

モデル追従系に関する研究

神谷 祐二

神谷 祐二

寄贈

目 次

第 1 章	序章	1
第 2 章	制御対象と同一構造のモデルを用いたモデル追従系	7
§ 2.1	序論	7
§ 2.2	エラーシステム	8
§ 2.3	P 形補償器	13
§ 2.4	モデル追従系	25
§ 2.5	モデル追従系を用いた設計	35
§ 2.6	補償器係数の決定	40
§ 2.7	補償器次数の低減	42
2.7.1	制御対象の状態変数が直接観測できる場合	42
2.7.2	制御対象が積分特性を持つ場合	47
§ 2.8	実験結果	51

2.8.1	極, 零点の設定	51
2.8.2	S平面の右半平面に零点を持つ系	61
§ 2.9	結言	65
第3章 制御対象と異なる次数のモデルを用いたモデル追従系		
§ 3.1	序論	71
§ 3.2	エラーシステム	72
3.2.1	モデルの次数が制御対象の次数より低い場合	76
3.2.2	モデルの次数が制御対象の次数より高い場合	80
§ 3.3	P形補償器	83
§ 3.4	モデル追従系	87
§ 3.5	多項関数目標値に追従する系	99
§ 3.6	補償器次数の低減	101
3.6.1	制御対象の状態変数が直接観	

測 じ る 場 合	— — — — —	101
3.6.2 制 御 対 象 が 積 分 特 性 を 持 つ 場 合	— — — — —	108
§ 3.7 実 験 結 果	— — — — —	109
3.7.1 高 次 系 の 低 次 系 近 似	— — — — —	109
3.7.2 ラ ン プ 入 力 に 追 従 す る 系	— — —	111
§ 3.8 CONDITIONAL FEEDBACK SYSTEM	— — — — —	123
§ 3.9 結 言	— — — — —	126
第 4 章 非 線 形 制 御 対 象 に 対 す る モ デ ル 追 従 系	— — — — —	128
§ 4.1 序 論	— — — — —	128
§ 4.2 静 的 非 線 形 系	— — — — —	130
§ 4.3 モ デ ル 追 従 系 に よ る 擬 似 線 形 系 化	— — — — —	135
§ 4.4 飽 和 , ク ー ロ ン 摩 擦 , バ ッ ク ラ ッ シ ュ 特 性 を 含 む カ ー ボ 系 の 設 計	— — — — —	138

4.4.1	飽和特性を含む場合	140
4.4.2	クーロン摩擦特性を含む場合	149
4.4.3	バックラッシュ特性を含む場合	154
4.4.4	飽和, クーロン摩擦, バックラッシュ特性を含む場合	167
4.4.5	非線形サーボ系の設計	171
§ 4.5	結言	180
第 5 章	準最適制御系の構成	181
§ 5.1	序論	181
§ 5.2	終端値指定の準最適制御	182
5.2.1	問題の設定	182
5.2.2	準最適制御系の構成	183
5.2.3	例題	186
§ 5.3	結言	192
第 6 章	結章	193

謝 辭 — — — — — 196

参考文献 — — — — — 197

第1章 序 章

従来提案されてゐる多くの制御系の設計法は制御対象の正確な線形微分方程式による数学モデルが与えられることを前提としてゐる。

しかしながら、実際の制御対象においては

(1) 非線形微分方程式となることが一般的であること、

(2) パラメータ変動(測定誤差及び経時に与る変化)が存在すること、

(3) 外乱が存在すること、

のためにこれ等の設計法を直接適用できない場合が多い。

制御対象が非線形微分方程式となる場合、その非線形特性が線形微分方程式におけるパラメータ変動及び外乱として表わされる場合がある。

従つて、パラメータ変動や外乱に関して極めて低感度となる設計法が開発されるとき、ある種の

非線形制御対象をも含めた広範囲の制御対象に対して直接適用できるものと思われる。

パラメータ変動や外乱の存在する制御対象に対する設計問題を解決する方法として

(1) パラメータ変動や外乱を外部から補償して、その後パラメータ変動や外乱を考慮していない設計法を適用する，

(2) 制御対象のパラメータ変動や外乱を初めから考慮した設計法を開発する，

の2通りが考えられる。

本論文は、(1)及び(2)の方法をモデル追従系を構成することによって解決することを示している。

モデル追従系の原理は、確定したパラメータを持ちかつ外乱の存在しないモデルを作製し、このモデルの出力に制御対象の出力を追従させるもので、モデルと制御対象の出力差を補償器を通して制御対象にフィードバックする構造となってい

る。このとき追従精度は補償器の係数によって任意に設定することができる。

モデル追従系に関しては既に報告がなされている^{1)~3)}

る。しかしいずれも出力ギャル-タ問題に変換することによって解決されており、このためにモ

デルとして入力をも含めた自励系として表わさ

れる場合^{1), 2)}, あるいはモデルに対する入力をステップ関数に限定している³⁾。文献[1], [3]は理

想的な制御対象に対する設計を直接の目的としており、感度に関しては論じられていない。これに

対し文献[2]においては評価関数の中にパラメータ感度に関する項が含まれており、パラメータ

に関し低感度となるように工夫されている。しかし外乱に関しては考慮されておらず検討の余地が

残されている。

制御対象のパラメータ変動や外乱を考慮した設計法としては、系の入出力伝達特性を設定するパラメータと感度を設定するパラメータが分離して

いてそれぞれが独立に設定できることが望ましい。

モデル追従系においては，モデルによって伝達特性を設定し，補償器によって感度を設定する構造になっており，上述の要求を満たしている。更にこれまでに上述の観点からパラメータ及び外乱感度を考慮した設計法として，2自由度を持つフィードバック系を構成するもの⁴⁾，モデルを用いるもの⁵⁾が知られている。

文献[4]はパラメータ感度を周波数領域で定義するもので，例題を用いて設計手順を示すにとどまっている。文献[5]において示される系は CONDITIONAL FEEDBACK SYSTEM と呼ばれ，その構成は第3章で述べられる設計法としてのモデル追従系に酷似している。従って CONDITIONAL FEEDBACK SYSTEM に関しては3.8節において改めて述べる。

パラメータ変動を考慮した設計法として，文献[4]，[5]とは異なった観点からパラメータ

感度方程式を導入するものが知られて⁶⁾いる。これは評価関数の中にパラメータ感度に関する項を含めたものであるが、パラメータ感度方程式をも含めた合成系が高次となること、合成系の可制御性が保証されず適用可能な系が限定されること、等の欠点がある。

本論文の構成は6章からなっており、第2章においては、 m 入力 m 出力の制御対象に対し制御対象と数学的に等しい構造でかつパラメータは制御対象のパラメータの測定値で与えられるモデルを用いたモデル追従系、即ちパラメータ変動や外乱の存在を考慮していない設計法と実際の制御対象に対して適用可能にする手段としてのモデル追従系が示されている。第3章においては、1入力1出力の制御対象に対し指定された特性を持ったモデルを用いたモデル追従系、即ち低パラメータ、低外乱感度の設計法としてのモデル追従系が示されている。この設計法は高次制御対象に対し低次

のモデルを用いることによって高次制御対象の出力時間特性を指定された特性に容易に設定できること，高次のモデルを用いることによって多項関数入力に定常誤差が零で追従する，いわゆるサーボ問題を容易に解決できること，等の特徴を持っている。第4章では，非線形特性が線形系におけるパラメータ変動や外乱として表わされる場合に，非線形制御対象に対し線形モデルを用いたモデル追従系を構成するとき非線形制御対象を擬似線形化できることが示されており，具体的な例として飽和特性，クーロン摩擦特性，バックラッシュ特性を含む非線形サーボ系が取り上げられている。第5章では，終端指定の最適制御問題が取り上げられ，モデル追従系を構成することの有効性が示されている。

第2章 制御対象と同一構造のモデルを用いたモデル追従系^{7)~10)}

§ 2.1 序 論

本章においては， m 入力 m 出力で出力だけを直接観測することのできる制御対象に対し，制御対象と同一の構造を有し，そのパラメータは制御対象における測定値によって与えられるモデルを用いたモデル追従系の構成を示す。

