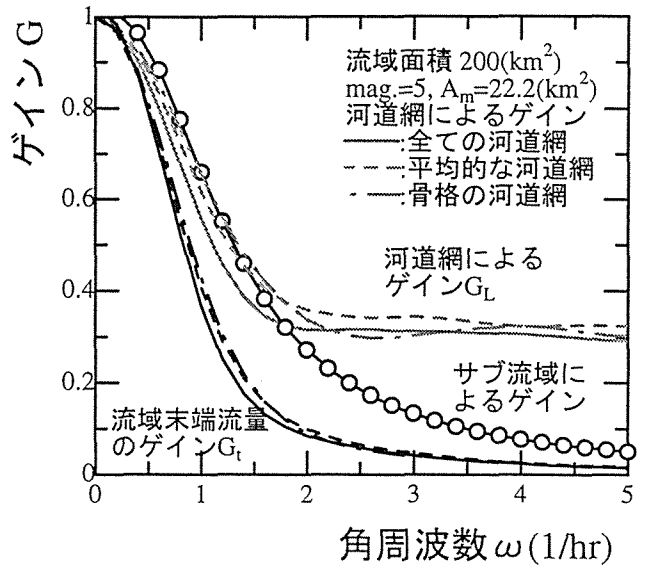
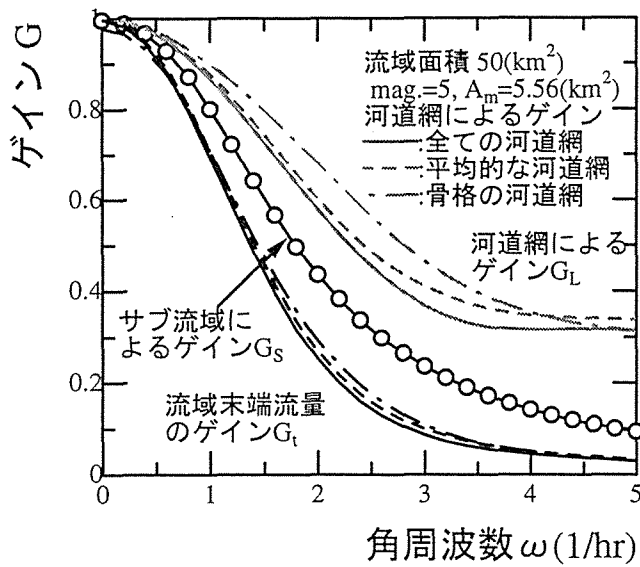


図-4.35 河道網パターン分類の違いによる流域末端流量の周波数応答特性

4.4.4 三角形降雨波形に対する周波数応答特性

4.4.1 節で誘導したゲインと周波数の関係式，式 (4.13) は一定降雨 \bar{r} の周りで周期変動する降雨を対象に導かれた式である．本節では，より実際の降雨波形に近い三角形降雨波形の場合においても式 (4.13) が適用可能かを検証する．

星の貯留関数法は非線形システムであるために，貯留係数 K_2 と貯留指数 P_2 は，流域地形のみならず，降雨波形の形状にも影響を受けている．星は三角形波形降雨に対する最適なパラメータを同定している¹⁹⁾．結果を以下に示す．

[三角形降雨波形の場合]

$$K_1 = 2.823 f_c^{0.6} A^{0.24} \dots\dots\dots (4.30)$$

$$K_2 = 2.56 k_2 K_1^2 \bar{r}^{0.2-p_2} \dots\dots\dots (4.31)$$

$$P_1 = 0.6 \dots\dots\dots (4.32)$$

$$k_2 = a_1 \exp\{a_2(t_1/t_2)\} (5/3) \sum_{i=1}^4 b_i (t_1/t_2)^{i-1} \dots\dots\dots (4.33)$$

$$p_2 = c_1 \exp\{c_2(t_1/t_2)\} (5/3) \sum_{i=1}^4 d_i (t_1/t_2)^{i-1} \dots\dots\dots (4.34)$$

$$a_1 = 0.0683, a_2 = 0.3214, b_1 = -0.1137, b_2 = 0.7546, b_3 = 1.3822, b_4 = -2.0452$$

$$c_1 = 1.3536, c_2 = -0.4673, d_1 = -1.3484, d_2 = -1.5574, d_3 = 2.7270, d_4 = -1.9907$$

ここに， f_c :流域ファクター ($= N/\sqrt{s}$)， N : 等価粗度係数 (m-sec 単位)， s : 斜面勾配， \bar{r} : 平均降雨強度 (mm/hr)， t_1 : 降雨のピーク時間， t_2 : 降雨の継続時間である．

今回は図-4.36 に示す定常な三角形降雨波形の上に，正弦波の成分を加算した降雨波形を与えて，流域の周波数応答を調べる．なお，降雨波形のベース部に下駄を履かせたのは，変動成分によって負の降雨が生じないようにしたためである．

周波数応答解析は通常，出力が定常状態に達したところで，波形の振幅を比較する手法である．しかし，三角形波形の場合には，降雨の継続時間が短い場合はどの状態で定常なのかの判断が難しい．図-4.37 は継続時間が $t_2=20$ (hr)，降雨のピーク時刻が $t_1=10$ (hr)，算術平均降雨強度が 10(mm/hr) の三角形降雨の条件で計算したハイドログラフである．上の図の実線が定常降雨によるハイドログラフで，破線が降雨の変動成分を含んだハイドログラフである．両者の差が降雨の変動成分による流出量成分である．周波数が $\omega=1\sim5$ まで変化した時の流出量の変動成分が下の図に整理されている．この図から，流出量の変動成分は降雨のピーク時付近で最大の振幅を示している．ただし，この傾向は，降雨の継続時間が短くなり，低周波数の領域ではうまく振幅を求めることができない場合もある．

図-4.38 は 4.4.2 節で提案したゲインの関係式に，補正を加えた K_2, P_2 を使い，平均降雨強度として算術平均降雨強度を代入して求めた値と，三角形波形をシステム方程式に代入し

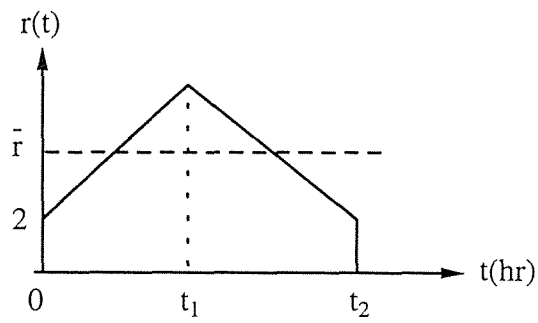


図-4.36 計算に用いた三角形降雨波形

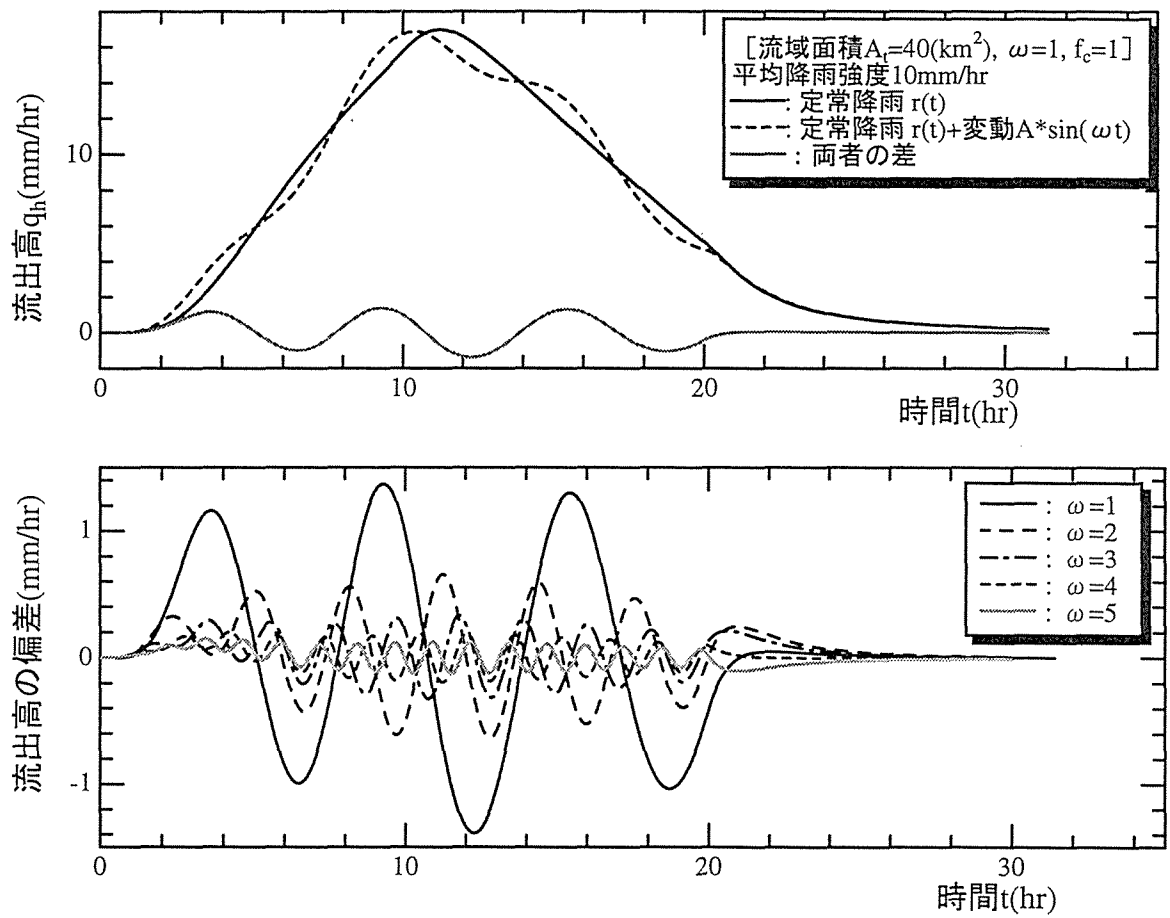


図-4.37 三角形降雨の流出ハイドログラフ

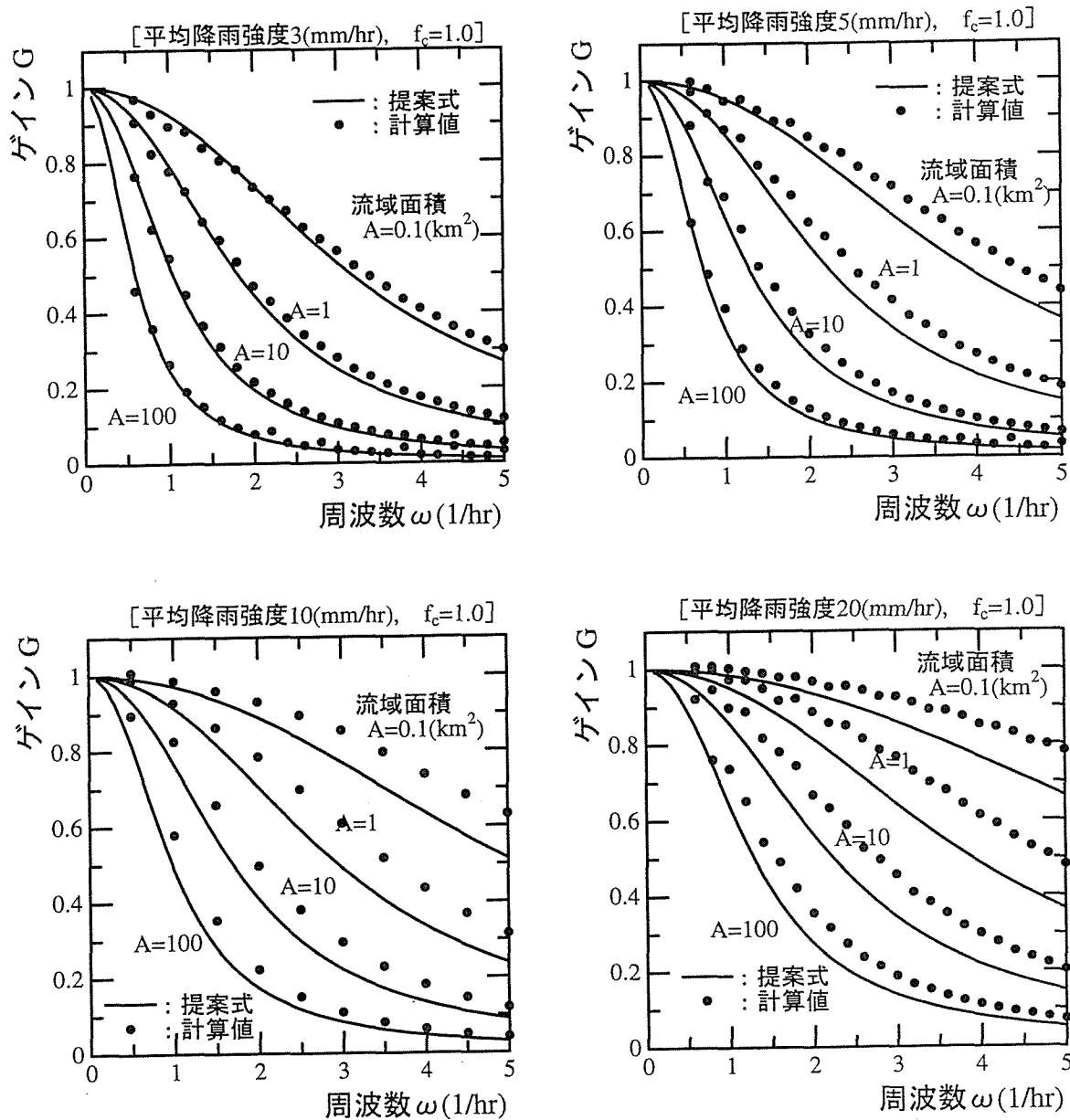


図-4.38 三角形降雨による周波数応答特性

て解いたゲインを比較した図である。三角形波形降雨の場合にも、式(4.13)はかなり良い一致を見せている。降雨強度が強くなる場合と流域面積が小さくなる場合に適合性が悪くなる傾向がみられる。

この差を改善するために、三角形降雨波形の平均降雨強度を少しずつ変えて、最も良く一致する平均降雨強度を求めてみた。図-4.39は流域面積が40(km²)の場合の検討結果である。算術平均より4(mm/hr)をプラスした場合が最も計算値に一致していた。これは降雨のピーク値の8～9割近くの値であり、ピーク値に近い降雨強度が必要であった。この理由として、ゲインを求めた地点が降雨のピーク値付近の流量であったことが影響しているようである。

次に、三角形降雨波形の形状、すなわち、降雨のピーク値の位置等によって、得られる周波

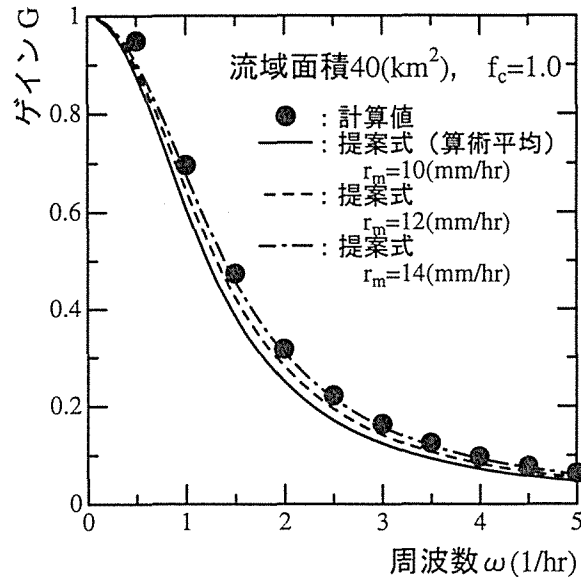


図-4.39 三角形降雨の平均降雨強度による式 (4-13) の改善

数応答特性に影響があるのかを検討した．図-4.40 の左図は算術平均降雨強度が 10(mm/hr) で，中央にピーク値を持つ波形で，降雨の継続時間が異なる場合の比較である．右図は平均降雨強度と継続時間が一緒で，ピーク値の位置が異なる場合である．左図から，降雨継続時間の影響は，流出量が定常に落ち着く時間より短い場合に，ゲインのバラツキが目につく程度でありあまり影響していない．右図の降雨波形のピーク値の位置の違いの影響は，後にピークがくる波形の方が計算値との誤差が大きくなる傾向がみられる．これも，ピーク後にすぐ雨が止んでしまうので，流出量が定常に達する前に減水してしまうためと考えられる．

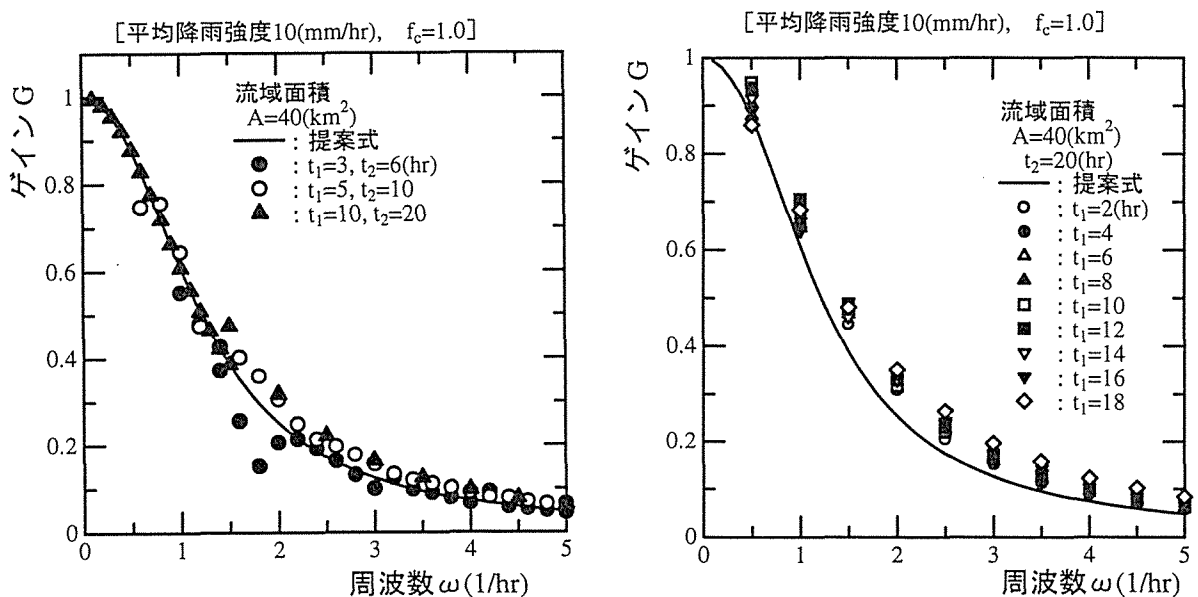


図-4.40 三角形降雨波形の形状の影響

最後に、矩形降雨波形の場合と同じように、流域末端での流量の周波数応答特性と流域面積、サブ流域面積あるいは流域分割数、河道網パターンの違いによる影響について検討する。流域の地形量特性量は矩形降雨波形と同じとし、降雨波形を実測降雨波形に近い三角形降雨波形を与えた。降雨波形は降雨のピーク時間 t_1 が 5(hr)、継続時間 t_2 が 10(hr) の三角形波形で、平均降雨強度 \bar{r} は 2(mm/hr) である。また、流域ファクター $f_c=3$ 、河道における流量の伝播速度は $v=2$ (m/sec) である。

前節において、河道網として全ての河道網パターンでなく平均的な河道網パターン $C(m, j)$ を対象にすれば十分であるとの結論から、図-4.41 は平均的な河道網パターンによる周波数応答特性を示している。図-4.30 の矩形波形の場合と比較すると、マグニチュードが大きくサブ流域のスケールの小さい方が、流域末端流量のゲイン G_t の損失は少ない傾向がみられる。この傾向は全体の流域面積が大きくなるとサブ流域スケールによるゲインの差が小さくなり、一方で河道網による効果が卓越してくることを示している。概ね流域面積が 200(km²) 以上になると河道網の効果が支配的になっている。

次に、河道網によるゲイン G_L とサブ流域によるゲイン G_S が図-4.42 に示されているが、矩形波形の図-4.33 と比べると、 G_S が G_L より小さくなっている。これは三角形降雨の計算条件として、できるだけ実際降雨に近い条件を与えたためである。つまり、サブ流域によるゲイン G_S は降雨条件に強く影響されるが、河道網によるゲイン G_L はその影響を受けていない。したがって、サブ流域の最適な流域スケールは降雨条件によって左右されることが予想される。

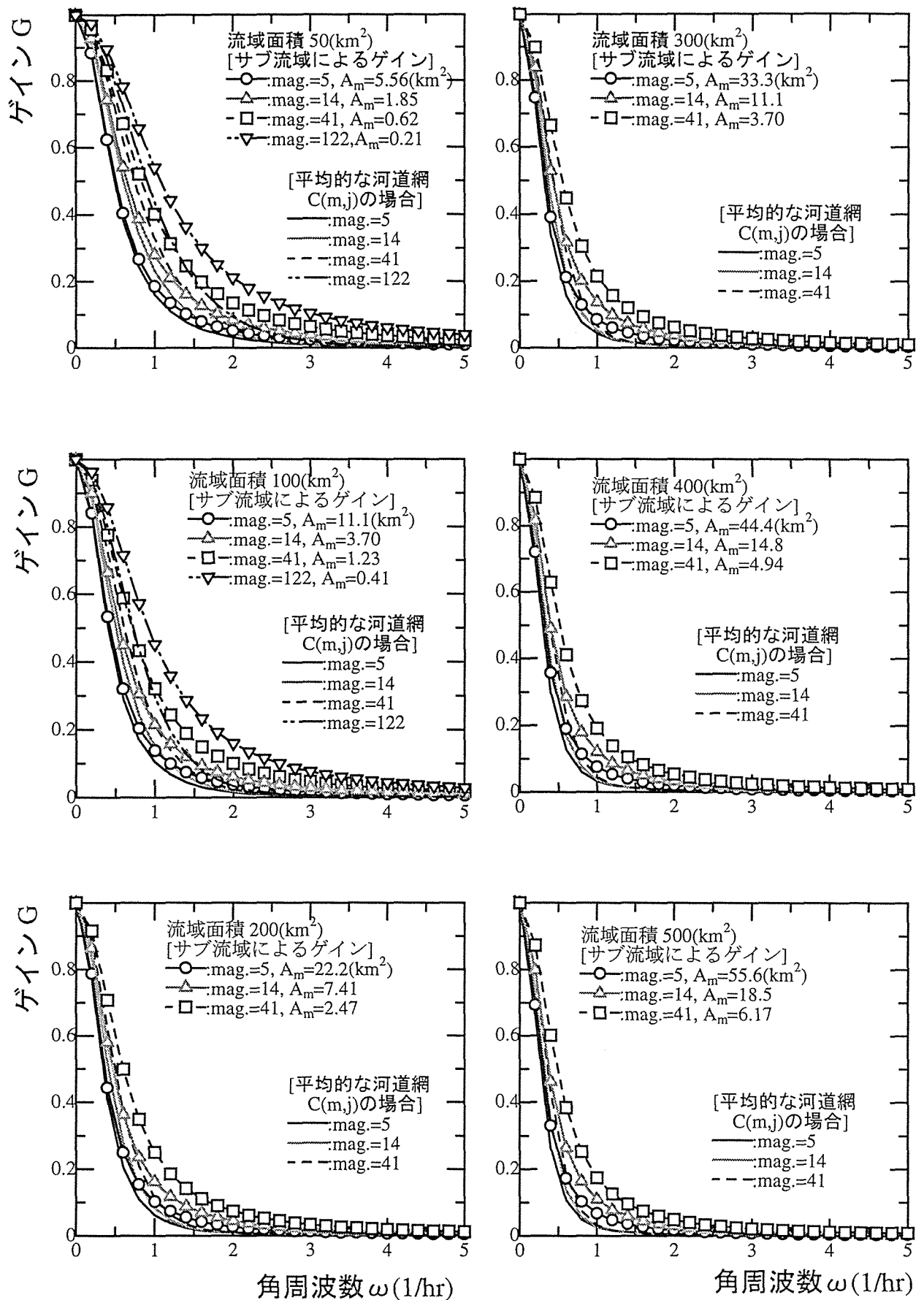


図-4.41 平均的な河道網 $C(m, j)$ の流域末端流量の周波数応答特性 [三角形降雨波形, $\bar{r} = 2(\text{mm/hr}), t_1 = 5(\text{hr}), t_2 = 10(\text{hr})$ の場合]

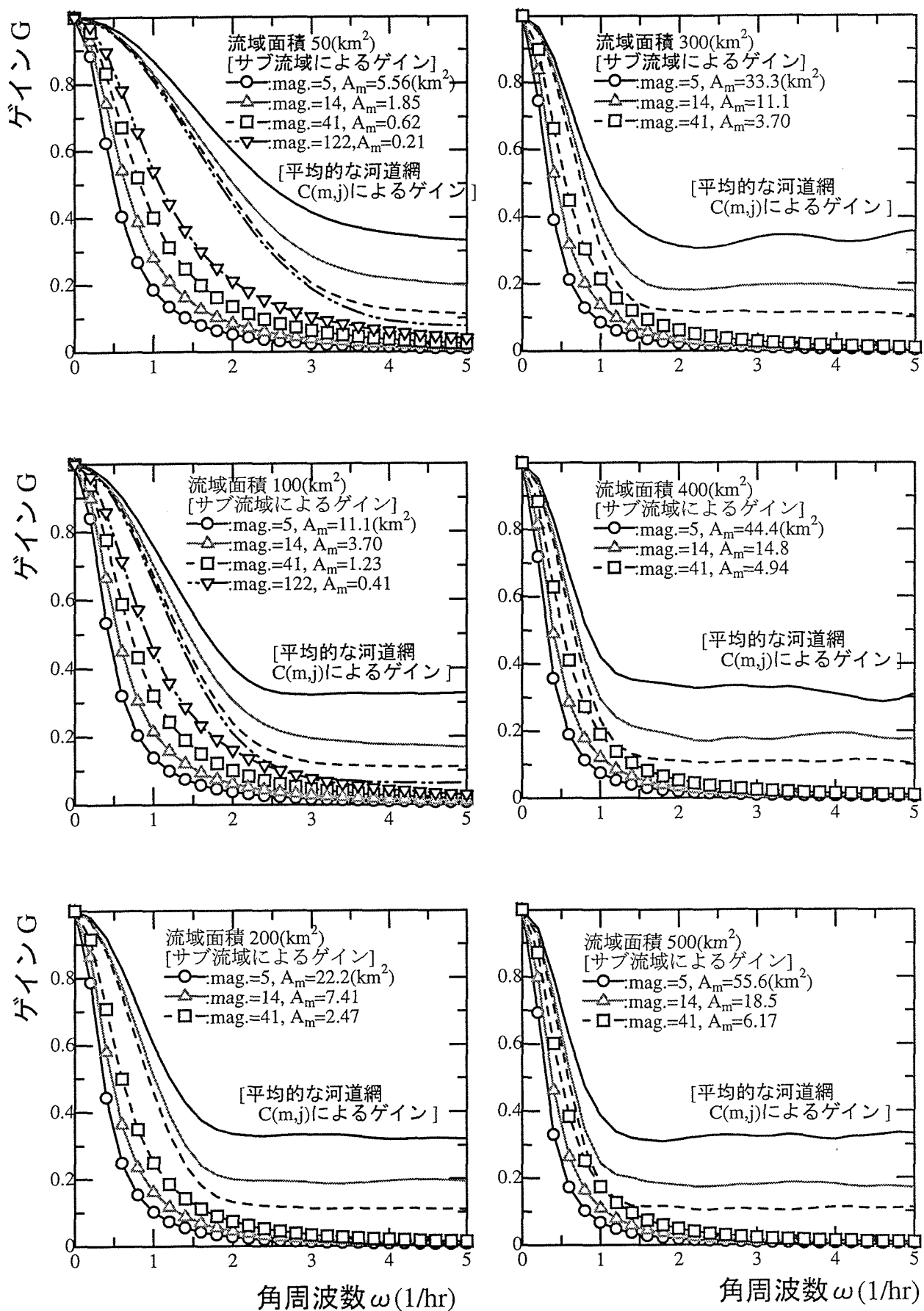


図-4.42 平均的な河道網 $C(m,j)$ による周波数応答特性 [三角形降雨波形, $\bar{r} = 2(\text{mm/hr}), t_1 = 5(\text{hr}), t_2 = 10(\text{hr})$ の場合]

4.4.5 流域の周波数応答特性から導かれる流域スケール

前節までの検討結果から、流域が低域フィルターとして作用する場合に、そのフィルターの特性は流域を構成しているサブ流域における降雨－流量の変換システムに起因する低域フィルターと、そのサブ流域からの流出量を流域末端へ運搬・合成する河道網システムに起因する低域フィルターからなることを示した。

この関係を各々のゲイン G_t, G_S, G_L を用いて概念的に表したのが図-4.43 である。ここで、降雨流出システムを線形システムに近似すると、流域全体のゲイン G_t はサブ流域によるゲイン G_S と河道網によるゲイン G_L の積で表される。もし、河道網による流出の遅れが無い場合には $G_L=1$ (左図) となって、 $G_t=G_S$ となる。また、右図のようにサブ流域のスケール

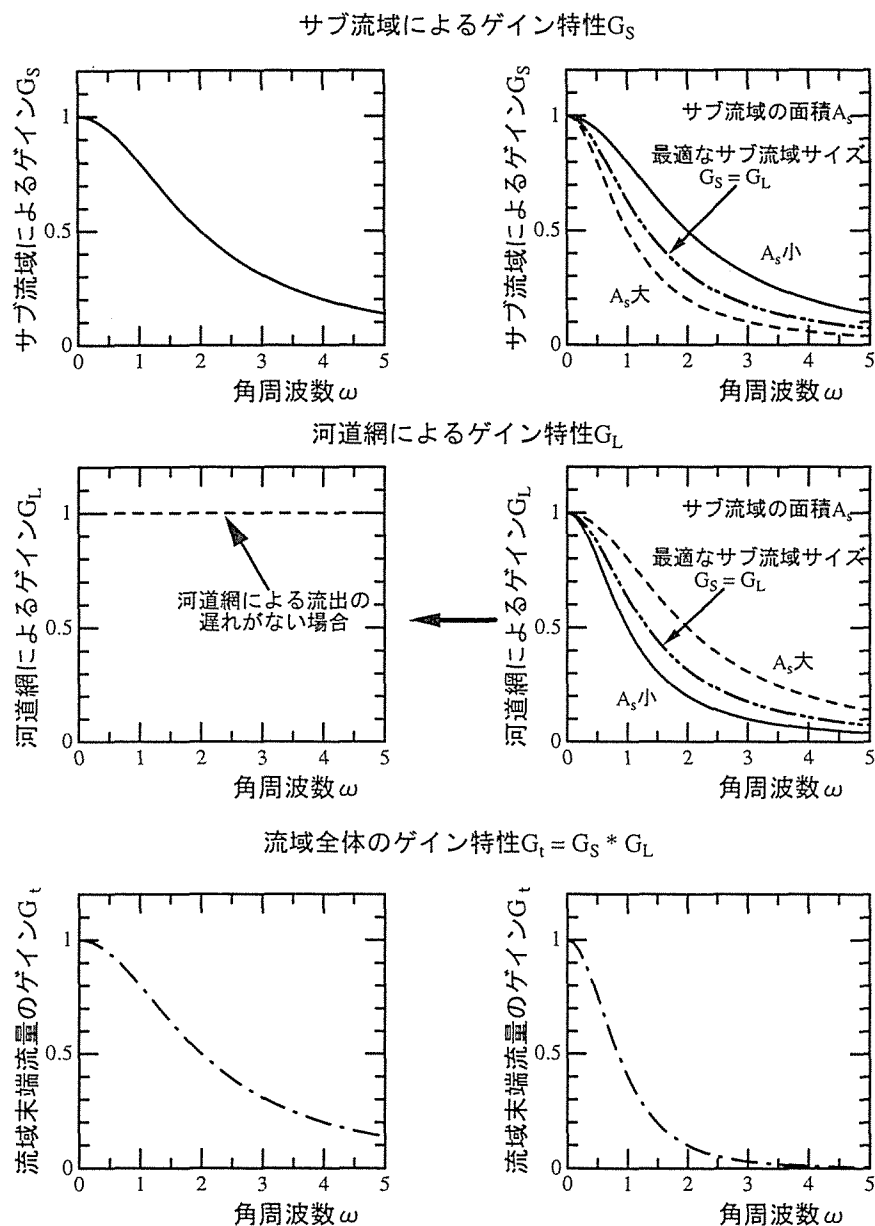


図-4.43 降雨流出システムにおける流域の低域フィルターの概念図

が小さいときには、 G_S は大きい、河道網による G_L は小さく、サブ流域スケールが大きくなると、逆に G_S は小さく G_L が大きくなる。この G_S と G_L の組み合わせによって得られる流域全体のゲイン G_t が何れの場合も同じであるなら、 G_S と G_L が等しい場合が最適であると考えられる。これは、どちらか一方のゲインが小さい場合には、その段階で入力情報の大部分が欠落してしまうことになるからである。したがって、本研究では分布型流出モデルの最適な流域スケールを決定する方法として、このサブ流域によるゲイン G_S と河道網によるゲイン G_L が同程度のゲイン特性を示すサブ流域サイズを探索する方法を提案する。

では、この提案した方法によって、具体的に分布型流出モデルの最適なサブ流域スケールを求めてみる。対象とする流域は、前出の仮想的な流域で、実際の降雨に近い三角形降雨を与えて $G_S=G_L$ となるサブ流域スケールを探索した。降雨の条件は、前節の三角形降雨と同じ条件を与え、平均降雨強度を $\bar{r}=2, 5, 10(\text{mm/hr})$ の3ケースについて行った。 G_S と G_L の関係は前出の図-4.42を参照すると、角周波数 ω の全ての範囲で G_S と G_L が一致することはないようなので、実際に与えられる降雨のサンプリング時間間隔 Δt に対応する角周波数 ω 付近が一致するようなサブ流域スケールを求める。今回は、次節で解析する降雨データが $\Delta t=1(\text{hr})$ であるので、 $\omega = \pi$ 付近のゲインが一致するようにした。