ここで示されるモデル追従系は，モデルの入力及び制御対象に対する外乱が有限次数の多項関数で与えられるとき，パラメータ変動や外乱が存在しても

(1) 出力定常追従誤差は零となる，

(2) 出力追従精度を任意に設定することがで

る，

の特徴を持っている。

この結果，モデル追従系を構成することによって実際の制御対象はパラメータや外乱に関して極めて低感度の制御対象と見なせるようになり，さらにモデルのすべての状態変数を直接観測できるようにするとき，パラメータ変動や外乱を考慮せず，かつすべての状態変数を必要とする従来の設計法を容易に適用することができる。

§ 2.2 エラーシステム

制御対象は(2-1)式で与えられるものとする。

$$\begin{cases} \dot{X} = (P + \Delta P)X + (Q + \Delta Q)R + N_1 \\ Y = (D + \Delta D)X + N_2 \end{cases}$$

(2-1)

ここで X は n 次元状態ベクトル, R は m 次元入力ベクトル, Y は m 次元出力ベクトル, P, Q, D はそれぞれ $(n \times n), (n \times m), (m \times n)$ のパラメータ測定値からなる行列, $\Delta P, \Delta Q, \Delta D$ はそれぞれ $(n \times n), (n \times m), (m \times n)$ のパラメータ変動分を表わす行列, N_1, N_2 はそれぞれ n 次元, m 次元の外乱ベクトルで

$$N_1 = \sum_{i=0}^{P-1} \frac{1}{i!} K_1^i t^i \square(t) \quad (2-2)$$

$$N_2 = \sum_{i=0}^{P-1} \frac{1}{i!} K_2^i t^i \square(t) \quad (2-3)$$

ここで $\square(t)$ は単位ステップ関数, K_1^i, K_2^i はそれぞれ $(n \times 1), (m \times 1)$ の定数行列と示される $(P-1)$ 次多項関数で与えられるものとする。

さらに, 制御対象は以下の条件を満足するものとする。

(1) 対 $[P + \Delta P, Q + \Delta Q]$, 対 $[P + \Delta P, D + \Delta D]$

はそれぞれ可制御，可観測の条件を満足する。

$$(□) \operatorname{rank} \left[\begin{array}{c|c} P + \Delta P & Q + \Delta Q \\ \hline D + \Delta D & 0 \end{array} \right] = n + m$$

(2-4)

(ハ) 出力 Y だけを直接観測することができ。

(2-1) 式のパラメータ測定値を用いて

(2-5) 式で示されるモデルを構成する。

$$\begin{cases} \dot{Z} = PZ + QR_m \\ W = DZ \end{cases} \quad (2-5)$$

モデルにおいては，出力 W 及びすべての状態変数を直接観測できるものとし，入力 R_m は

$$R_m = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{i!} K^i t^i \square(t) \quad (2-6)$$

として示される $(p-1)$ 次多項関数で与えられるものとする。

E ， F をそれぞれ状態追従誤差ベクトル，出力追従誤差ベクトルとして

$$\begin{cases} E = Z - X \\ F = W - Y \end{cases} \quad (2-7)$$

で定義すると, (2-1)式, (2-5)式から
E, F に関して

$$\begin{cases} \dot{E} = (P + \Delta P)E - (Q + \Delta Q)R - \Delta PZ + QR_m - N_1 \\ F = (D + \Delta D)E - \Delta DZ - N_2 \end{cases} \quad (2-8)$$

の関係を導く。新しい外部入力 V を導入して

$$R = R_m - V \quad (2-9)$$

とすると, (2-8)式は

$$\begin{cases} \dot{E} = (P + \Delta P)E + (Q + \Delta Q)V + \Delta_1 \\ F = (D + \Delta D)E + \Delta_2 \end{cases} \quad (2-10)$$

$$\text{そこで } \Delta_1 = -(\Delta PZ + \Delta QR_m + N_1) \quad (2-11)$$

$$\Delta_2 = -(\Delta DZ + N_2) \quad (2-12)$$

と書くことができる。(2-10)式をエラーシステムと称する。

エラーシステムは (2-1)式の制御対象と同

一のシステム行列，入力行列，出力行列によって構成されているので可制御，可観測及び(2-4)式の条件を満足し，出力追従誤差 F だけを直接観測することのできる系である。

(2-11)式，(2-12)式で与えられる Δ_1 ， Δ_2 の項にはモデルに対する入力及びモデルの状態 z が含まれている。しかしこれ等は E ， F に関して独立変数であり，この結果 Δ_1 ， Δ_2 は制御対象におけるパラメータ変動や外乱によって生じたエラーシステムに対する外乱項と見なすことができる。

(2-10)式から出力追従誤差 F は $E(0)$ 及び外乱項 Δ_1 ， Δ_2 によって生ずることがわかる。従ってここで目的とするところは， $E(0)$ や外乱項 Δ_1 ， Δ_2 の存在にもかかわらず入力 V によって出力定常追従誤差を零にし，出力追従精度を任意に設定することである。ここで出力追従精度を任意に設定するとは，任意の正の実数 δ_i に対し

て

$$\int_{t_0}^{\infty} [F_i(t)]^2 dt \leq \delta_i \quad (2-13)$$

$i=1, \dots, m$

ここで t_0 を

とすることである。

§ 2・3 p形補償器

制御対象の出力だけを用いて補償器を含めた補償系のすべての極を任意に設定する方法として、Pearson 氏の補償器¹¹⁾が知られている。Pearson 氏の補償器は 0 形で与えられているが、本節では p 形補償器によって補償系のすべての極を任意に設定することができることを示す。ここで p 形補償器とは、補償器の入力 (m 次元) 出力 (m 次元) 伝達関数行列の (m × m) 個の要素のすべてに極として零の p 重極を含むことである。

エラーシステムに $(m \times n + m \times p)$ 個の積分器を結合して, (2-14) 式で示される合成系を構成する。

$$\begin{aligned}
 \dot{G}_1 &= G_2 \\
 &\vdots \\
 \dot{G}_p &= F \\
 \dot{E} &= (P + \Delta P)E + (Q + \Delta Q)H_1 + \Delta_1 \\
 &\vdots \\
 \dot{H}_1 &= H_2 \\
 &\vdots \\
 \dot{H}_n &= J
 \end{aligned} \tag{2-14}$$

ここで $H_i, i=1, \dots, n, G_j, j=1, \dots, p,$ は m 次元状態ベクトル, J は合成系の m 次元入力ベクトル, n は

$$\text{rank} \left[(D + \Delta D)', \dots, (P + \Delta P)'(D + \Delta D)' \right] \cong n \tag{2-15}$$

を満足する最小の α とする。

ここで, 次の定理を証明する。

< 定理 (2.1) >

エラーシステムが可制御のとき, (2-14)

式の合成系が可制御となる必要十分条件は

(2-4)式で与えられる。

＜証 明＞¹²⁾

可制御な系の入力に積分器列と結合した合成系が常に可制御となることは明らかである。

従ってここでは、出力 F に $(m \times p)$ 個の積分器列と結合した場合と数学的帰納法によって証明する。

1) 最初に $(m \times 1)$ 個の積分器列と結合した場合を考える。このとき合成系の状態方程式は、外乱項 Δ_1, Δ_2 を無視して

$$\dot{\bar{E}} = \bar{P} \bar{E} + \bar{Q} V \quad (2-16)$$

$$\text{ここで} \quad \bar{E} = \begin{bmatrix} E \\ \text{---} \\ \bar{G}_P \end{bmatrix}, \quad \bar{P} = \left[\begin{array}{c|c} P+\Delta P & Q+\Delta Q \\ \text{---} & \text{---} \\ D+\Delta D & 0 \end{array} \right],$$

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} Q+\Delta Q \\ \text{---} \\ 0 \end{bmatrix}$$

と書くことができる。可制御行列を M_c^1 とすると

$$\begin{aligned}
M_c^1 &= \left[\frac{P^{n+m-1}}{P} \bar{Q}, \dots, \bar{P} \bar{Q}, \bar{Q} \right] \\
&= \left[\begin{array}{c|c} (P+\Delta P)^{n+m-1} (Q+\Delta Q) & \\ \hline (D+\Delta D)(P+\Delta P)^{n+m-1} (Q+\Delta Q) & \end{array} \right. \\
&\quad \left. \begin{array}{c|c} (P+\Delta P)(Q+\Delta Q) & Q+\Delta Q \\ \hline (D+\Delta D)(Q+\Delta Q) & 0 \end{array} \right] \\
&= \left[\begin{array}{c|c} P+\Delta P & Q+\Delta Q \\ \hline D+\Delta D & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} (P+\Delta P)^{n+m-2} (Q+\Delta Q) & \\ \hline 0 & \end{array} \right. \\
&\quad \left. \begin{array}{c|c} Q+\Delta Q & 0 \\ \hline 0 & I_m \end{array} \right] \quad (2-17)
\end{aligned}$$

となる。

必要条件の証明

一般に行列 A, B に対して

$$\text{rank } AB \leq \min(\text{rank } A, \text{rank } B) \quad (2-18)$$

の関係が成立する。

エラーシステムが可制御であることから、明らかに

$$\text{rank} \left[\begin{array}{c|c} (P+\Delta P)^{n+m-2} (Q+\Delta Q) & \\ \hline 0 & \end{array} \right. \begin{array}{c|c} Q+\Delta Q & 0 \\ \hline 0 & I_m \end{array} \left. \right]$$

$$= n + m$$

(2-19)

の関係が成立する。

ところで行列 $\left[\begin{array}{c|c} P+\Delta P & Q+\Delta Q \\ \hline D+\Delta D & 0 \end{array} \right]$ の大きさは

$[(n+m) \times (n+m)]$ であり，従って

$$\text{rank } M_c^1 = n + m \quad (2-20)$$

ならば (2-18) 式より (2-4) 式を得，必要条件となることが証明される。

十分条件の証明

(2-4) 式が成立するならば (2-17) ~ (2-19) 式から (2-20) 式を得ることができ
る。従って十分条件となることが証明される。

2) $(m \times k)$ 個の積分器列を結合しるとき，
合成系は

$$\dot{\hat{E}} = \hat{P} \hat{E} + \hat{Q} V \quad (2-21)$$

となり，可制御行列を M_c^k として

$$\text{rank } M_c^k = \text{rank} \left[\begin{array}{c|c} \hat{P} & \hat{Q} \\ \hline \end{array} \right]^{n+m \times k-1}, \dots, \hat{P} \hat{Q}, \hat{Q}$$

$$= n + m \times k \quad (2-22)$$

となることを仮定する。

3) $[m \times (k+1)]$ 個の積分器列を結合したとき，合成系は

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{E}} \\ \vdots \\ \dot{\hat{G}}_{p-k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{P} & 0 \\ \hat{D} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{E} \\ \vdots \\ \hat{G}_{p-k+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{Q} \\ 0 \end{bmatrix} V \quad (2-23)$$

となり，可制御行列 M_c^{k+1} は

$$M_c^{k+1} = \begin{bmatrix} \hat{P} & \hat{Q} \\ \hat{D} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{P}^{n+m \times (k+1)-2} & \hat{Q} \\ 0 & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{P} & \hat{Q} & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (2-24)$$

となる。ここで

$$\det \begin{bmatrix} \hat{P} & \hat{Q} \\ \hat{D} & 0 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} P+\Delta P & 0 & 0 & Q+\Delta Q \\ D+\Delta D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & I_m \end{bmatrix}$$

$$= \det \left[\begin{array}{c|c|c} P+\Delta P & Q+\Delta Q & \\ \hline D+\Delta D & 0 & \\ \hline & & \end{array} \right]$$

Diagram showing a block matrix with dimensions \$m \times m\$ and \$m \times \kappa\$. The matrix is partitioned into four quadrants. The top-left quadrant is a \$2m \times 2m\$ block matrix with blocks \$P+\Delta P\$, \$Q+\Delta Q\$, \$D+\Delta D\$, and \$0\$. The top-right quadrant is a \$2m \times \kappa\$ block matrix with blocks \$0\$ and \$-I_m\$. The bottom-left quadrant is a \$\kappa \times 2m\$ block matrix with blocks \$0\$ and \$I_m\$. The bottom-right quadrant is a \$\kappa \times \kappa\$ block matrix with blocks \$0\$ and \$I_m\$.

$$= \det \left[\begin{array}{c|c} P+\Delta P & Q+\Delta Q \\ \hline D+\Delta D & 0 \\ \hline & \end{array} \right] \quad (2-25)$$

Diagram showing a block matrix with dimensions \$m \times m\$ and \$m \times \kappa\$. The matrix is partitioned into four quadrants. The top-left quadrant is a \$2m \times 2m\$ block matrix with blocks \$P+\Delta P\$, \$Q+\Delta Q\$, \$D+\Delta D\$, and \$0\$. The top-right quadrant is a \$2m \times \kappa\$ block matrix with blocks \$0\$ and \$I_{m \times \kappa}\$. The bottom-left quadrant is a \$\kappa \times 2m\$ block matrix with blocks \$0\$ and \$I_{m \times \kappa}\$. The bottom-right quadrant is a \$\kappa \times \kappa\$ block matrix with blocks \$0\$ and \$I_{m \times \kappa}\$.

となる。従って

$$\text{rank } M_c^{k+1} = n + m \times (k+1) \quad (2-26)$$

となる必要十分条件は、(2-22)式の仮定から

$$\det \left[\begin{array}{c|c} \hat{P} & \hat{Q} \\ \hline \hat{D} & 0 \end{array} \right] = (-1)^{m \times \kappa} \det \left[\begin{array}{c|c} P+\Delta P & Q+\Delta Q \\ \hline D+\Delta D & 0 \end{array} \right] \neq 0$$

(2-27)

つまり(2-4)式で与えられる。

<証明終>

(2-14)式の合成系は、制御対象が可制御で

(2-4) 式を満足するとき，定理(2.1)から常に可制御となり，

$$J = -K_G G - K_E E - K_H H \quad (2-28)$$

$$\text{ここで} \quad H = \begin{bmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_n \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_p \end{bmatrix},$$

K_G, K_E, K_H はそれぞれ $[m \times (m \times p)], [m \times n],$

$[m \times (m \times n)]$ の定数行列

なる全状態フィードバックにより， $[n + m \times (n + p)]$ 個の合成系のすべての極を任意に設定することができ¹³⁾る。

次に入力を F ，出力を $V = H_1$ として(2-29)

式で示される補償器を考える。

$$\begin{cases} H_1^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} A_i H_1^{(i)} = -\sum_{j=0}^{n+p} B_j G_1^{(j)} \end{cases} \quad (2-29-1)$$

$$\begin{cases} G_1^{(p)} = F \end{cases} \quad (2-29-2)$$

ここで $H_1^{(i)}, G_1^{(j)}$ はそれぞれ H_1, G_1 の i 次微分，

および j 次微分を表わし， A_i, B_j は $(m \times m)$ の定数行列である。

エラーシステムと(2-29)式の補償器によって構成される第2.1図の補償系と(2-14)式の合成系の関係を調べる。

$$H_i^{(i)} = H_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (2-30)$$

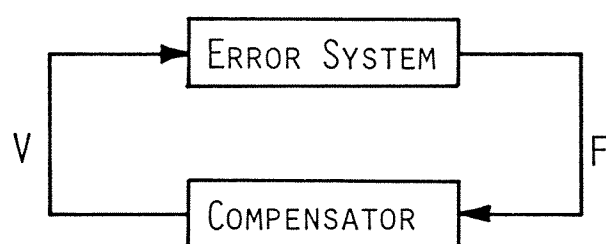
$$G_i^{(i)} = G_{i+1}, \quad i = 0, \dots, p-1 \quad (2-31)$$