図-4.44 が得られた結果である。流域面積が大きくなるほど、最適なサブ流域面積は大きくなる傾向がある。このときの流域の分割数でみると、流域面積が $200(\text{km}^2)$ 以上では80分割程度が最適な分割数と考えられる。また、同じ規模の流域でみると、平均降雨強度が大きくなると、サブ流域面積が大きくなり、強い降雨に対しては流域をそれほど分割しなくても良いことが分かる。

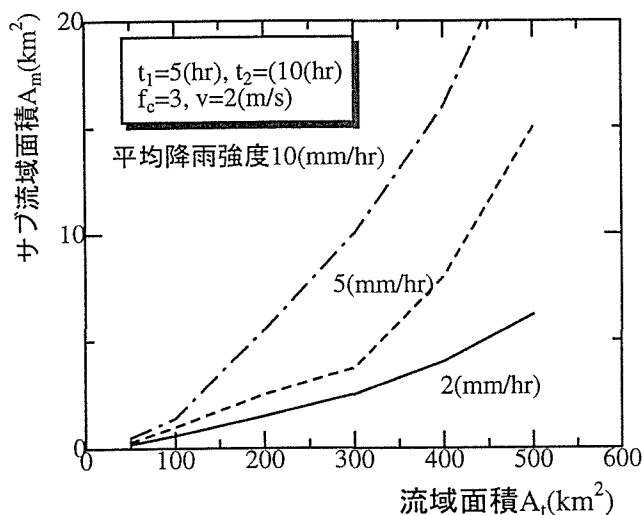


図-4.44 流域面積と最適なサブ流域サイズの関係

4.4.6 実流域の流出解析への適用

前節までは、仮想的な流域を対象に、サブ流域を単独でみた場合と、サブ流域の集合体として流域をみた場合の周波数応答特性について解析を進め、一般的な流域における分布型流出モデルの最適なサブ流域スケールを決定する方法を提案した。その結果、一般的な流域について図-4.44に示される最適なサブ流域サイズと流域面積の関係が得られた。本節ではその結果の妥当性を検討するため、実流域の流出解析に周波数応答法を適用して、流出量特性と周波数応答のゲイン特性との関係を明らかにする。

解析した流域は、第2章の流域地形量解析で取り扱った渚滑川の滝上と立牛観測所、網走川の津別と美幌橋観測所、常呂川の置戸と鹿ノ子ダム観測所、留萌川の大和田と幌糠観測所、後志利別川の今金と住吉（この流域の地形量の解析結果は未掲載）の、5流域内10観測所の流域である。各流域の地形量等の特性は、第2章を参照してもらうことにして、順次解析結果をみていくことにする。なお、第2章でも述べたように、解析対象流域は、数値標高データから擬河道網が作成済みであり、任意の縮尺の河道網を容易に得ることができる。また、解析に用いた実測降雨は1時間降雨である。

解析結果としては、渚滑川滝上観測所を代表例として示す。図-4.45は今回解析した降雨の振幅スペクトルである。降雨によって振幅スペクトルに差はあるものの、傾向としては $\omega=1.5$ 以上の振幅スペクトルが急激に減衰していることがわかる。また、'73年8月や'75年

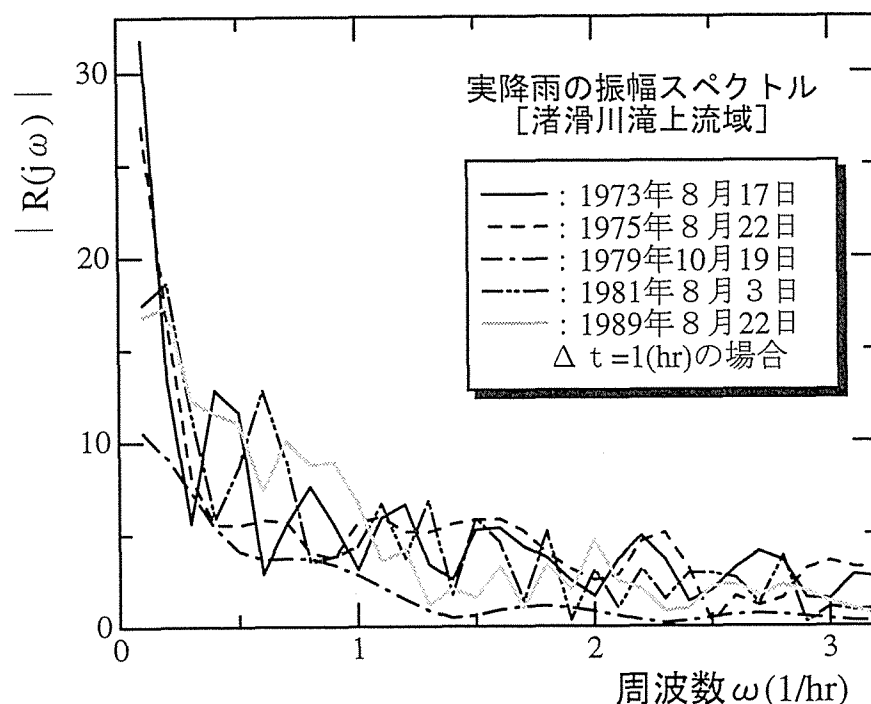


図-4.45 渚滑川滝上観測所の降雨の振幅スペクトル

8月の降雨は他と比べると $\omega=3$ でもまだかなりの振幅スペクトルが残っている。したがって、流域への入力である降雨の周波数応答特性によって、受け皿となる流域のスケールを変化させる必要があることを示している。

流域のシステム応答は、図-4.21に示すように、降雨の離散化、流域斜面域の変換機構、そして河道の運搬と合成機構の3つのフィルターを通過するシステムである。もし、各々のフィルターの伝達関数が既知であり、全体のシステム応答が線形システムである場合は各々の伝達関数の積で表されることになる¹⁵⁾。前節ではこの観点から流域全体の周波数応答が、サブ流域と河道網のフィルターの積で表されることを仮想的な流域について示した。ここでは、図-4.46に示す滝上観測所の流出解析結果を基に、実流域における各フィルターの特性を明らかにする。なお、図中の上図が河道網の効果を無視した場合で、下図が河道網の効果を考慮したハイドログラフである。また、河道における伝播速度は洪水期間中一定速度を仮定し、流量のピーク時刻を一致させるように同定している。

まず、図-4.47は式(4.13)から求めたゲインと、直接、流出計算をして求めたゲインを比較した結果である。両者はほぼ一致しており、特定の流域を対象する場合の周波数応答も式(4.13)から容易に求めることができることを示している。これ以降、実流域の周波数応答解析にはこの式を用いている。また、実流域の降雨波形は、多くの場合複雑な波形をしているが、ここでは実測降雨を4.4.4節で述べた三角形降雨波形に近似して、ゲイン特性を求めている。

図-4.48は滝上観測所の各洪水出水に対するサブ流域、河道網、流域全体の周波数応答を各々、式(4.25)、式(4.29)、式(4.24)から求めた結果を示したものである。サブ流域における周波数応答は、各洪水によって流出パラメータである f_c の値が若干異なるために、 f_c の値が大きい洪水ほどゲインの損失が大きいことがわかる。

一方、河道網による周波数応答は伝播速度によって影響されるが、滝上観測所の場合、伝播速度が全ての洪水出水で同じであるので、同様な周波数応答特性を示している。河道網によるゲインはマグニチュードが大きくなって河道網構造が複雑になるほど損失が大きく、特に $\omega=2$ ないし5付近の低下が著しい。洪水波の伝播速度によって ω のピークの位置は左右に変動するものの、この流域ではマグニチュードが20以上（サブ流域面積の平均では約 6km^2 以下）では、ゲインの特性はそれほど大きく変化していない。

また、両者のゲインの積で表される流域全体の周波数応答特性は、マグニチュードが80以上（サブ流域面積の平均では約 1.5km^2 以下）では、ほぼ同じ特性を示している。流域全体のゲイン G_t は $\omega=1$ 以上で損失が大きく、 $\omega=1$ で0.1程度のゲインしか有していない。即ち、本流域に関して言うと、前節で指摘したように降雨のサンプリング時間が $\Delta t=3(\text{hr})$ も $\Delta t=1(\text{hr})$ も同じゲインであるので、同じような流出特性を示すと考えられる。しかし、図-

4.45 の降雨の振幅スペクトルと比較すると、降雨には ω が1以下の低周波の波がかなり残っており、両者を組み合わせて考えると、この1以下の周波数成分が無視できないことが分かる。実際に図-4.46 に示す流出解析結果を仔細に検討すると、マグニチュードが20、平均サブ流域面積にして約6(km²)以下に流域を細分化すると、流出量に差が認められる。

以上、滝上観測所の流域では周波数応答特性から、 Δt は2(hr)ないし3(hr)でも流出解析には十分であると判断できるので、 $\Delta t=1, 2, 3$ (hr)とにおいて流出解析した結果を図-4.49 に示す。予想通り、 $\Delta t=2$ (hr)と3(hr)の間で差が認められ、今回対象の洪水例では、 $\Delta t=2$ (hr)が最大の Δt となる。

渚滑川滝上観測所流域以外の流域の解析結果は、流域の周波数応答特性のみを図-4.50~4.58 に示す。これらの流域に関する流出解析結果並びに周波数応答特性の解析結果は、基本的には渚滑川滝上観測所流域と同様な傾向を示していた。

以上の検討結果から、流域の周波数応答特性は、流域の流域面積、降雨強度、流出パラメータ等に影響されることが示されたので、降雨強度をパラメータにして流域面積と最適なサブ流域スケールの関係を図-4.59 に整理した。図中の記号は実流域の周波数応答特性から得られた結果で、降雨強度毎に応じてプロットしている。また、同図に記載した線分は、前節で求めた仮想的な流域に三角形波形降雨を与えて得られた最適なサブ流域スケールと流域面積との関係である。ここでは平均降雨強度が2(mm/hr)と5(mm/hr)の場合の結果を並記している。

仮想流域から得られた関係は、流域面積が大きくなるにつれて、最適なサブ流域のサイズも大きくなる傾向を示している。一方、実流域の結果は、この仮想流域の結果の周りを変動していると見なすことができるので、仮想的な流域と実流域から得られた最適な流域スケールの特性はほぼ一致しているとみなすことができる。この変動は、実流域の降雨が仮想流域に与えた降雨波形と必ずしも同じ波形ではなく、河道網も実流域の河道網パターンが平均的な河道網 $C(m, j)$ と異なる場合もあることが、その原因として考えられる。また、降雨強度が小さい場合には、最適なサブ流域のサイズが小さくなり、逆に降雨強度が強い場合には最適なサブ流域サイズも大きくなり、仮想流域と同じ結果になっている。以上、本研究では分布型流出モデルの最適な流域スケールを決定するために、周波数応答法を降雨一流出システムに適用し、流域という低域フィルターがサブ流域によるフィルターと河道網によるフィルターからなり、両者のバランスがとれる流域スケールが降雨一流出系にとっても最適であるとの考えを提案した。検討結果から、北海道のように比較的降水量が少ない地域では、流出モデルの最適な流域サイズは、図-4.59 から最大で約6km²程度、降雨の条件によっては更に細分化する必要があることが明らかとなった。また、4.4.3 節でも述べたように、流域面積が200(km²)程度までの流域では、流域の分割数の影響、すなわち河道網による流出の