とすると, (2-10)式, (2-29-2)式から

$$\begin{aligned} G_1^{(K+P)} = F^{(K)} &= (D + \Delta D)(P + \Delta P)^K E \\ &+ \sum_{l=1}^K (D + \Delta D)(P + \Delta P)^{K-l} (Q + \Delta Q) H_l \\ &+ \sum_{l=1}^K (D + \Delta D)(P + \Delta P)^{K-l} \Delta_1^{(l-1)} + \Delta_2^{(K)}, \\ &K = 0, \dots, n \end{aligned} \quad (2-32)$$

の関係が得られる。(2-29)式に(2-30)~(2-32)式を代入すると, (2-29)式は

$$\begin{aligned} \dot{H}_n &= - \sum_{i=0}^{n-1} A_i H_{i+1} - \sum_{K=1}^n B_{p+K} \sum_{l=1}^K (D + \Delta D)(P + \Delta P)^{K-l} \\ &\quad (Q + \Delta Q) H_l - \sum_{j=0}^{p-1} B_j G_{j+1} \end{aligned}$$



第 2.1 図 補償系

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\kappa=0}^n B_{p+\kappa} (D+\Delta D)(P+\Delta P)^\kappa E \\
& - \sum_{\kappa=1}^n B_{p+\kappa} \left\{ \sum_{\ell=1}^{\kappa} (D+\Delta D)(P+\Delta P)^{\kappa-\ell} \Delta_1^{(\ell-1)} + \Delta_2^{(\kappa)} \right\}
\end{aligned}$$

(2-33)

としよう。(2-28)式と(2-33)式との比較から

$$B_j, \quad j = 0, \dots, p-1, \quad \text{は}$$

$$[B_0, \dots, B_{p-1}] = K_G \quad (2-34)$$

となり、

$$B_{p+\kappa}, \quad \kappa = 0, \dots, n, \quad \text{は}$$

$$[(D+\Delta D)', \dots, (P+\Delta P)'(D+\Delta D)'] \begin{bmatrix} B_p' \\ \vdots \\ B_{p+n}' \end{bmatrix} = K_E'$$

(2-35)

としてそれぞれ K_G, K_E に対応し、さらに $A_i,$

$$i = 0, \dots, n-1, \quad \text{は}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=0}^{n-1} A_i H_{i+1} - \sum_{\kappa=1}^n B_{p+\kappa} \sum_{\ell=1}^{\kappa} (D+\Delta D)(P+\Delta P)^{\kappa-\ell} (Q+\Delta Q) H_\ell \\
& = K_H H
\end{aligned} \quad (2-36)$$

として K_H に対応していることがわかる。この事

実は補償器を含めた第2.1図で示される補償系のすべての極を補償器の係数行列 A_i , B_j に与えて任意に設定できることを意味している。

ここで(2-29)式で与えられる補償器出力 V のラプラス変換を求めてみる。

(2-29-1)式, (2-29-2)式をそれぞれラプラス変換して $G_1(s)$ を消去すると $V(s)$ は

$$V(s) = -\frac{1}{s^p} \left[s^n I_m + \sum_{i=0}^{n-1} A_i s^i \right]^{-1} \sum_{j=0}^{n+p} B_j s^j F(s)$$

$$= -\frac{G_c(s)}{s^p \left| s^n I_m + \sum_{i=0}^{n-1} A_i s^i \right|} F(s)$$

(2-37)

と1で得られる。(2-37)式から(2-29)式で与えられる補償器は p 形となっていることがわかる。

§ 2・4 モデル追従系

第 2・1 図の補償系において，出力追従誤差 F に対する外乱項 Δ_1 ， Δ_2 及びエラーシステムや補償器の初期値の影響を考察する。

<補題 (2・1)>

制御対象の極が S 平面の左半平面及び原点に存在し，パラメータ変動によって原点における重極の数が不変ならば

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = 0 \quad (2-38)$$

が成立し，出力定常追従誤差ベクトルは零となる。

<証明>

$\Delta_1 = 0$ ， $\Delta_2 = 0$ としてエラーシステム及び補償器の初期値だけを考慮するとき，(2-38)式が成立することは明らかである。

次に外乱項 Δ_1, Δ_2 だけに注目する。

(2-10) 式をラプラス変換して

$$\begin{aligned} F(s) &= (D + \Delta D)(sI_n - P - \Delta P)^{-1}(Q + \Delta Q)V(s) \\ &\quad + (D + \Delta D)(sI_n - P - \Delta P)^{-1}\Delta_1(s) + \Delta_2(s) \end{aligned} \quad (2-39)$$

を得、さらに $V(s) = H_1(s)$ として (2-37) 式を代入して整理すると

$$\begin{aligned} F(s) &= \left[s^p I_m + (D + \Delta D)(sI_n - P - \Delta P)^{-1}(Q + \Delta Q) \cdot \right. \\ &\quad \left. \frac{G_c(s)}{|s^k I_m + \sum_{i=0}^{k-1} A_i s^i|} \right]^{-1} s^p \left[(D + \Delta D) \cdot \right. \\ &\quad \left. (sI_n - P - \Delta P)^{-1}\Delta_1(s) + \Delta_2(s) \right] \end{aligned} \quad (2-40)$$

となる。

$$(D + \Delta D)(sI_n - P - \Delta P)^{-1}(Q + \Delta Q) = \frac{G_{TR}^F(s)}{|sI_n - P - \Delta P|} \quad (2-41)$$

$$(D + \Delta D)(sI_n - P - \Delta P)^{-1} = \frac{G_E^F(s)}{|sI_n - P - \Delta P|} \quad (2-42)$$

とし，さらに補償器の係数行列によって補償系の極を λ_i , $i=1, \dots, n+m(r+p)$, に設定し， Γ とすると，(2-40) 式は

$$F(s) = \frac{s^p |SI_n - P - \Delta P| |S^h I_m + \sum_{i=0}^{h-1} A_i S^i| G(s)}{n+m(r+p) \prod_{i=1} (s - \lambda_i)}.$$

$$\left[(D + \Delta D)(SI_n - P - \Delta P)^{-1} \Delta_1(s) + \Delta_2(s) \right]$$

(2-43)

と書くことが出来る。

(2-11) 式，(2-12) 式から $\Delta_1(s)$, $\Delta_2(s)$

はそれぞれ

$$\begin{aligned} \Delta_1(s) = & -[\Delta P(SI_n - P)^{-1}Q + \Delta Q]R_m(s) - N_1(s) \\ & - \Delta P(SI_n - P)^{-1}Z(0) \end{aligned} \quad (2-44)$$

$$\begin{aligned} \Delta_2(s) = & -\Delta D(SI_n - P)^{-1}Q R_m(s) - N_2(s) \\ & - \Delta D(SI_n - P)^{-1}Z(0) \end{aligned} \quad (2-45)$$

と 1 で得られる。

ところで

$$(D + \Delta D)(SI_n - P - \Delta P)^{-1} [\Delta P(SI_n - P)^{-1}Q + \Delta Q]$$

$$\begin{aligned}
& + \Delta D (S I_n - P)^{-1} Q \\
& = (D + \Delta D) (S I_n - P - \Delta P)^{-1} (Q + \Delta Q) - D (S I_n - P)^{-1} Q \\
& \quad (2-46)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (D + \Delta D) (S I_n - P - \Delta P)^{-1} \Delta P (S I_n - P)^{-1} + \Delta D (S I_n - P)^{-1} \\
& = (D + \Delta D) (S I_n - P - \Delta P)^{-1} - D (S I_n - P)^{-1} \quad (2-47)
\end{aligned}$$

の関係から

$$D (S I_n - P)^{-1} Q = \frac{G_{R_m}^W(s)}{|S I_n - P|} \quad (2-48)$$

$$D (S I_n - P)^{-1} = \frac{G_Z^W(s)}{|S I_n - P|} \quad (2-49)$$

とすると, (2-43) 式は

$$\begin{aligned}
F(s) &= \frac{s^p |s^R I_m + \sum_{i=0}^{R-1} A_i s^i| G(s)}{n+m(R+p) \prod_{i=1}^r (s - \lambda_i)} \Delta(s) \\
& \quad (2-50)
\end{aligned}$$

そこで

$$\begin{aligned}
\Delta(s) &= \left(\frac{|S I_n - P - \Delta P|}{|S I_n - P|} G_{R_m}^W(s) - G_R^F(s) \right) R_m(s) \\
&+ \left(\frac{|S I_n - P - \Delta P|}{|S I_n - P|} G_Z^W(s) - G_E^F(s) \right) Z(s)
\end{aligned}$$

$$+ G_E^H(s) N_1(s) + |S|_{n-P-\Delta P}| N_2(s)$$

(2-51)

となる。

制御対象の極が S 平面の左半平面及び原点に存在し、原点には P_0 重極を持つとする。このときそのパラメータ測定値によって構成されるモデルも S 平面の左半平面、および原点に極が存在し、原点には P_0 重極を持つ。仮定によって制御対象における P_0 は不変であるから (2-51) 式における $|S|_{n-P-\Delta P}| / |S|_{n-P}|$ の項の分母には、 S の項が遊離しない。

従って R_m, N_1, N_2 が $(P-1)$ 次の多項関数で与えられるとき、明らかに

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^{P+1} \Delta(s) = 0 \quad (2-52)$$

が成立する。(2-50) 式において $\Delta(s)$ の係数に s^P の項が遊離していることに注目すると、(2-52) 式から (2-38) 式が導かれる。

<証明終>

<補題 (2.2)>

制御対象の極が S 平面の左半平面及び原点に存在し, 補償系の極 λ_i の実数部を σ_i とするとき, $0_+ \leq t$ に対して

$$\lim_{\sigma_i \rightarrow -\infty} F(t) = 0 \quad (2-53)$$

が成立する。

<証明>

第2.1図で示される補償系は (2-14) 式で示される合成系の入力 J を (2-28) 式で与えられる等価系である。よって以後の議論を (2-54) 式で示される系で進める。

$$\begin{array}{c} \dot{G}_1 \\ \vdots \\ \dot{G}_p \end{array} = G_2 \quad (2-54-1)$$

$$\begin{array}{c} \dot{G}_p \\ \vdots \\ \dot{G}_1 \end{array} = F = (D + \Delta D)E + \Delta_2 \quad (2-54-2)$$

$$\dot{E} = (P + \Delta P)E + (Q + \Delta Q)H_1 + \Delta_1 \quad (2-54-3)$$

$$\begin{array}{c} \dot{H}_1 \\ \vdots \\ \dot{H}_n \end{array} = H_2 \quad (2-54-4)$$

$$H_n = K_1^G G_1 + \cdots + K_p^G G_p + K_E E + K_1^H H_1 + \cdots + K_n^H H_n$$

代入して

$$\Gamma_1 = 0 \quad (2-62)$$

を得る。(2-62)式を(2-54-1)式に代入して

$$\Gamma_2 = 0 \quad (2-63)$$

を得、同様に1を順次

$$\Gamma_p = 0 \quad (2-64)$$

$$\dot{\Gamma}_p = F = 0 \quad (2-65)$$

の関係が得られる。(2-65)式は、 $\Delta_1(s)$, $\Delta_2(s)$

から $F(s)$ を見た伝達関数行列を求めるとき、零点

を表わす s の各項式の係数と $\prod_{i=1}^{n+m(k+p)} \lambda_i$ の比が

$\alpha_i \rightarrow -\infty$ とするとき零に漸近することを意味して

いる。補題(2.1)から $F(\infty) = 0$ であり、従っ

て外乱項 Δ_1 , Δ_2 だけを考慮するとき、 $0 \leq t$

に於いて

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 0 \quad (2-66)$$

が成立する。

次に初期値が存在するとき、 F の応答は

(2-54)式から

$$F = \begin{bmatrix} 0 & | & D + \Delta D & | & 0 \end{bmatrix} \varepsilon^{A^t} \begin{bmatrix} G(0) \\ \hline E(0) \\ \hline H(0) \end{bmatrix} \quad (2-67)$$

として表わすことができる。Aの固有値 λ_i の実数部を α_i とすると、明らかに $0_+ \leq \alpha_i$ に $\alpha_i > 0$ として

$$\lim_{\sigma_i \rightarrow -\infty} F(t) = 0 \quad (2-68)$$

が成立する。従って(2-66)式、(2-68)式から外乱項 Δ_1 、 Δ_2 及び初期値 $G(0)$ 、 $E(0)$ 、 $H(0)$ が存在するとき(2-53)式が成立する。

<証明終>

以上の準備のもとに、定理(2.2)を示す。

<定理(2.2)>

制御対象の極がS平面の左半平面及び原点に存在し、パラメータ変動によって原点における重極の数が不変ならば、補償系の極 λ_i の設定によって(2-13)式を満足させることができる。

<証明>

補題(2.2)から

$$\lim_{\sigma_j \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^{\infty} [F_i(t)]^2 dt = 0 \quad (2-69)$$

ここで $t_0 \neq 0$, $i=1, \dots, m$, $j=1, \dots, n+m(r+p)$

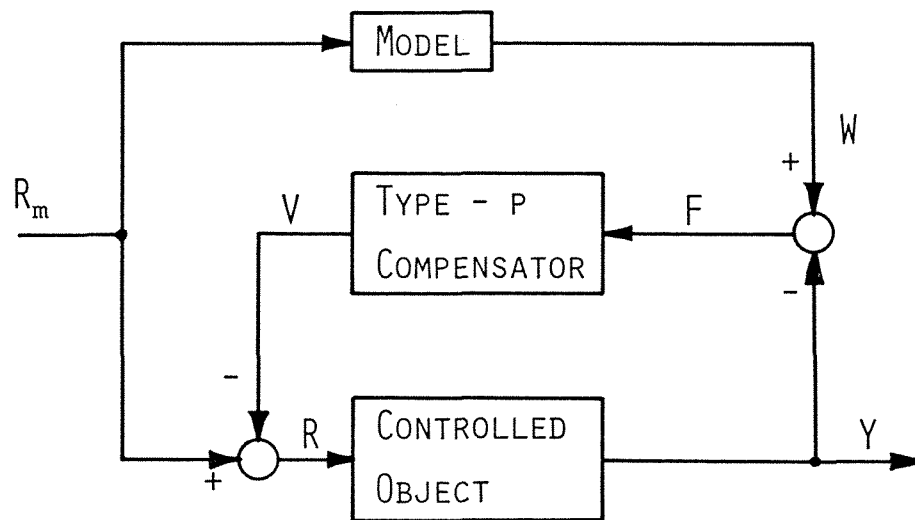
が成立することは明らかである。よって σ_j の設定によって(2-13)式を満足させることができる。

<証明終>

定理(2.2)から, 第2.2図に示される系を構成するとき, 出力定常追従誤差は零となり, 補償器の係数によって(2-13)式の意味で任意の追従精度が得られる。第2.2図の系をモデル追従系と称する。

§2.5 モデル追従系を用いた設計¹⁴⁾

(2-1)式の制御対象の入出力特性を指定の



第 2.2 図 モデル追従系

特性に設定する問題を考える。

系の設計とは，指定の入出力特性を得るためのフィードフォワード要素及びフィードバック要素を求めることであり，パラメータ変動や外乱を考慮せず，かつすべての状態を必要とする従来の設計法は，(2-5)式のモデルに対してのみ直接適用することができる。その結果，入力 R_m を

$$\begin{cases} \dot{L} = A_L L + B_L \bar{R}_m \\ \dot{T} = A_T T + B_T Z \\ R_m = C_L L + C_T T + C_Z Z + C_{\bar{R}_m} \bar{R}_m \end{cases} \quad (2-70)$$

で与えられるとき，モデルは指定の入出力特性を得ることができる。この場合， $R_m(s)$ は

$$\begin{aligned} R_m(s) &= [I_m - \{C_T(SI - A_T)^{-1}B_T + C_Z\}(SI_n - P)^{-1}Q]^{-1} \cdot \\ &\quad [C_L(SI - A_L)^{-1}B_L + C_{\bar{R}_m}] \bar{R}_m(s) \\ &= G_L(s) \bar{R}_m(s) \end{aligned} \quad (2-71)$$