遅れの影響が流出にはそれほど支配的ではなく、サブ流域あるいは斜面域における流量変換系の特性が流域全体の流出特性を支配していることが明らかになった。

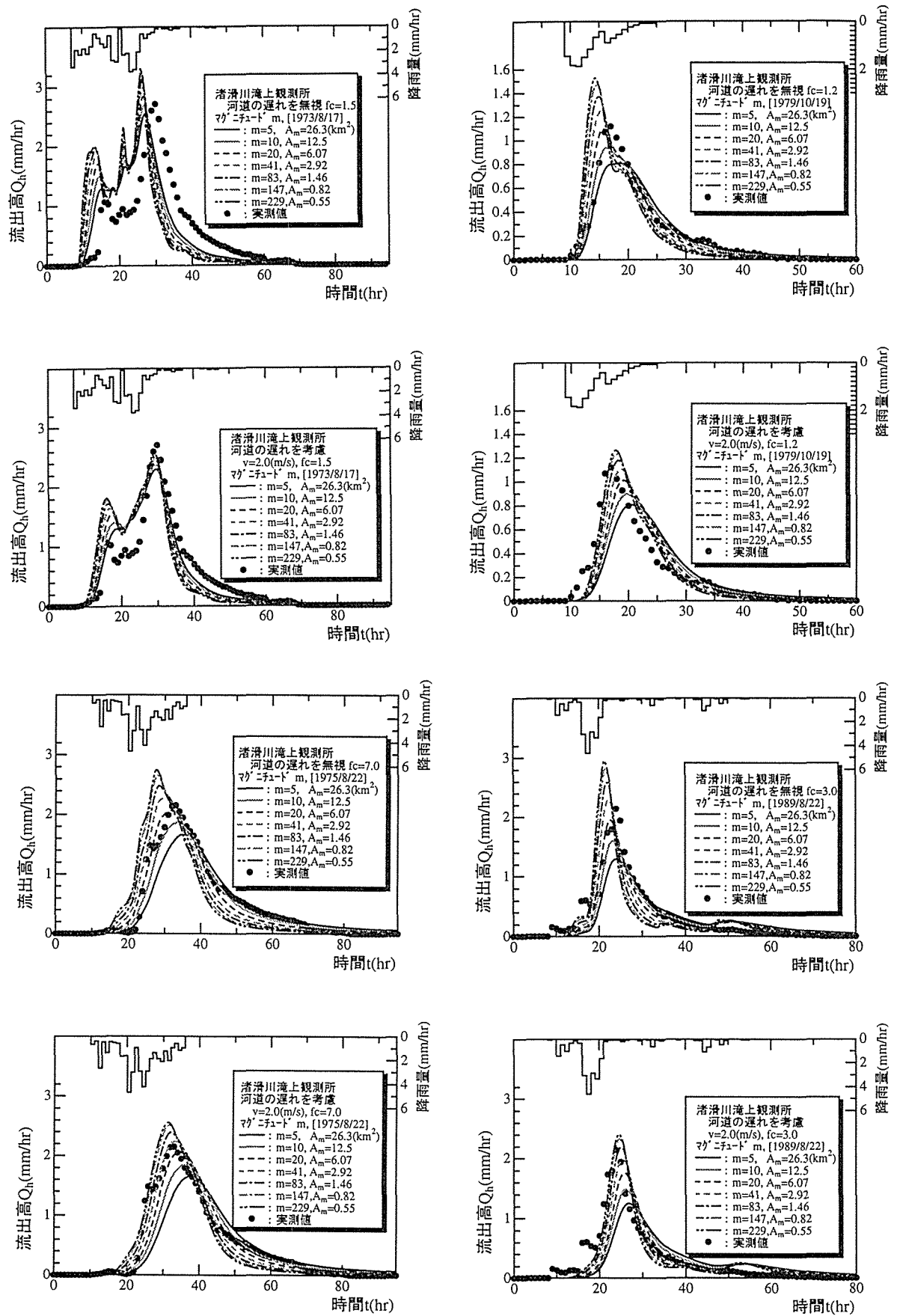


図-4.46 渚滑川滝上観測所の流出ハイドログラフ

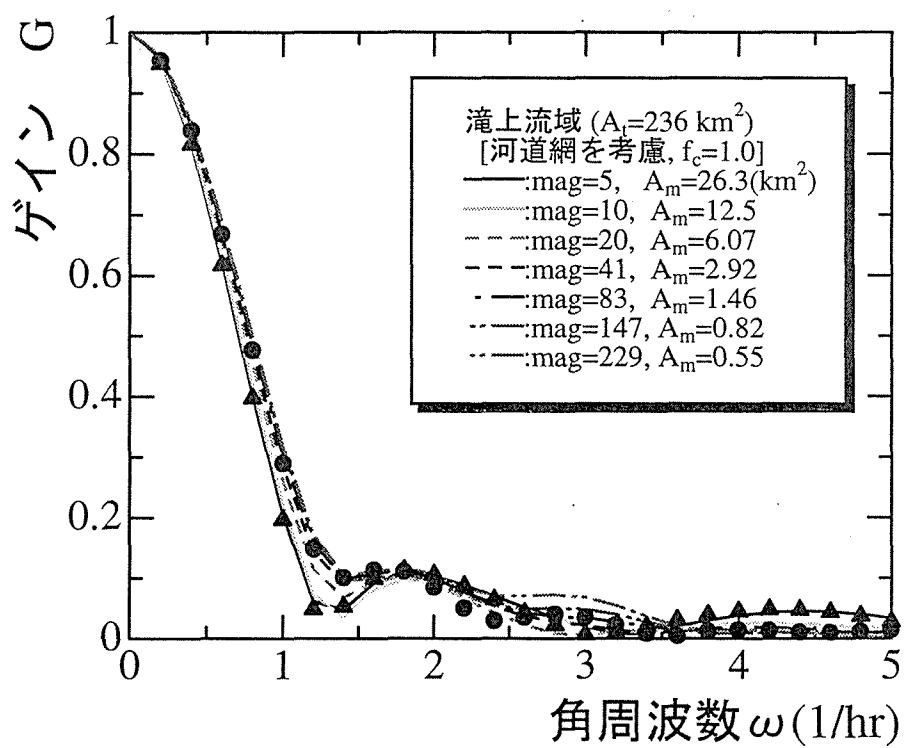
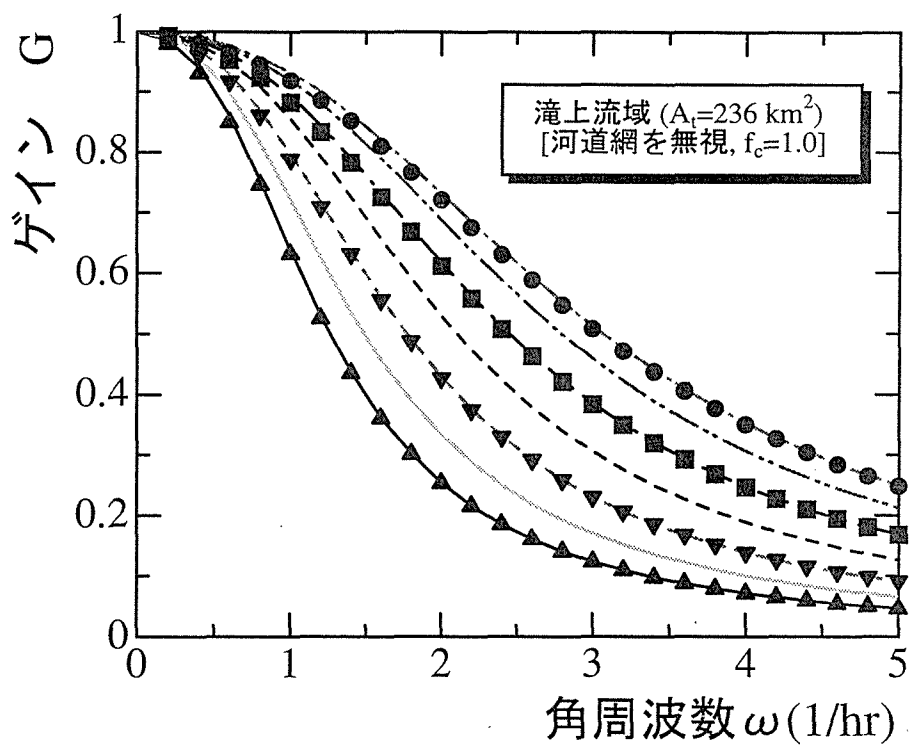
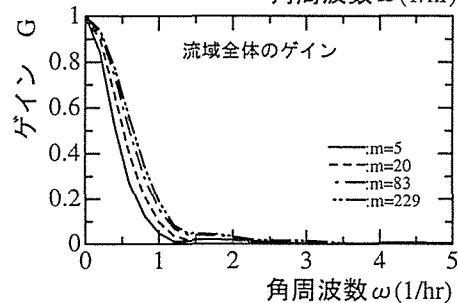
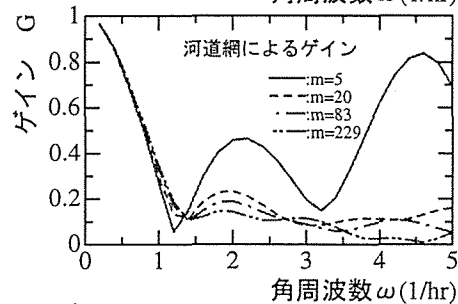
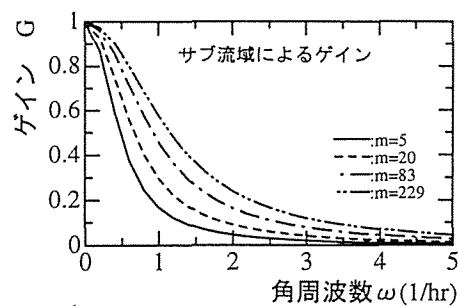
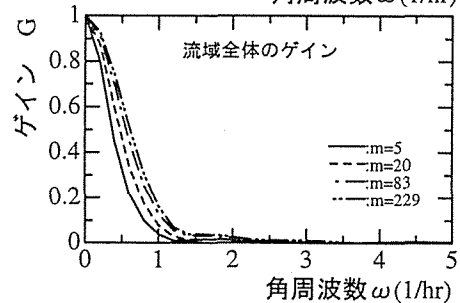
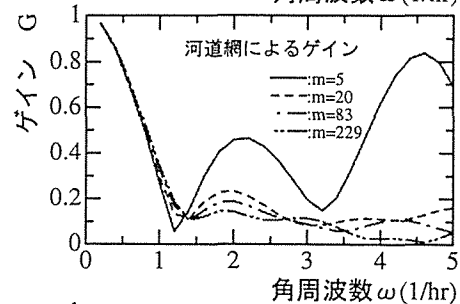
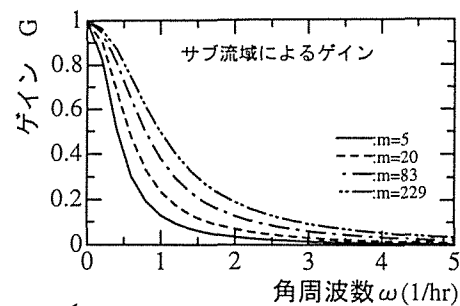


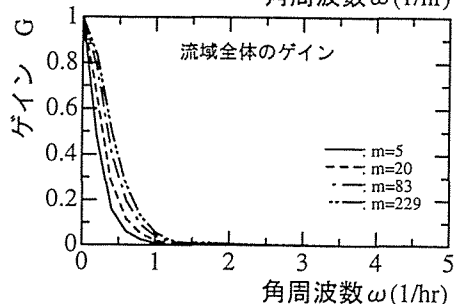
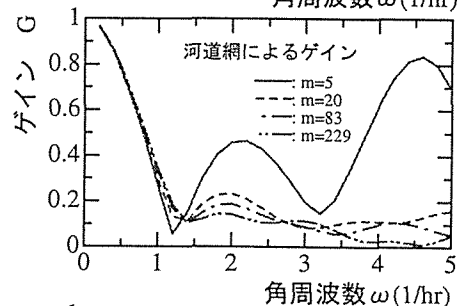
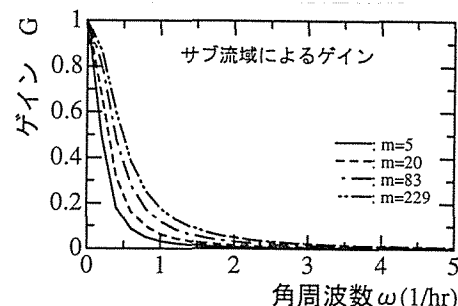
図-4.47 渚滑川滝上観測所の周波数応答の比較 [1973年8月17日]



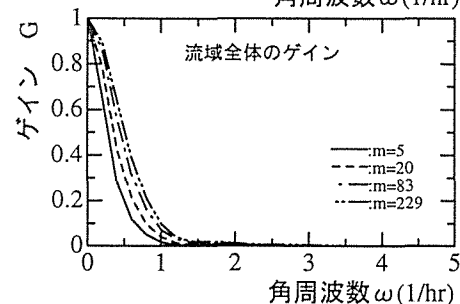
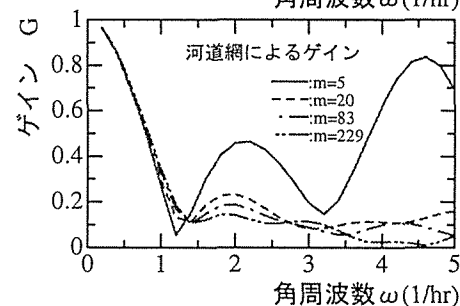
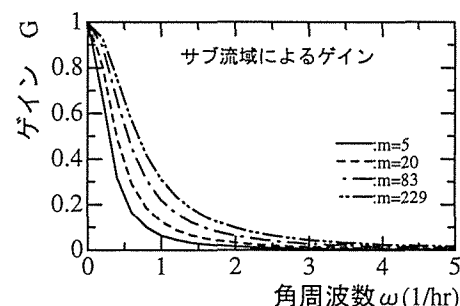
渚滑川滝上観測所 [1973年8月17日]のゲイン特性



渚滑川滝上観測所 [1979年10月19日]のゲイン特性



渚滑川滝上観測所 [1975年8月22日]のゲイン特性



渚滑川滝上観測所 [1989年8月22日]のゲイン特性

図-4.48 渚滑川滝上観測所の周波数応答

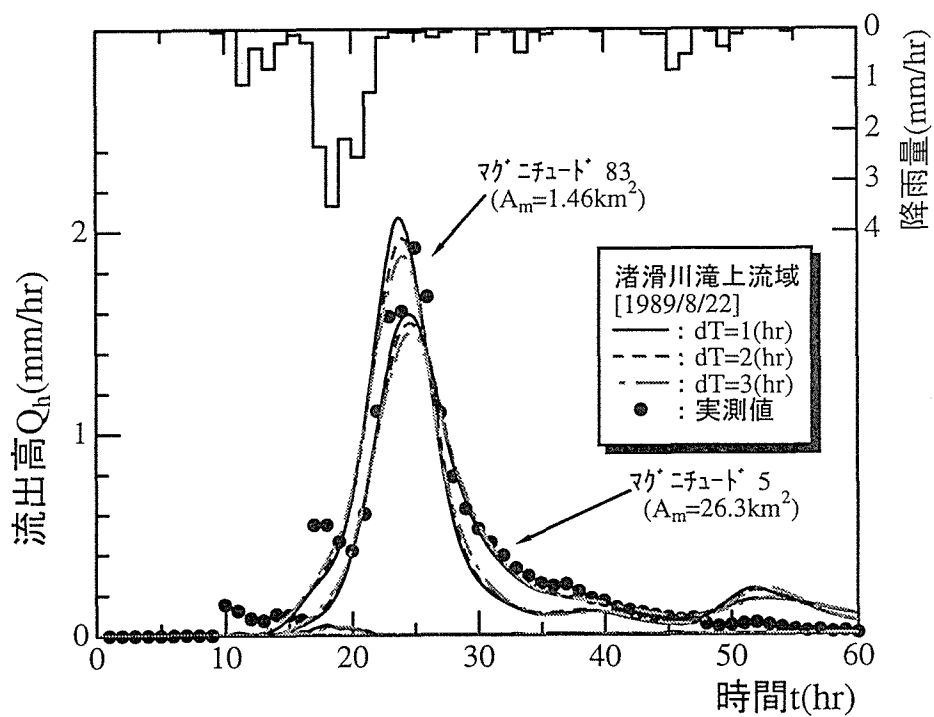
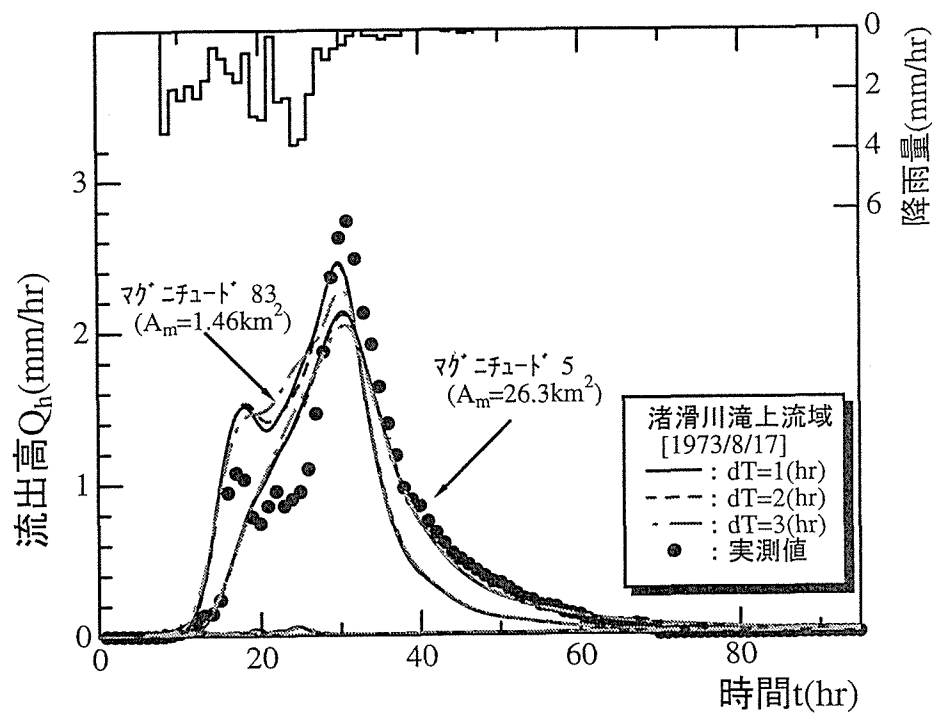
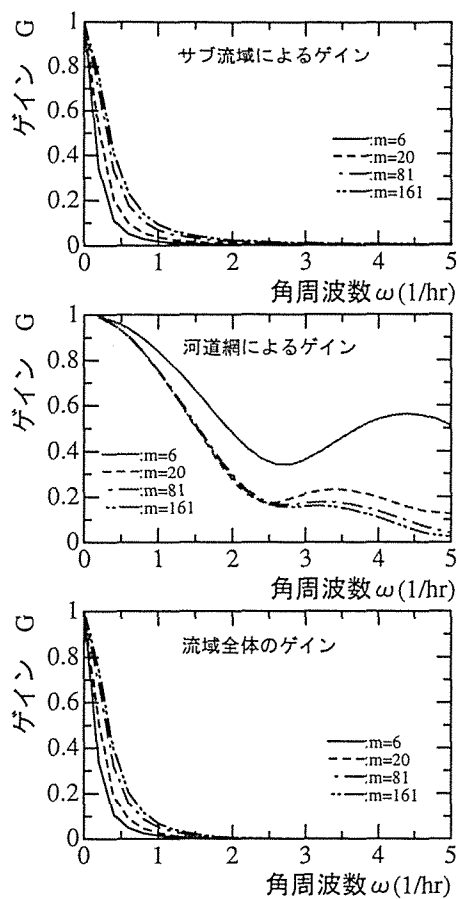
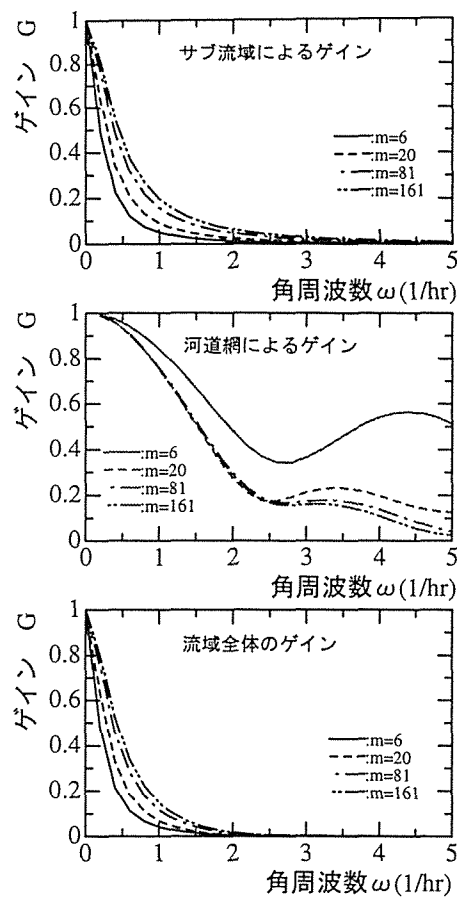


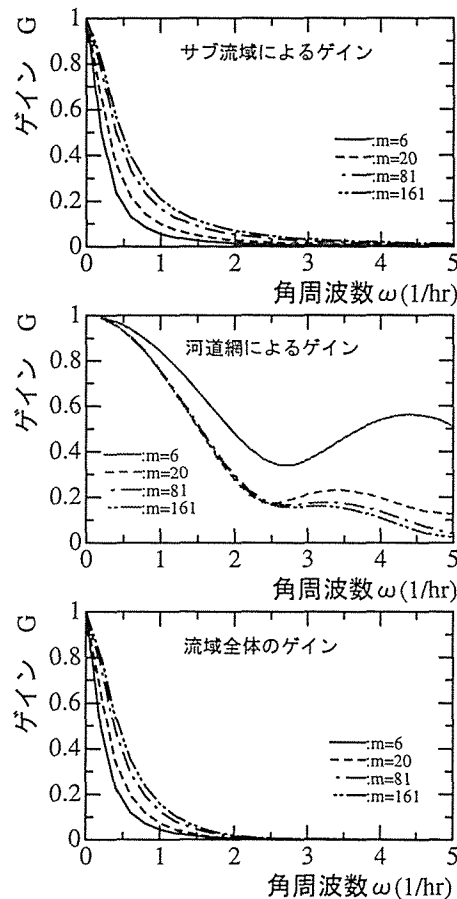
図-4.49 渚滑川滝上観測所の Δt の違いによるハイドログラフ



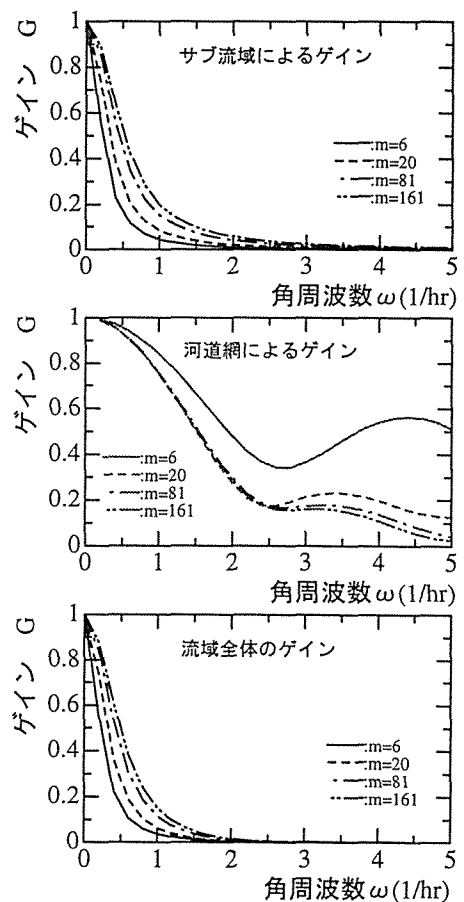
渚滑川立牛観測所 [1981年8月5日]のゲイン特性



渚滑川立牛観測所 [1988年10月29日]のゲイン特性

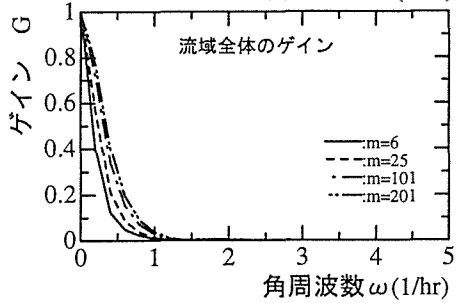
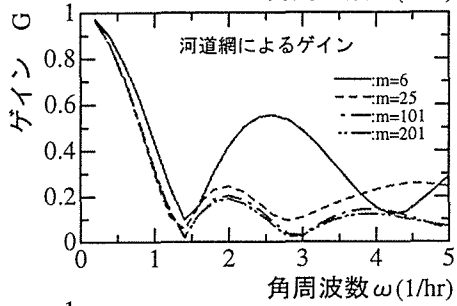
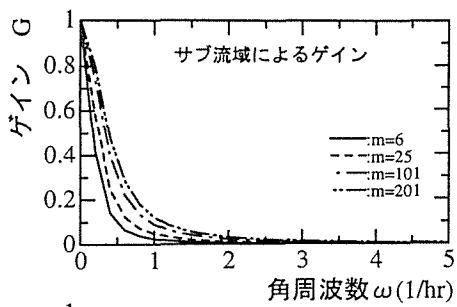


渚滑川立牛観測所 [1987年10月17日]のゲイン特性

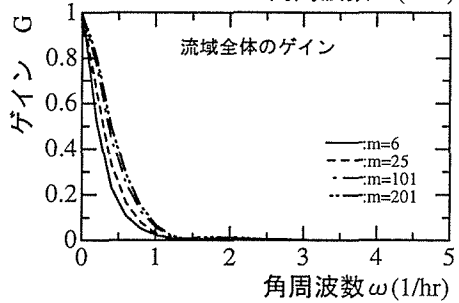
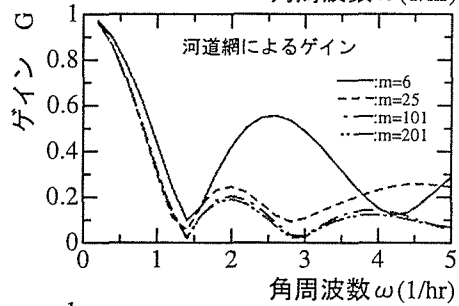
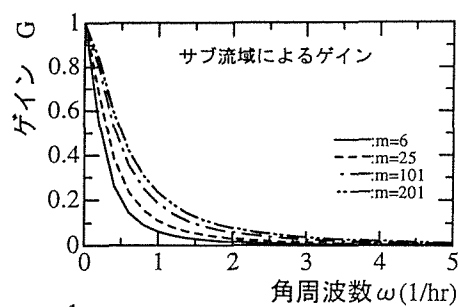


渚滑川立牛観測所 [1989年8月22日]のゲイン特性

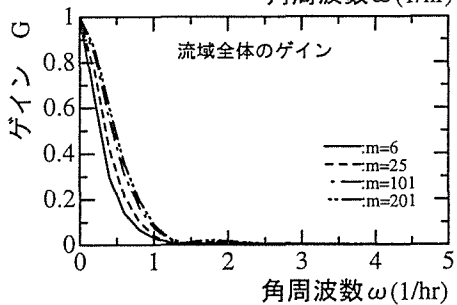
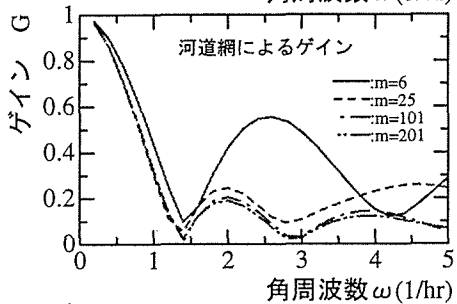
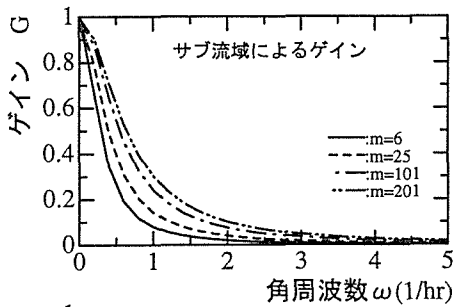
図-4.50 渚滑川立牛観測所の周波数応答



常呂川置戸観測所 [1972年9月16日]のゲイン特性

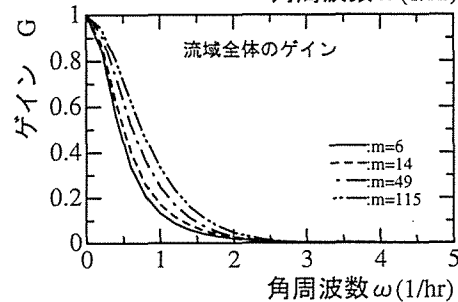
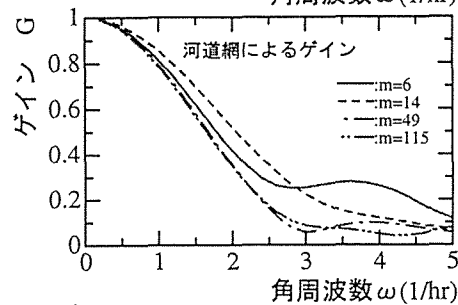
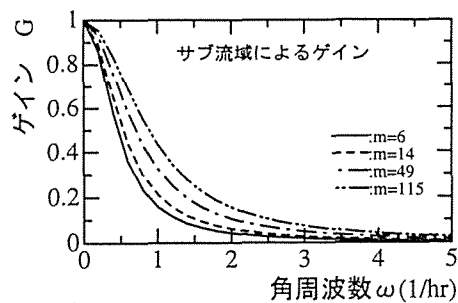


常呂川置戸観測所 [1981年8月4日]のゲイン特性

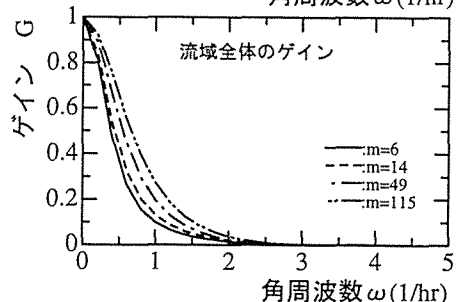
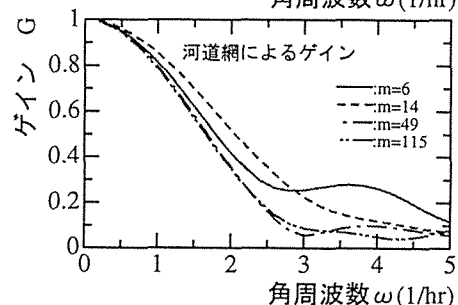
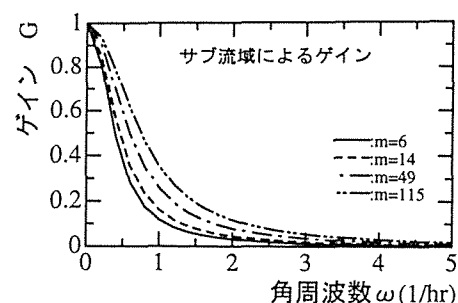


常呂川置戸観測所 [1979年10月19日]のゲイン特性

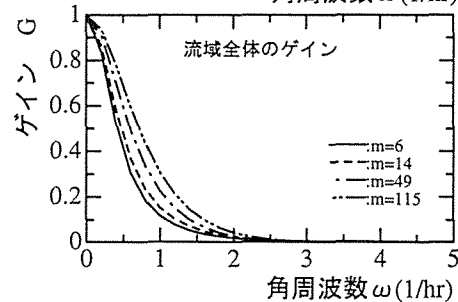
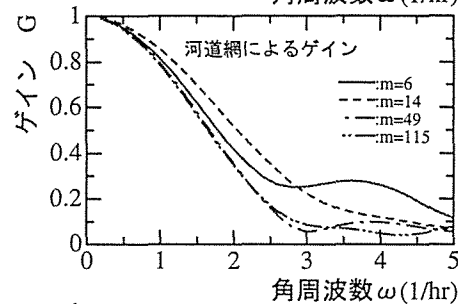
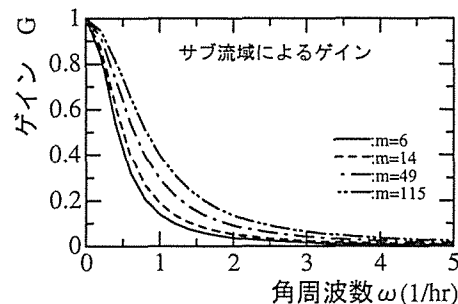
図-4.51 常呂川置戸観測所の周波数応答



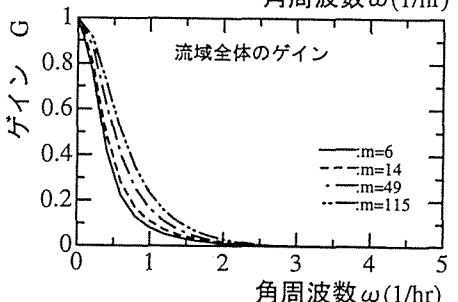
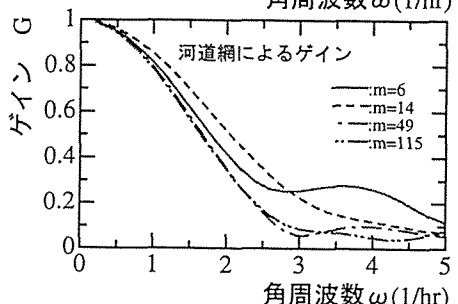
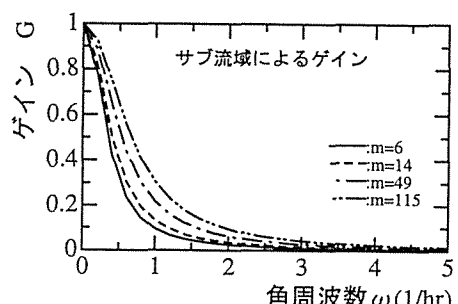
常呂川鹿ノ子観測所 [1972年9月16日]のゲイン特性



常呂川鹿ノ子観測所 [1979年10月19日]のゲイン特性

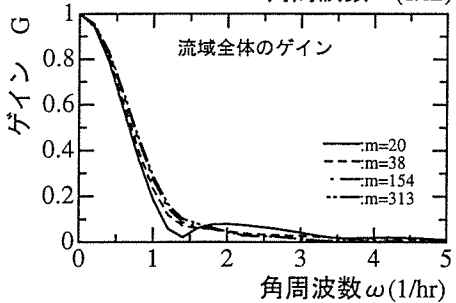
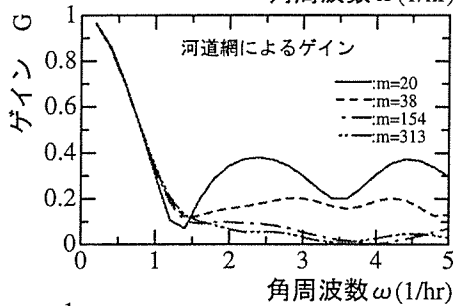
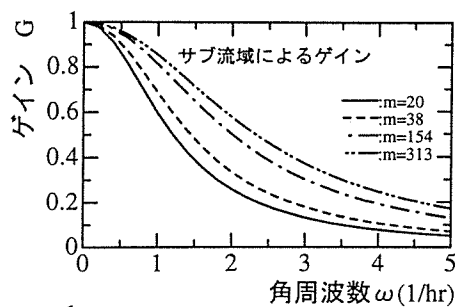


常呂川鹿ノ子観測所 [1975年8月23日]のゲイン特性

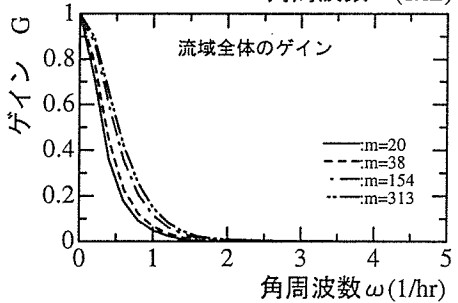
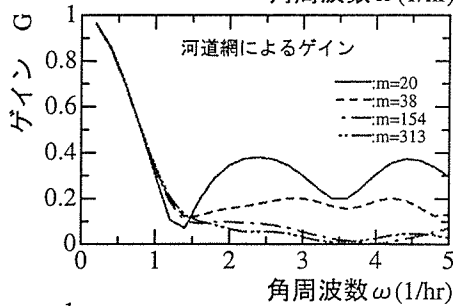
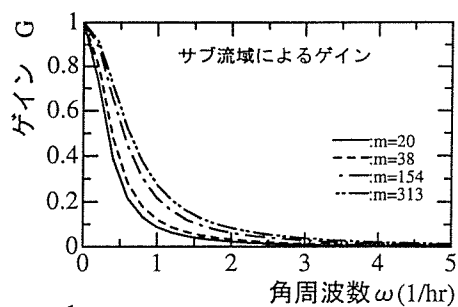


常呂川鹿ノ子観測所 [1981年8月22日]のゲイン特性

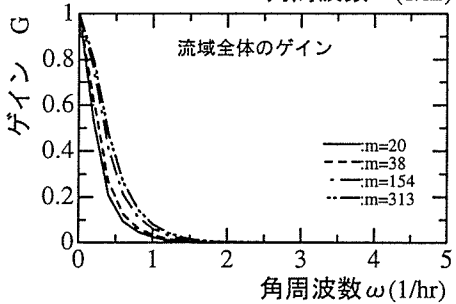
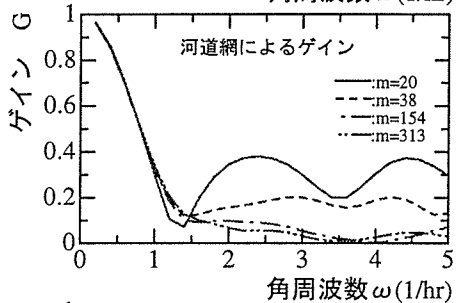
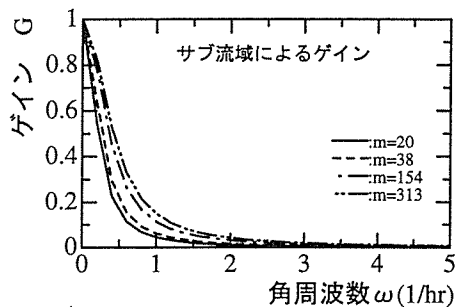
図-4.52 常呂川鹿ノ子観測所の周波数応答