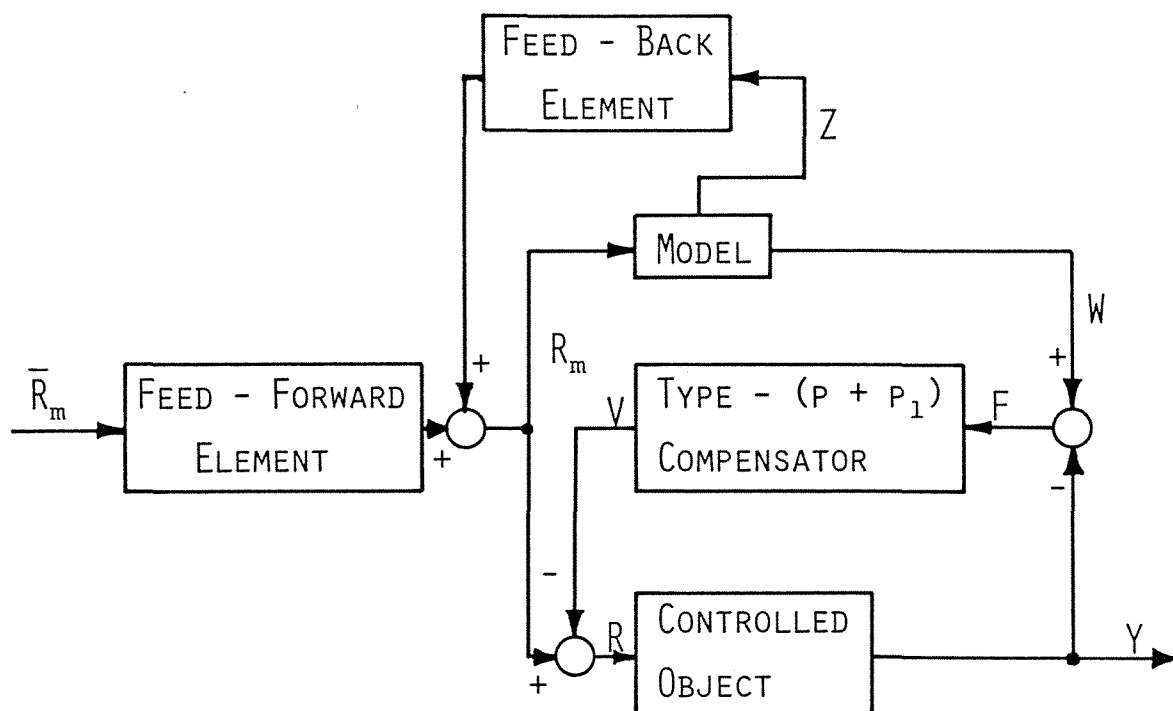
として表わすことができる。 $G_L(s)$ が原点に p_i 重極を持つとき， $(p + p_i)$ 形補償器を用いる

第2.3図に示される系を構成する。第2.3図の系において、 \bar{R}_m が $(p-1)$ 次の q 項関数で与えられるとき、エラーシステムに対する外乱項は (2-44) 式、(2-45) 式における $R_m(s)$ を (2-71) 式で置き換えた形となる。この場合も明らかに出力定常追従誤差は零となり、(2-13) 式の意味の任意の追従精度で制御対象の出力 Y を指定の特性が与えられるモデルの出力 W に追従させることができる。

従って、制御対象の入出力特性を指定の特性に設定する問題は、第2.3図に示される系を構成することによって解決される。

これまで補題(2.1), (2.2), および定理(2.2)において、制御対象の極は s 平面の左半平面及び原点に存在し、パラメータ変動によって原点における重極の数は不変であるとの仮定がなされた。

制御対象が原点に p 重極を持ち、パラメータ変



第 2.3 図 モデル追従系に於ける設計

動によって $(P_0 - \bar{P}_0)$ 重極に変化し得とする。このとき (2-51) 式における $|S|_{In-P-\Delta P}| / |S|_{In-P}|$ の項の分母に $S^{\bar{P}_0}$ の項が遊離する。従って補償器を $(P + \bar{P}_0)$ 形とすると、補題 (2.1), (2.2), 定理 (2.2) は成立する。

制御対象の極が S 平面の右半平面に存在して不安定なとき、そのパラメータ測定値から構成されるモデルも不安定となる。しかしこの場合、当然制御対象を安定にするための設計が要求される。

(2-70) 式によってモデルが安定になるとき、第 2.3 図の系においては補題 (2.1), (2.2) 及び定理 (2.2) が成立する。

§ 2.6 補償器係数の決定

エラーシステムに対し補償器を通して出力をフィードバックして補償系を構成するとき、補償系の特性方程式の各係数には、パラメータ変動分

ΔP , ΔQ , ΔD が含まれる。これ等の変動分の大
きさ及び符号は一般に未知であって、補償器
の係数によって補償系の極を設定するとき、その
取り扱いが問題となる。

ところで代数方程式の根は係数の連続関数であ
って、係数の変動が微小なるとき、根の絶対値の
変動もまた微小であることが知られている。¹⁵⁾

従って、変動分を無視した状態で、補償系の極
の実数部を十分負に設定するならば、変動分が存
在しても指定の追従精度を維持することができる。

以上の結果、補償器係数の具体的な設定手順は
次のようになる。

1) 入力、外乱の最高次数を $(p-1)$ 次とし

て補償器を p 形とする。

2) (2-13) 式の追従精度を考慮して補償系

の極 λ_i , $i=1, \dots, n+m(n+p)$, を仮定し

(2-28) 式に於けるフィードバック係数

行列 K_G , K_E , K_H を求める。

3) 変動分 ΔP , ΔQ , ΔD を無視して (2-34)

～ (2-36) 式から係数行列 A_i , B_i を求める。

4) 得られたモデル追従系をシミュレーション

して必要なら λ_i を選べられし、以上の手順を繰返す。

§ 2. 7 補償器次数の低減

2. 7. 1 制御対象の状態変数が直接観測できる場合

これより制御対象においては出力だけが直接観測でき、状態変数は直接観測できないとの仮定で議論が進められてきた。ここで、出力以外にいくつかの状態変数が直接観測される場合も補償器の次数を下げる観点から検討する。

今、制御対象の状態変数 $X' = [X_1 \text{-----} X_n]'$ の中で $X_{a1}, \text{-----}, X_{ar}$ の r 個が直接観測されるものとする。このときモデルにおいてすべての状態変数が直接観測できるので、エラーシステムにおいても $E' = [E_1 \text{-----} E_n]'$ の中で $E_{a1}, \text{-----}, E_{ar}$ の r 個を直接観測することができ。

これを

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} E_{a1} \\ \vdots \\ E_{ar} \end{bmatrix} = \bar{D} E \quad (2-72)$$

として表わす。

(2-29)式に対応して、(2-73)式で表わされる補償器を考える。

$$\begin{cases} H_1^{(\alpha)} + \sum_{i=0}^{\alpha-1} A_i H_1^{(i)} = - \sum_{j=0}^{p-1} B_j G_1^{(j)} - \sum_{k=0}^{\alpha} C_k \begin{bmatrix} \bar{F} \\ \vdots \\ \bar{F} \end{bmatrix}^{(k)} \\ G_1^{(p)} = F \end{cases} \quad (2-73)$$

ここで A_i, B_j はそれぞれ $(m \times m)$ 、 C_k は $[m \times (m+r)]$ の定数行列である。

(2-72)式から

$$\begin{bmatrix} \bar{F} \\ \hline F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{D} \\ \hline D + \Delta D \end{bmatrix} E + \begin{bmatrix} 0 \\ \hline \Delta_2 \end{bmatrix} \quad (2-74)$$

と (2-74) より

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{F} \\ \hline F \end{bmatrix}^{(K)} &= \begin{bmatrix} \bar{D} \\ \hline D + \Delta D \end{bmatrix} (P + \Delta P)^K E \\ &+ \sum_{\ell=1}^K \begin{bmatrix} \bar{D} \\ \hline D + \Delta D \end{bmatrix} (P + \Delta P)^{K-\ell} (Q + \Delta Q) H_1^{(\ell-1)} \\ &+ \sum_{\ell=1}^K \begin{bmatrix} \bar{D} \\ \hline D + \Delta D \end{bmatrix} (P + \Delta P)^{K-\ell} \Delta_1^{(\ell-1)} + \begin{bmatrix} 0 \\ \hline \Delta_2^{(K)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-75)$$

の関係が得られる。(2-73)式に(2-75)式,
(2-31)式,(2-75)式を代入すると

$$\begin{aligned} \dot{H}_\alpha &= - \sum_{i=0}^{\alpha-1} A_i H_{i+1} - \sum_{K=1}^{\alpha} C_K \sum_{\ell=1}^K \begin{bmatrix} \bar{D} \\ \hline D + \Delta D \end{bmatrix} (P + \Delta P)^{K-\ell} \\ &\quad (Q + \Delta Q) H_\ell - \sum_{j=0}^{P-1} B_j G_{j+1} \\ &- \sum_{K=0}^{\alpha} C_K \begin{bmatrix} \bar{D} \\ \hline D + \Delta D \end{bmatrix} (P + \Delta P)^K E \end{aligned}$$

$$- \sum_{K=1}^{\alpha} C_K \left\{ \sum_{l=1}^K \left[\frac{\bar{D}}{D+\Delta D} \right] (P+\Delta P)^{K-l} \Delta_1^{(l-1)} + \left[\frac{0}{\Delta_2^{(K)}} \right] \right\}$$

(2-76)

を得る。

(2-28)式との比較から, $B_j, j=0, \dots, p-1,$

は, (2-34)式と同様に $[B_0 \dots B_{p-1}] = K_E$

として定まる。次に, $C_K, K=0, \dots, \alpha,$ が

$$\left[\left[\frac{\bar{D}}{D+\Delta D} \right]', \dots, (P+\Delta P)^{\alpha} \left[\frac{\bar{D}}{D+\Delta D} \right]' \right] \begin{bmatrix} C'_0 \\ \vdots \\ C'_\alpha \end{bmatrix} = K'_E \quad (2-77)$$

から K_E に対応して定まるならば, $A_i, i=0, \dots,$

$\alpha-1,$ は

$$- \sum_{i=0}^{\alpha-1} A_i H_{i+1} - \sum_{K=1}^{\alpha} C_K \sum_{l=1}^K \left[\frac{\bar{D}}{D+\Delta D} \right] (P+\Delta P)^{K-l} (Q+\Delta Q) H_l = K_H H \quad (2-78)$$

として K_H に対応して定まり, 補償系のすべての極は, 補償器の係数 A_i, B_j, C_K によって設定することができる。

(2-77) 式から C_0, \dots, C_α が定まる必要十分条件は明らかに

$$\text{rank} \left[\begin{bmatrix} \bar{D} \\ D + \Delta D \end{bmatrix}', \dots, (P + \Delta P)^\alpha \begin{bmatrix} \bar{D} \\ D + \Delta D \end{bmatrix}' \right] = n$$

(2-79)

で与えられる。(2-79) 式を満足する最小の α を \bar{r} とすると、補償器の次数は $[m \times (\bar{r} + p)]$ 次元となる。

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \bar{D} \\ D + \Delta D \end{bmatrix} = n \quad (2-80)$$

のとき、明らかに $\bar{r} = 0$ が得られるが、一般の場合、解析的に \bar{r} を求めることは困難である。しかし

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \bar{D} \\ D + \Delta D \end{bmatrix} > \text{rank}(D + \Delta D) \quad (2-81)$$

のとき、

$$\bar{r} < r \quad (2-82)$$

となることが予想され、制御対象の状態が直接観

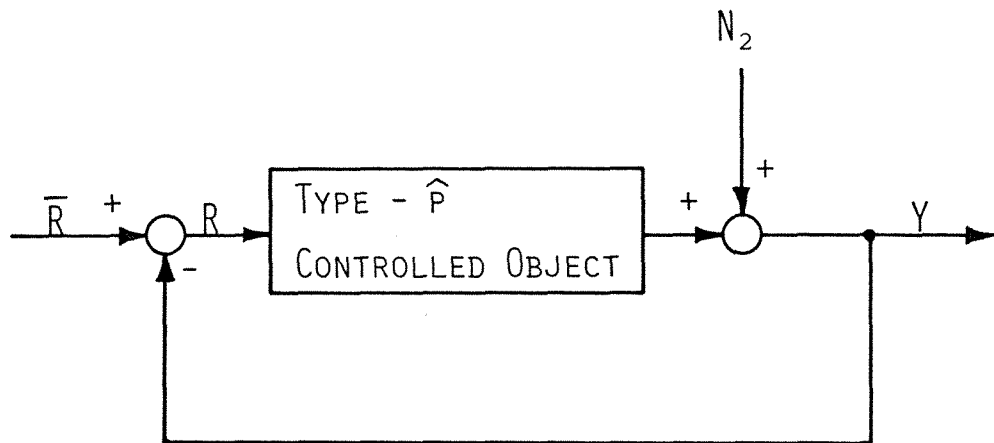
測されない場合と比較すると、 $m \times (n - \bar{n})$ 次元だけ補償器の次数を低減することができる。

2・7・2 制御対象が積分特性を持つ場合

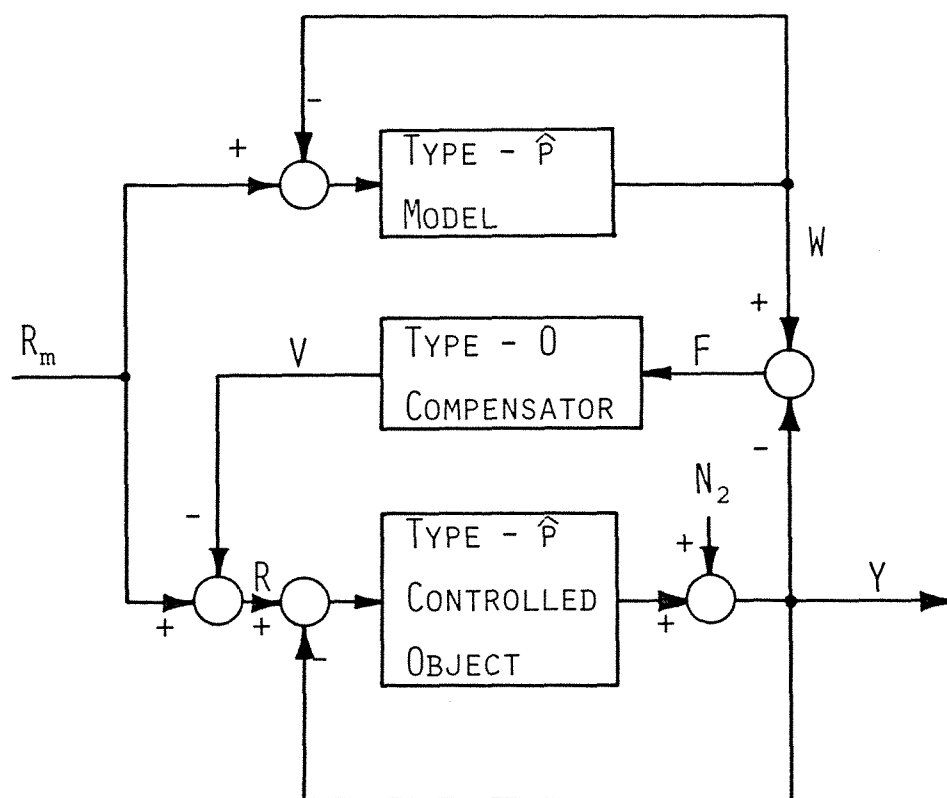
制御対象の入出力伝達関数行列が \hat{P} 形で、かつ外乱 $N_1 = 0$ のとき、 $R = \bar{R} - Y$ として構成される第2・4図のフィードバック系に於いては、 \bar{R} 、 N_2 がそれぞれ $(\hat{P} - 1)$ 次の多項関数で与えられるとき、 \bar{R} に対する Y の定常誤差は零となる。