網走川津別観測所 [1975年8月23日]のゲイン特性

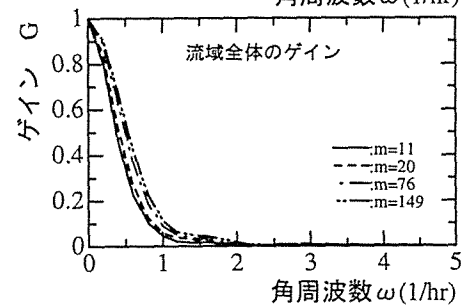
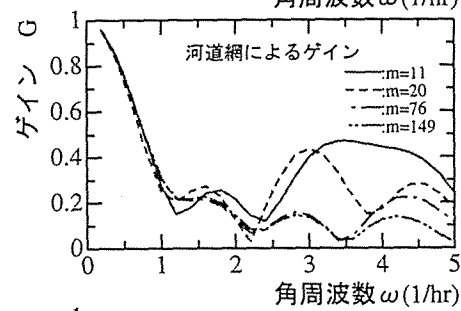
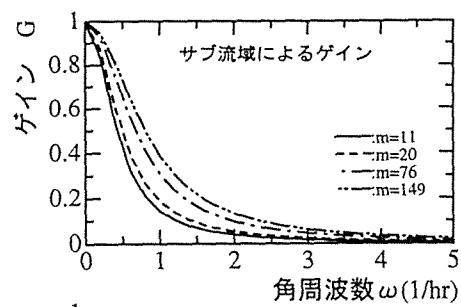


網走川津別観測所 [1981年8月04日]のゲイン特性

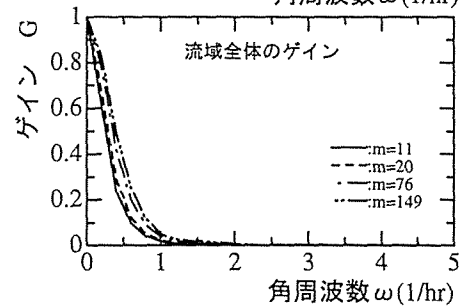
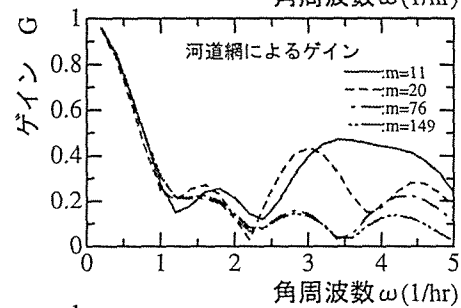
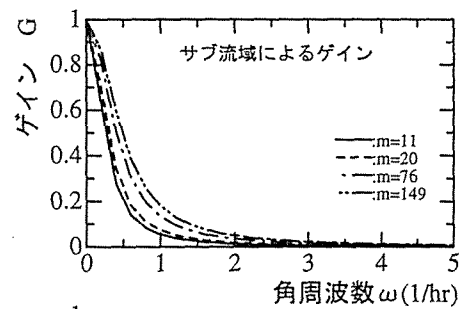


網走川津別観測所 [1979年10月19日]のゲイン特性

図-4.53 網走川津別観測所の周波数応答

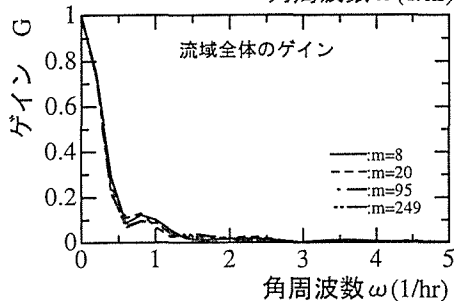
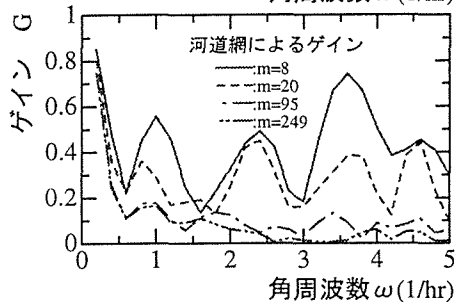
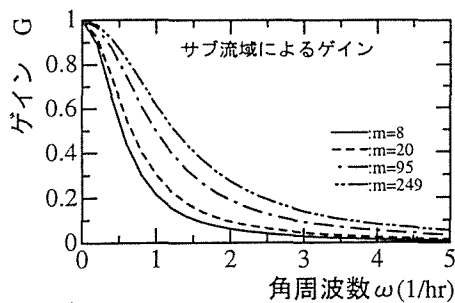


網走川美幌橋観測所 [1975年8月23日]のゲイン特性

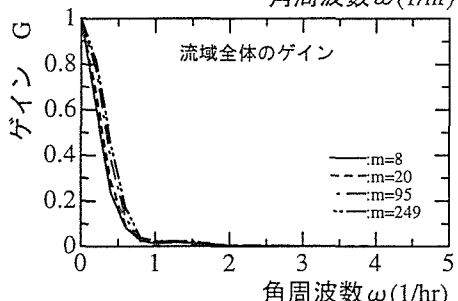
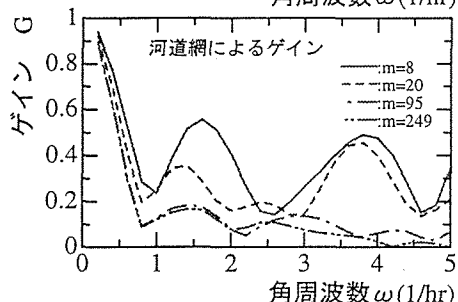
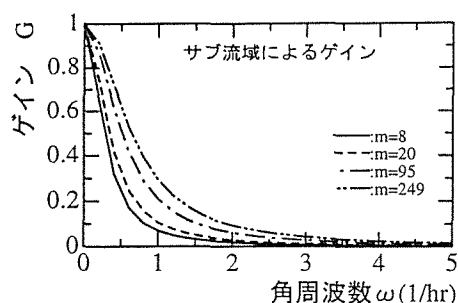


網走川美幌橋観測所 [1981年8月4日]のゲイン特性

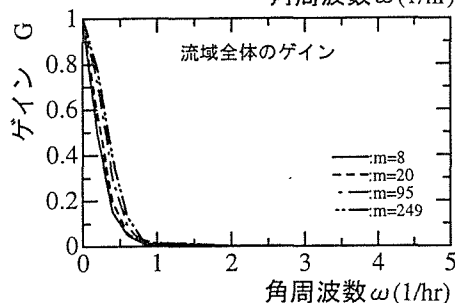
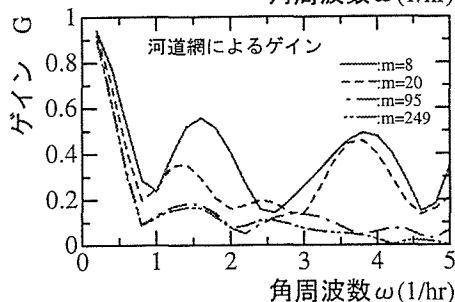
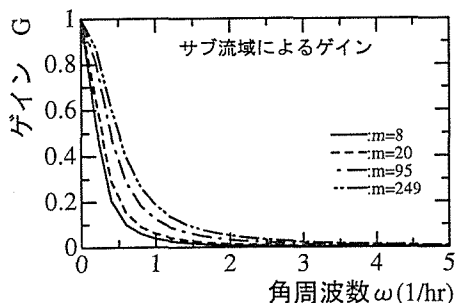
図-4.54 網走川美幌橋観測所の周波数応答



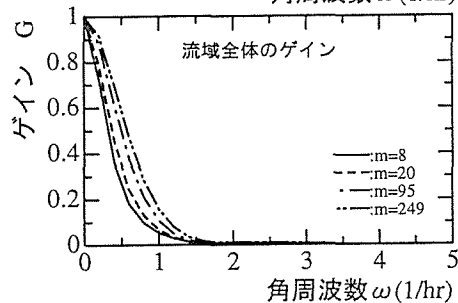
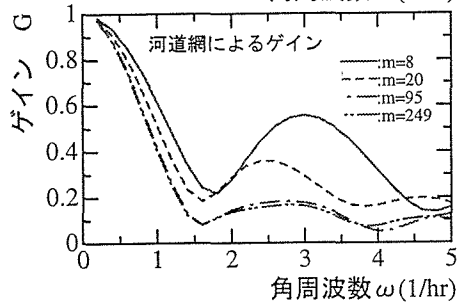
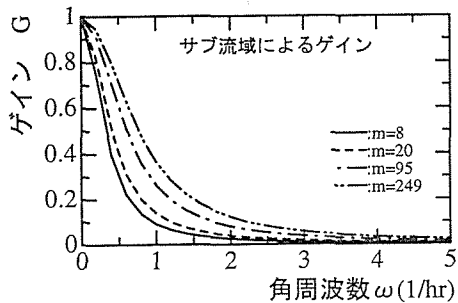
留萌川大和田観測所 [1970年7月31日]のゲイン特性



留萌川大和田観測所 [1975年9月8日]のゲイン特性

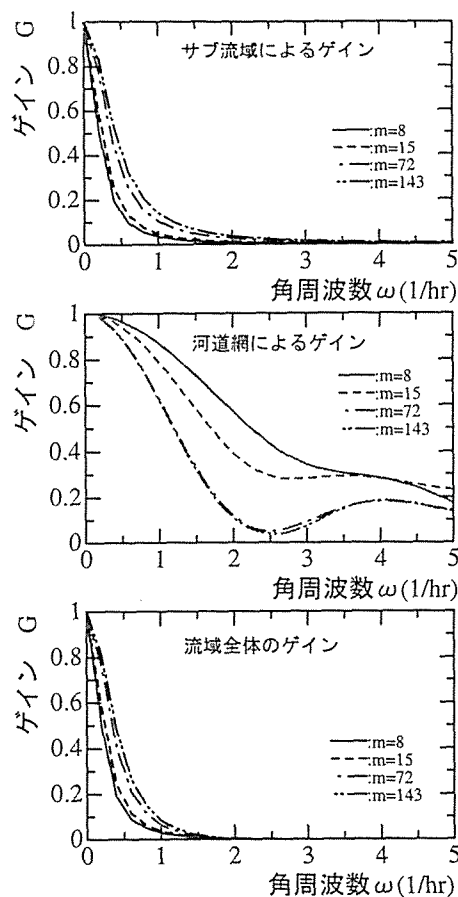


留萌川大和田観測所 [1975年8月22日]のゲイン特性

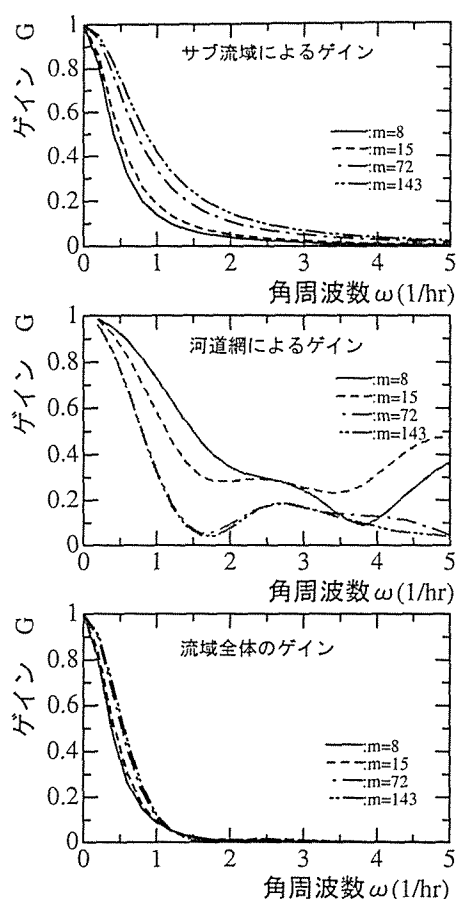


留萌川大和田観測所 [1981年9月4日]のゲイン特性

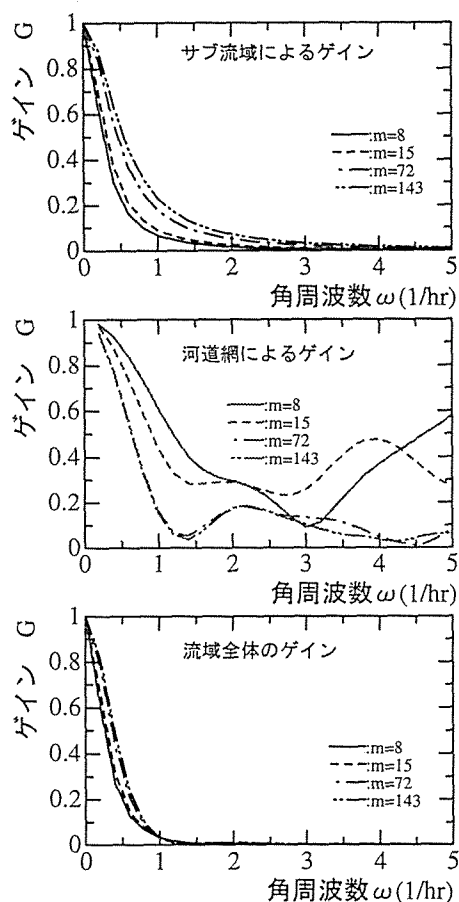
図-4.55 留萌川大和田観測所の周波数応答



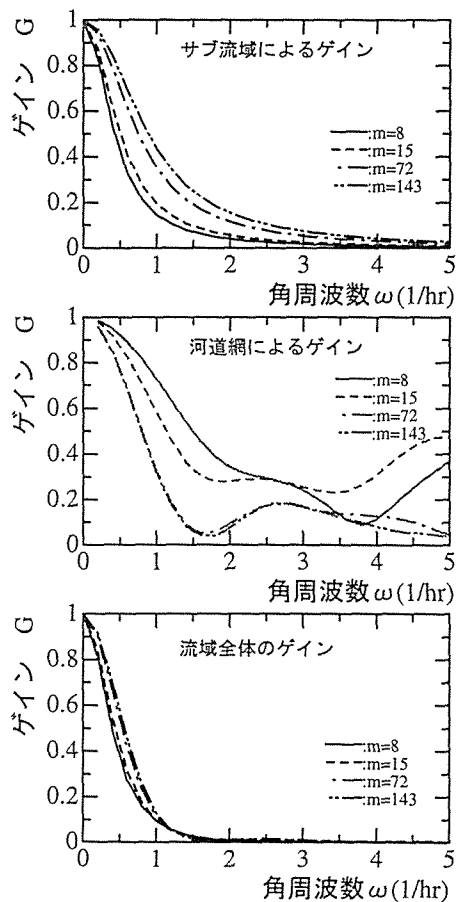
留萌川幌糠観測所 [1975年8月22日]のゲイン特性



留萌川幌糠観測所 [1978年8月19日]のゲイン特性

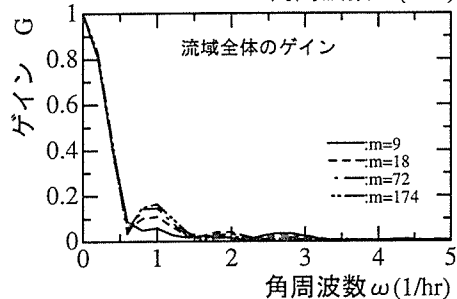
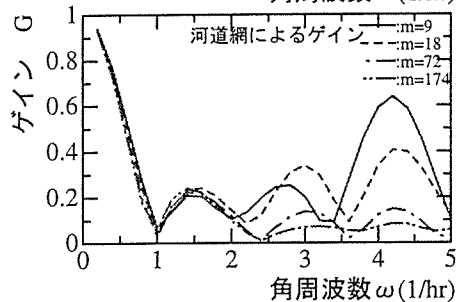
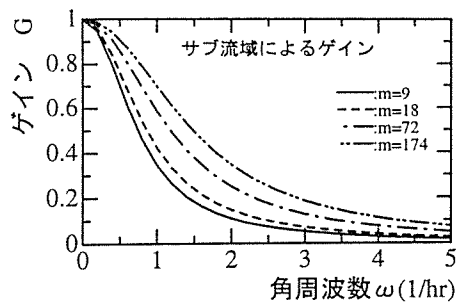


留萌川幌糠観測所 [1975年9月8日]のゲイン特性

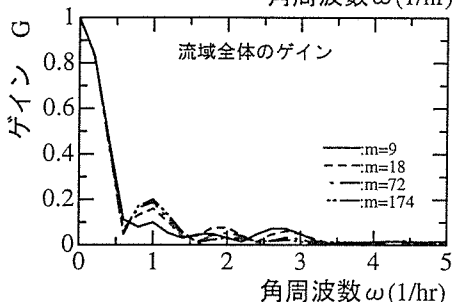
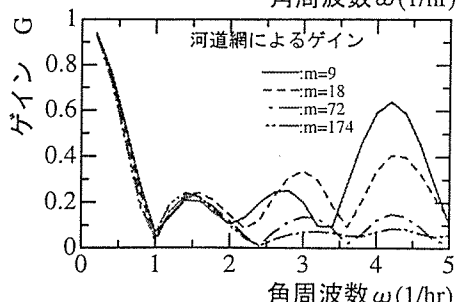
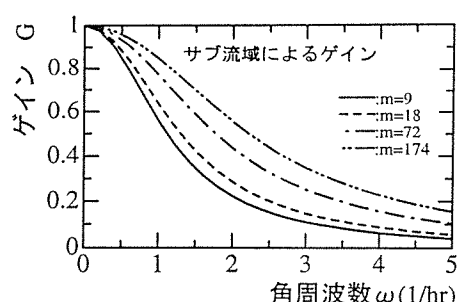


留萌川幌糠観測所 [1981年8月3日]のゲイン特性

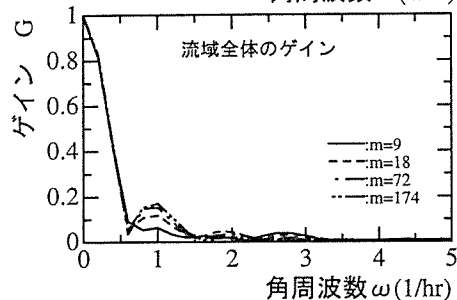
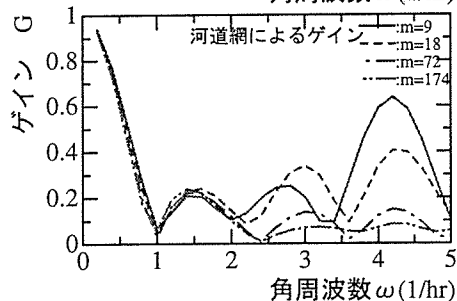
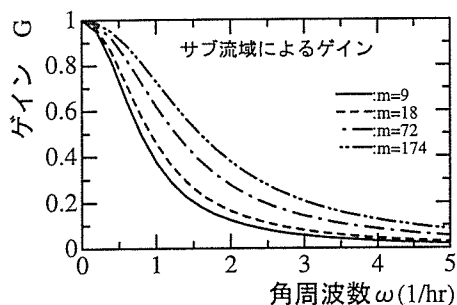
図-4.56 留萌川幌糠観測所の周波数応答



後志利別川住吉観測所 [1961年7月21日]のゲイン特性

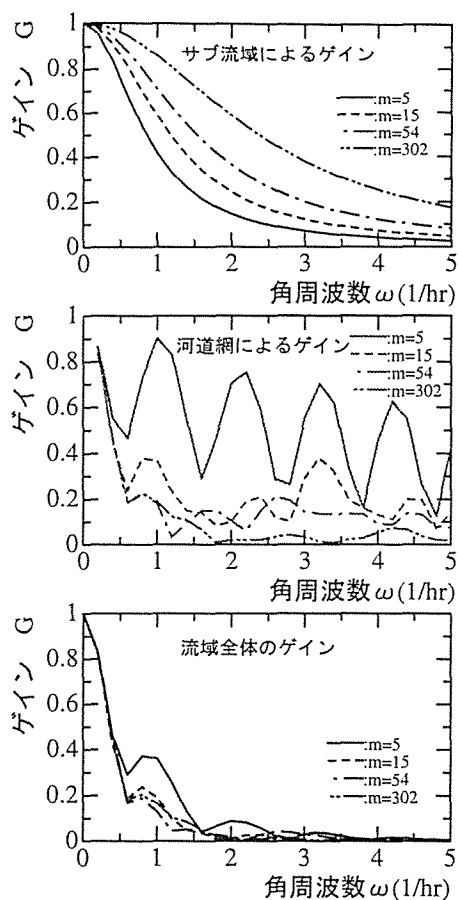


後志利別川住吉観測所 [1981年9月3日]のゲイン特性

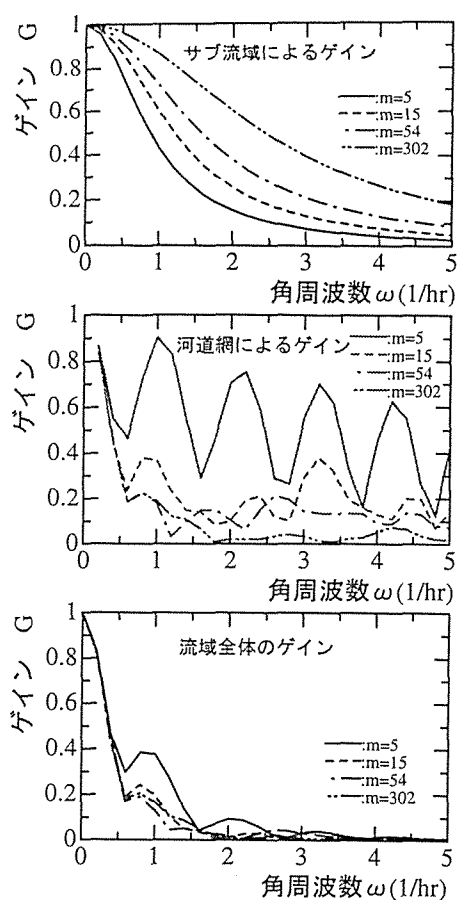


後志利別川住吉観測所 [1962年8月2日]のゲイン特性

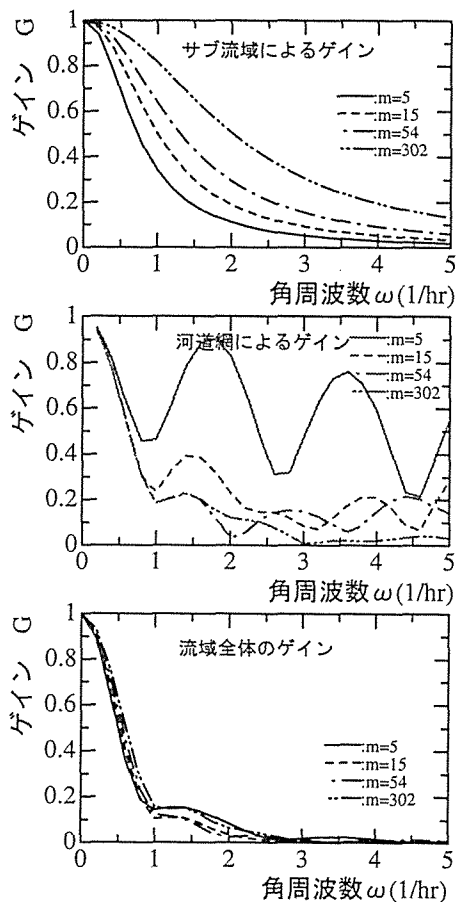
図-4.57 後志利別川住吉観測所の周波数応答



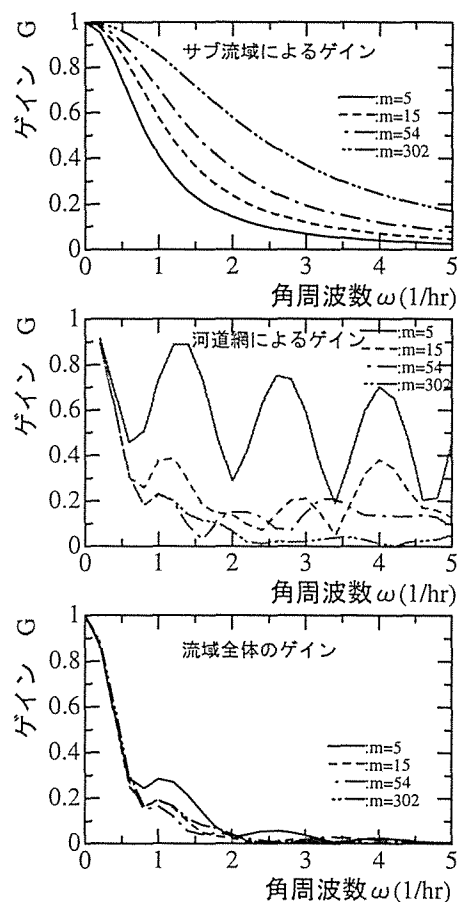
後志利別川今金観測所 [1962年8月2日]のゲイン特性



後志利別川今金観測所 [1975年8月19日]のゲイン特性



後志利別川今金観測所 [1968年8月20日]のゲイン特性



後志利別川今金観測所 [1981年9月3日]のゲイン特性

図-4.58 後志利別川今金観測所の周波数応答

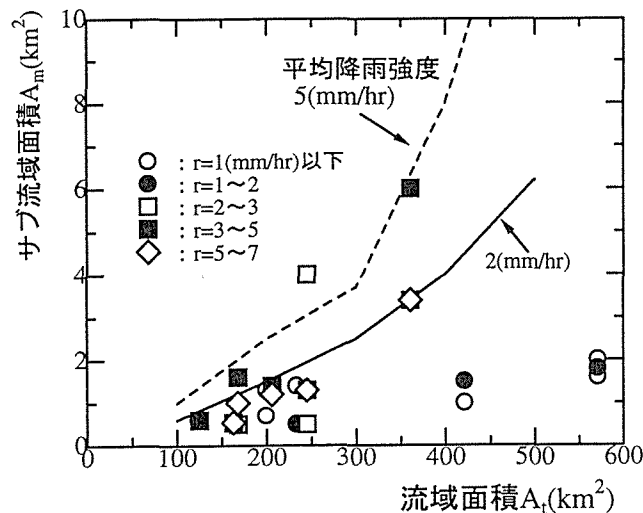


図-4.59 流域面積と最適なサブ流域サイズの関係

4.5 第4章のまとめ

本章では降雨－流出現象の受け皿となる流域スケールの問題を検討した．本章で検討した項目は，流域場の特性量が均質とみなすことのできる流域サイズ，入力である降雨が時間的に定常で一様であるとみなすことのできる雨域のサイズ，そして流域を降雨流出系システムの低域フィルターと考え、周波数応答特性から判断した流域サイズである．

今回取り上げた項目以外にも流域スケールを決定する判断材料、要因が残されていると考えられる．しかしながら、今回はこの限られた条件で判断できる流域スケールを以下に要約して述べる．

- 1) 流域場の特性量は，流出モデルの流出パラメータを決定する重要な要因であり，今回はその中から影響が大きいと思われる表層地質と地形分類を取り上げた．流出解析において，流域場の特性は均質であることが望まれているので，各々の特性量が均質とみなすことのできる面積を国土数値情報を利用して計測した．その結果，流域場が均質であるとみなすことのできる面積は，少なくとも約 5km^2 となった．
- 2) 流出解析において，降水量は時・空間的に一様である方が，解析は容易である．今回は，平均雨量強度，降雨継続時間，降雨波形数の3要素が同じ降雨を一様な降雨と考え，そのような降雨の雨域面積をレーダー雨量計のデータを基に計測した．6個の降雨について検討した結果，平均的には約 35km^2 という雨域面積が得られた．
- 3) 降雨流出系の応答モデルは，降雨という入力を流域という低域フィルターを介して，流出量として出力する非線形の応答システムである．この流域の低域フィルターとしての性能は，線形システムの応答特性を周波数領域で解析する周波数応答法が準用され，

流域を構成しているサブ流域における降雨－流量変換系システムのフィルターとサブ流域の空間配置を表す河道網の運搬・合成作用によるフィルターによる降雨情報の損失特性，すなわちゲイン特性によって流域の周波数応答特性が評価できる．

- 4) 流域の周波数応答特性は，流域をサブ流域によるフィルターと河道網によるフィルターが連結したシステムと考え，両者のゲインの積で流域のゲインが算定できる．従って，流域末端の流出量はサブ流域によるフィルターと河道網によるフィルターのバランスがとれる流域スケールが分布型流出モデルの最適な流域スケールと考えられる．
- 5) 流域システムの周波数応答特性は，サブ流域の応答特性と河道における流出の遅れ時間に強く影響され，流域面積が $200(\text{km}^2)$ から $500(\text{km}^2)$ 規模の流域では，河道の効果が支配的で，流域の分割数はあまり影響しないことが示された．降雨流出現象は非線形の応答システムであるので，ゲインは入力である降雨の平均雨量強度にも影響され，流域のサイズは流出解析で取り扱う降雨データの特性に規定されることになる．
- 6) 流域の周波数応答特性のバランスから判断された最適な流域サイズは，流域面積の大きな流域ほど，降雨強度が強いほど大きくなる傾向が見られた．また，この流域サイズは降雨強度によって影響されるので，流域面積だけで一義的に定まらないものの，今回解析した中で， $2(\text{mm/hr})$ 程度の有効降雨強度の場合は，最大でも $6(\text{km}^2)$ 程度である．
- 7) 以上の3項目について，それぞれ降雨－流出解析において望まれる流域サイズが導びかれた．その結果，3者の最小の流域サイズを流出解析の最適な流域スケールと考えると，流域の場の特性量、あるいは流域の低域フィルターの考えから導かれた約 $6(\text{km}^2)$ が最適な流域サイズと結論付けられた．

参考文献

- 1) Wood, E. F., M. Sivapalan, K. J. Beven and L. E. Band: Effects of spatial variability and scale with implications to hydrologic modelling, *J. Hydrology*, Vol.102, pp.29-47, 1988.
- 2) Wood, E. F., M. Sivapalan and K. J. Beven: Similarity and scale in catchment storm response, *em Rev. Geophys.*, Vol.28, pp.1-18, 1990.
- 3) Wood, E. F. and V. Lakshmi: Scaling water and energy fluxes in climate systems: three land-atmospheric modelling experiments, *J. of Climate*, Vol. 6, pp.839-857, 1993.
- 4) Sivapalan, M., and J. D. Kalma: Scale problems in hydrology: contributions of the robertson workshop, *Hydrological Processes*, Vol.9, pp.243-250, 1995.
- 5) Blöschl, G., and M. Sivapalan: Scale issues in hydrological modelling: a review, *Hydrological Processes*, Vol.9, pp.251-290, 1995.
- 6) Woods, R., M. Sivapalan and M. Duncan: Investigating the representative elementary area concept: an approach based on field data, *Hydrological Processes*, Vol.9, pp.291-312, 1995.
- 7) 立川康人, 椎葉充晴, 高棹琢馬: 三角形要素網による流域地形の数理表現に関する研究, 平成7年度文部省科学研究費(試験研究(B))研究成果報告書「流域特性のメッシュ集中化によるマクロ水文モデルの開発」, pp.19-34, 1996.
- 8) 高棹琢馬: 流出機構, 水工学に関する夏期研修会講義集(A 河川コース), 土木学会水理委員会, pp.3-1~3-43, 1967.
- 9) 椎葉充晴: 分布型流出モデルの現状と課題, 京大防災研究所水資源研究センター研究報告, 第15号, pp.31-41, 1995.
- 10) 高棹琢馬, 椎葉充晴, 市川温: 分布型流出モデルのスケールアップ, 水工学論文集, 第38巻, pp.809-812, 1994.

- 11) 早川博, 東村和歌子, 内島邦秀: 流域特性の空間スケールに基づく分布型流出モデルの検討, 土木学会北海道支部論文報告集, 第 52 号 (B), pp.104-109, 1996.
- 12) 神田徹, 藤田睦博共著: 水文学—確率論的手法とその応用—, 土木学会編新体系土木工学, 26 巻, 技報堂, 1982.
- 13) 国土庁計画・調整局, 建設省国土地理院編: 国土数値情報, 大蔵省印刷局, 1984.
- 14) 木下武雄: レーダ雨量計の実用化への開発, 土木学会論文集, 第 351 号/II-2, pp.1-15, 1984.
- 15) 例えば, 北村新三, 羽根田博正, 平井一正: システム制御工学, 森北出版, 1980.
- 16) 嵯峨浩: 山地流域の降雨流出現象に関する研究, 北海道大学博士論文, 1991.
- 17) 藤田睦博, 山岡勲: ナイキスト図による河川流出モデルの適合性の判別, 第 13 回水理講演会講演集, pp.25-30, 1969.
- 18) 藤田睦博: 降雨流出系のシステム関係の解析について, 第 15 回水理講演会講演集, pp.61-66, 1971.
- 19) 星 清, 山岡勲: 雨水流法と貯留関数法との相互関係, 第 26 回水理講演会論文集, pp.273-278, 1982.

第5章 結 論

流域は、降雨を流量に変換する斜面域と、斜面域からの流出量を集水して合成し、流域の出口まで運搬する河道があり、一本の河道とその両側に斜面が付随した形状が流域の基本単位構造である。流域は、この基本単位のサブ流域の集合体であり、その空間的配置を表すのが流域の河道網構造ということができる。

流域の降雨－流出現象は、入力である降雨の時間的・空間的変動と、降雨を流量に変換する場である流域の地形や地質、植生等の場の特性量の空間的変動に強く支配される現象である。

流域が小さい場合、地質や植生等の流域場の特性量はほぼ均質とみなすことができたが、域流が次第に大きくなるに従い、異なる特性を持つ支流が合流してくるため、流域場の特性量が均質であるとは言い難く、場所的に異なった特性を示すことになる。第1章で示した鵜川流域における最上流から流域末端にかけてのマグニチュードと集水面積の関係(図-1.2)は、このことを如実に語っている。つまり、図中に明確な折曲点が認められ、この地点において流域の特性が異なる大きな支流が合流してくることを表している。したがって、少なくともこの地点で流域を分割し、それぞれの流域で流出解析をすべきである。

一方、流域への入力である降雨は、流域の上流域にだけに偏って降ったり、雨域が上流域から下流域に移動するなど、流域内で降雨強度が時間的にも空間的に変動することが一般的である。したがって、受け皿となる流域は、少なくとも降雨の空間変動が一様となる雨域以下の面積に分割して、流出解析をすべきである。また、降雨の時間的変動が激しい場合には、必然的にその変動に対応できる流域サイズというものも、また定まってくる。

以上のように、流域の流出量は様々な要因の変動の影響を受けて、確率変動することになる。この要因を整理すると、次の3項目に集約できる。

- 1) 入力である降雨量の時・空間変動
- 2) 地形・地質・植生などの地形特性の空間変動に起因する流出パラメータの空間変動
- 3) 流域の土壌湿潤度などの場の初期状態の時・空間変動

実際の降雨－流出現象は、この3つの変動要因が複雑に絡み合っているために、この3項目

を同時に考慮することはかなり難しい．そのため、最初のアプローチは、各々の確率過程と流出特性の関係を個々に定量化することである．

本研究では、この中で、2番目の流域場の地形特性が空間変動することに起因する流出パラメータの空間変動を考慮した流出量の確率応答を取り上げた．第2章は降雨の受け皿である流域場の地形量の定量化を近年整備が進んできた数値地図の情報を利用して行った．第3章は降雨流出モデルに貯留関数法を適用し、貯留係数が確率変動した場合の流出量の確率応答を理論的に導いた．この貯留係数は流域の面積との相関が強いものと仮定して、流域面積の確率変動が流出量の確率変動に及ぼす影響を評価した．第4章は、分布型流出モデルに望まれる最適な流域スケールについて、流域場の特性、降雨場の特性及び流域の応答システムとしての特性の3つの面からそのスケールを言及した．以下、各章から得られた知見を要約して、本論文の結論とする．

第2章では、流域地形量の定量化を目的として、数値地図による流域地形量解析、河道網パターン構造の確率変動特性とサブ流域の地形量特性の定量化を試みた．

本章では、まず、第2.2節で数値標高データから擬河道網を抽出して、地形量の自動計測までの手法を確立した．擬河道網とはデジタル量である数値標高データ (DTM: Digital Terrain Model, あるいは DEM: Digital Elevation Model) 等を用い、雨水の流下方向（落水方向）に沿った模擬的な河道網を言う．擬河道網を抽出するために不可欠な落水線図の作成において、本研究では数値標高データのみの情報を用いて落水方向を決定し、落水線を流域末端まで連ねていくアルゴリズムを提示した．このアルゴリズムでは、落水線作成で問題となる窪地の処理方法に改良を加え、雨水が流下していく落水方向だけではなく、上流から流入してくる雨水の流入方向をも考慮することによって落水方向を決定し、従来の擬河道網で不自然に感じられていた平行に流れる落水線を解消することができた．

次に、落水線図から擬河道網を抽出するための閾値として、地形図による地形量解析において、河道の水源を延長するための指標、谷幅 w とわん入長 ℓ の比 (w/ℓ) を擬河道網抽出のための閾値に適用した．その結果、従来の面積 (累積値) 閾値による擬河道網に比して、Hack の法則として知られている流域面積とリンク長の関係は地形図の河道網の関係に近づき、河道の水源に流入する流域面積も地形図の河道網に類似した確率分布になることが示された．

w/ℓ 閾値の河道網の問題点として、面積閾値よりもデータ処理が煩雑になってしまうこと、斜面の勾配が緩やかで全体的にみて平坦な流域では、 w/ℓ 閾値による水源の定義は、閾値を変えても水源までの河道の伸長が起こり難く、うまく河道網が発達しないことも指摘された．ただし、面積閾値と w/ℓ 閾値は、地形図に記載されている河道網の再現だけに限れば、両者の違いはほとんどなく、実用的には面積閾値で十分である．しかし、今回現地踏査した富里ダム流域の実際の河道網を再現するためには、(a) 富里ダム流域の数値標高データに用

いたように、より細密なメッシュサイズのデータの利用、(b) 面積閾値と w/ℓ 閾値の両方のメリットを組み合わせた水源の定義、(c) 土壌や植生などの流域の場の特性を考慮した閾値の設定、などが考えられる。

また、擬河道網を地形量解析に用いる最大の利点は、地形図は地図の縮尺が限られているのに対して、擬河道網は閾値を適当に設定することによって、任意の縮尺の河道網を容易に手に入れることができるということである。擬河道網ではマグニチュードが地図の縮尺に相当していると考えれば、任意のマグニチュードに対するサブ流域の流域地形特性を調べることによって、地形量特性の定量化が可能となる。

第2.3節では、河道網構造を定量化するために、河道網構造の生起確率構造について詳細に調べ、河道網パターン構造に関する重要な確率分布関数を提案した。マグニチュードが与えられると、そのマグニチュードの河道網パターンの生起確率や平均的な河道網パターン、また、その河道網パターンの変動の程度などを、理論的に導くことができた。

降雨一流出過程における河道網の働きは、各サブ流域からの流出量を流域末端まで合成・運搬する役割を担っている。そのため、河道網パターンの確率分布特性は、流域末端で合成される流出ハイドログラフ、あるいは、流出の遅れ時間を支配している。第3章ではこの河道網の確率分布特性を用いることによって、流出への影響が理論的に評価できる。

また、ある流域に分布型流出モデルを適用しようとする場合、流域はある大きさのサブ流域に分割される。このサブ流域のサイズを次第に小さくした場合に、元の粗い骨格をなす河道網が、どのような法則性をもって密な河道網へ変化するのか、興味を引くところである。本研究では、サブ流域のスケールの変化、言い換えれば、マグニチュードが変化して流域が分割されていった場合の河道網パターンの移行過程を定式化することができた。

第2.4節では、2.2節で導いた擬河道網を基図とした地形量解析結果を基にして、流出量の変換の場であるサブ流域の地形量特性について言及した。

サブ流域の流域面積、リンク長の確率分布は、何れも左に偏った分布形を呈し、対数正規分布、あるいはガンマ分布に近い分布形をしている。本研究ではガンマ分布を適用し、実流域のサブ流域面積とリンク長の1～4次モーメントが、ガンマ分布で良く近似できることを示した。

次に、任意のマグニチュードにおけるサブ流域の流域面積、リンク長とその勾配と流路長の確率分布特性を調べ、地図の縮尺に相当するマグニチュードとの関係を調べた。その結果、同一流域において、任意のマグニチュードに対するサブ流域面積とリンク長の平均値、分散等を推定する式を提案した。任意のマグニチュードの河道網を流出解析する場合に、この提案式からマグニチュードの変化に伴うサブ流域の地形量の確率変動特性が容易に推定できる。その結果、同一流域でマグニチュードを変化した場合の流域面積、リンク長の確率分

布形は、マグニチュードが大きくなって流域がより細分化されると、ガンマ分布は指数分布形のようにゼロ付近に片寄った分布形に移行することが示された。

また、降雨を流出量に変換する場であるサブ流域の斜面地形量として、雨水経路長とその勾配の特性を調べた。雨水経路長とは、斜面に落ちた雨水が河道に達するまでの距離である。雨水経路長の確率分布形は指数分布、雨水経路勾配は対数正規分布に類似することが示された。内部リンクと外部リンクの斜面地形量は、いずれも確率分布に違いがみられ、流出解析では区別する必要があることが指摘された。一方、雨水経路長に対し、斜面域を矩形近似した求めた斜面長は、外部リンクの場合、水源までの河道長（リンク長）の変動が大きい。ため、極端に長い斜面長が得られることがあった。特に、マグニチュードが小さくサブ流域の規模が大きくなるほどその傾向は強い。

第3章では、降雨－流出過程における流量の確率変動に着目し、この変動を引き起こす原因として、第1章で挙げた流域場の地形特性に起因する流出パラメータが、空間変動する場合の流量の確率変動を、理論的に誘導することを試みた。

第3.2節はサブ流域の降雨－流出変換系のシステム方程式として星の2価の貯留関数法を採用し、流出パラメータである貯留係数 K_1, K_2 が確率変動する場合の流出量の1次から4次モーメントを理論的に誘導する手法を提示した。本システム方程式は、貯留指数が1以下の非線形システムであるので、理論解は得られないが、線形に近似することによって理論解を誘導する厳密には近似解法である。星の貯留関数法の貯留係数 K_1, K_2 は流域地形量等との関係が定式化されているので、地形量の確率変動特性を流出特性に取り入れやすい流出モデルである。

本研究で誘導した流出量の理論解は、全般的に見て、シミュレーションによる検証結果と良く一致していた。しかし、貯留係数の確率変動量が大きくなると、次第にシミュレーションとの適合性が悪くなる傾向がみられた。この原因は、非線形項を線形近似した際の誤差と、流出量と貯留係数との高次の相関係数の項を無視したことが考えられる。

貯留指数を1とおき、線形システムとして調べた流出量と貯留係数との高次の相関係数の項の影響は、貯留係数の変動係数が0.2以上になると、流出量の3次以上の高次モーメントの誤差が大きくなることが示された。非線形システムの場合の線形近似の影響は、やはり、貯留係数の確率変動が大きくなると誤差が目立つようになり、理論解の誘導過程で無視していた高次の項数を考慮する必要のあることが指摘された。

河道網によるサブ流域からの流出量の集水機構は、サブ流域から流域末端までの流路長をサブ流域の流出の遅れ時間に置き換え、流出量を線形重ね合わせることによって流域末端での流量を合成した。洪水波の伝播速度が一定の場合は、河道網パターンと流路長を考慮して遅れ時間の確率密度関数を理論的に導くことができた。

サブ流域の流出量の確率変動と流出の遅れ時間の確率密度関数を考慮して、流域末端における流量の1次から4次モーメントを理論的に導くことができた。シミュレーションによる理論解の検証では、良好な結果を示した。洪水波の伝播速度が流量に応じて変動する場合の流量の確率変動は、伝播速度が一定の場合と比較して、流量ハイドログラフの立ち上がり部からピーク時にかけてはほとんど影響が現れず、流量減水期に違いが目立つ程度であった。

以上、第3章では、確率変動する流域地形量が与えられた場合の流域末端での流量の確率変動を理論的に導いた。本手法は、ある流域の流出解析をする際に、事前に流域地形量を地形図や擬河道網から解析しておくことで、様々な流域スケールでの流出量の変動特性を把握することができる。

第4章では、降雨－流出現象の受け皿となる流域スケールの問題を検討した。本章で検討した項目は、流域場の特性量が均質とみなすことのできる流域サイズ、入力である降雨が時間的に定常で空間的に一様であるとみなすことのできる雨域のサイズ、そして流域を降雨流出系システムの低域フィルター (Low pass filter) と考えて、その周波数応答特性から判断した流域サイズである。

今回取り上げた項目以外にも流域スケールを決定する判断材料、要因が残されていると考えられるが、今回はこの限られた条件の中で判断できる流域スケールについて言及した。

第4.2節の流域場の特性量は、流出モデルの流出パラメータを決定する重要な要因であり、流出解析において、流域場の特性は均質であることが望まれている。今回はその中から影響が大きいと考えられる表層地質と地形分類を取り上げた。

本研究では各々の特性量が均質とみなすことのできる面積を、国土数値情報を利用して計測した。その結果、流域場が均質であるとみなすことのできる面積は、表層地質と地形分類の両者が共通となる面積として、約5km²となることが明らかにされた。

次に、降水量も時・空間的に一様である方が、流出解析が容易なのは明白である。第4.3節では、平均雨量強度、降雨継続時間、降雨波形数の3要素が同じ降雨を一様な降雨の判断基準に考え、このような降雨の雨域面積を北海道開発局霧裏山レーダー雨量計のデータを基に計測した。解析は6個の特徴的な降雨を取り上げ、詳細に検討した結果、一様と判断できた平均的な雨域面積は約35km²という結果が得られた。

最後に、降雨流出系システムは、降雨という入力を流域という低域フィルターを介して、流出量として出力する非線形応答システムと考えられる。第4.4節ではこのシステムの応答特性を把握するために、自動制御システムの線形システムの特性解析手法である周波数応答法が降雨流出系の非線形応答システムに適用された。通常の流出解析は、ハイドログラフのように時間領域の解析が主であるが、周波数応答法は周波数領域でのシステム特性を調べる手法である。

本章では、サブ流域における降雨流出変換系のシステム方程式として貯留関数法を与え、周波数応答のゲインが貯留関数法の貯留係数、貯留指数と平均降雨強度で表現できることを示した。さらに、各サブ流域のゲインの位相差と、サブ流域の流出量が流域末端に達する河道の遅れ時間が、河道網による周波数応答特性を規定していることを示した。その結果、流域システムはサブ流域による低域フィルターとしての特性と河道網による流出の遅れに起因する低域フィルターからなっていることを、仮想的な流域と実流域について検証した。流域規模が $200 \sim 500(\text{km}^2)$ の流域では、周波数応答に対する河道の効果は支配的であるが、それは流域の分割数にはあまり影響されないことが示された。

降雨流出現象は非線形の応答システムであるので、ゲインは入力である降雨の平均降雨強度に左右され、流域のサイズは取り扱う降雨データの時間的な変動特性によって規定されることになる。

流域の周波数応答特性から、サブ流域による周波数応答特性と河道網による周波数応答特性のバランスがとれる流域サイズを分布型流出モデルの最適なサブ流域スケールと定義した。このサブ流域のサイズは、流域全体の流域面積が大きな流域ほど、また降雨強度が強くなるほど大きくなる傾向が見られた。このサブ流域のサイズは、降雨の条件によって影響されるので、流域面積だけでは一義的には定まらないものの、有効降雨強度が $2(\text{mm/hr})$ 程度の場合は、最大でも $6(\text{km}^2)$ 程度であった。

以上の3項目について、それぞれ降雨一流出解析において望まれる流域サイズを誘導した。その結果、3者の最小の流域サイズを流出解析の最適な流域スケールと考えると、流域の場の特性量、あるいは流域の低域フィルターの考えから導かれた約 $6(\text{km}^2)$ が最適な流域サイズと考えられる。

流域地形量解析において、Horton, Strahler らの河道位数理論や Shreve のリンク-マグニチュード方式の河道網理論などは1950年代以前に確立した理論である。最近では、フラクタル理論が地形量解析に用いられている。しかし、これらの河道網理論と流出量を結び付けようとする試みは、これまでもかなり行なわれてきているが、明解な答えは得られていない。本研究は流域地形量が流域内で空間的に確率変動する場合の特性を定量化することによって、流域地形量の確立変動が流域末端での流出量に与える確率変動を理論的に導いたものである。すなわち、流域地形量の変動特性が、流出パラメータを媒介として流出量の変動特性と結び付いたのである。

また、分布型流出モデルは、流域を適当な大きさのサブ流域に分割して解析する流出モデルである。流域地形量によって流出パラメータの幾つかは規定されているので、本研究の流域地形量が空間的に変動する場合の流出量の確率変動は、分布型流出モデルの流域スケールと流出量の関係を明らかにすることができると、期待されていた。しかし、同一流域を対

象にサブ流域スケールを小さくしていった場合、サブ流域地形量の変動は小さくなるので、流出量の変動も次第に減少するが、一体、どこまでサブ流域を小さくしていけば良いのかと言う判断基準は明確になって来なかった。

本研究は、その解決方法として、降雨流出変換系システムの周波数応答特性に注目したのである。つまり、今まで時間領域で見ていた現象の見方を変え、周波数領域で流出現象を捉えようとするものであった。具体的には、流域を降雨の変動成分をカットする低域フィルターと考え、流域サイズを変えた場合のフィルター特性から、最適な流域スケールを導こうとするものであった。流域システムの周波数応答解析は、流域末端の流出量に対するサブ流域の働きと河道網の働きを周波数領域で評価することで簡便に説明することができた。

本研究は、従来から課題として残されていた分布型流出モデルの最適な流域サイズを決定するための新しい判断基準としての周波数応答法を提案した。しかし、降雨流出系システムが非線形システムであるために、流域の周波数応答のゲインは入力である降雨の変動成分以外にその平均量も関係している。したがって、最適な流域スケールを決定するためには、降雨の条件が不可欠である。

最後に、流出現象における流量の変動特性は、流域の地形量の変動以外にも、降雨の時間的、空間的な変動特性が大きく関わっており、最適な流域スケールの決定には流域と降雨の両方の変動特性を考慮しなければならない。この点が今後の大きな課題であろう。

謝 辞

本研究を遂行するに当たり、北海道大学大学院工学研究科・藤田睦博 教授からは、一方ならぬ御指導と数多くの御助言を賜りました。ここに深謝し、心より御礼申し上げます。

本研究は、著者が平成元年4月から10ヶ月間、文部省内地研究員として藤田教授の下で研究をスタートしてから約9年間の研究成果です。この間、内地研究員の機会を与えて下さった北見工業大学土木開発工学科・内島邦秀助教授には、公私にわたり御指導と御助言を戴きました。厚く御礼申し上げます。

さらに、本研究に対して貴重なコメントを戴きました北海道大学大学院工学研究科・板倉忠興教授、佐伯浩教授ならびに清水康行助教授に対しても、心から感謝の意を表します。

最後に、本論文を完成させるに当たり、助力を戴いた北見工業大学河川研究室の学生諸君に感謝致します。特に、地形量解析に際して援助を戴いた田中裕樹君、東村和香子君には深く感謝いたします。