今、第2・4図の系を制御対象と見なして第2・5図のモデル追従系、あるいは \hat{P} 形制御対象に対して第2・6図のモデル追従系を、それぞれ補償器を0形として構成してみる。

この場合、 R_m, N_2 が $(\hat{P} - 1)$ 次の多項関数で与えられるとき、(2-50)式に於ける $\Delta(s)$ の係数に $s^{\hat{P}}$ の項が遊離し、出力定常追従誤差は零となる。従って、 $N_1 = 0$ で R_m, N_2 がそれ

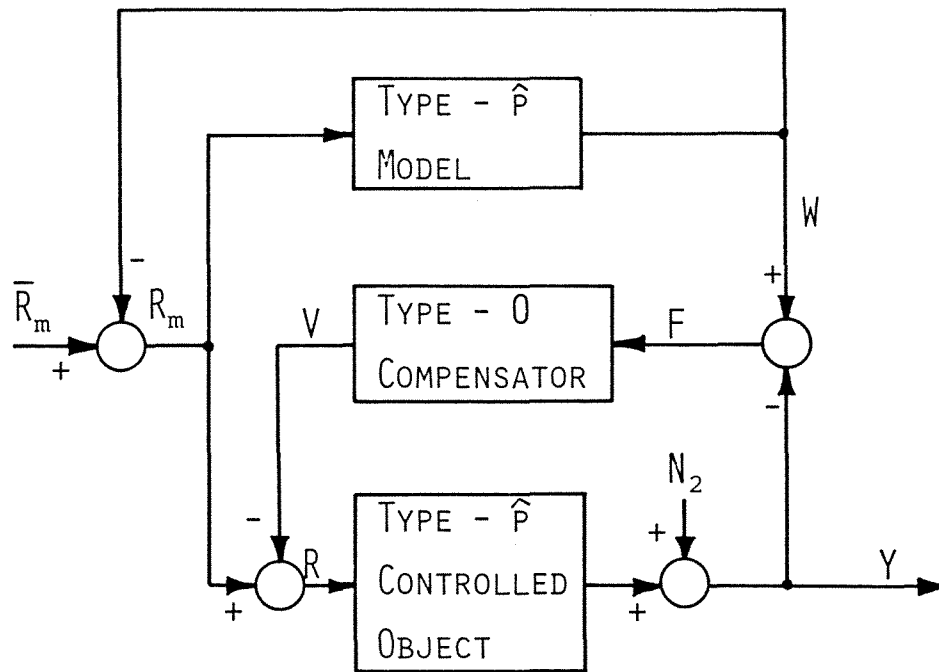


第2.4図 \hat{P} 形制御対象に対する出力
フィードバック系



第 2.5 図 \hat{P} 形制御対象に対するモデル

IL 追従系



第 2.6 図 \hat{P} 形制御対象に対するモデル
追従系

それ $(p - 1)$ 次の多項関数で与えられる場合,

$$p > \hat{p} \quad (2-83)$$

ならば補償器を $(p - \hat{p})$ 形として,

$$p \leq \hat{p} \quad (2-84)$$

ならば補償器を 0 形として, 既に示されたモデル
追従系のすべての性質を満足させることができる。

§ 2. 8 実験結果

2. 8. 1 極, 零点の設定 ^{16), 17)}

制御対象は

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -(0.4 + \Delta P_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} R$$

$$Y = \begin{bmatrix} (1 + \Delta D_0) & (1 + \Delta D_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2-85)$$

で表わされ, 外乱は存在しないものとする。

(2-85) 式の入出力伝達関数は

$$G_o(s) = \frac{(1 + \Delta D_1)s + (1 + \Delta D_0)}{s(s + 0.4 + \Delta P_1)} \quad (2-86)$$

と 1 で表わされる。

ここで (2-85) 式によりて出力フィードバック系を構成し、その入出力伝達関数をステップ入カに戻して

$$G_m(s) = \frac{0.2s + 1}{s^2 + s + 1} \quad (2-87)$$

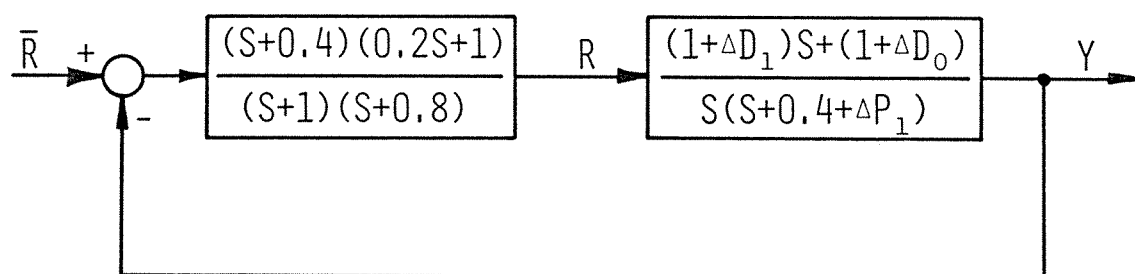
に設定する問題を考える。

従来の方法によると、第2.7図の系が得られ、パラメータ変動分が存在しないとき、その入出力伝達関数は (2-87) 式となる。

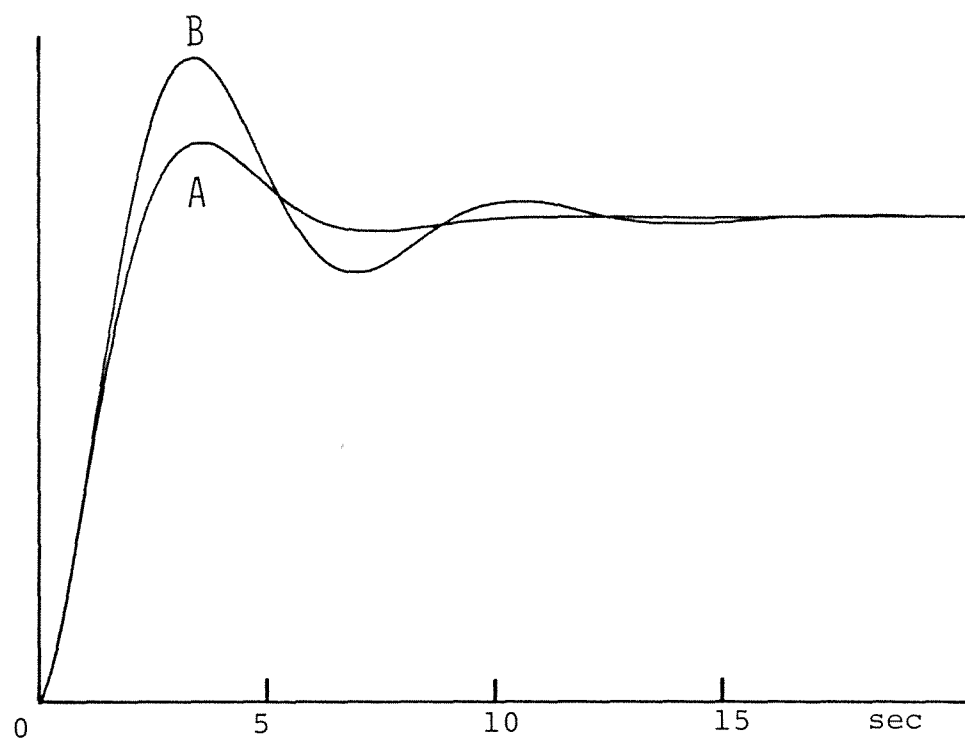
第2.8図に示ける A は、入出力伝達関数が (2-87) 式の出力ステップ応答、B はパラメータ変動分をそれぞれ

$$\Delta P_1 = -0.1, \quad \Delta D_0 = 0.2, \quad \Delta D_1 = -0.2$$

と 1 応答するときの第2.7図に示ける Y のステップ応答



第2.7図 極，零点相殺による設計



第2.8図 Aは(2-87)式の伝達関数の出カステップ応答, Bは第2.7図の系の出カステップ応答

とそれぞれ示している。

この場合オーバーシュートに注目すると、Aはふふふそ16%、Bはふふふそ33%を示し、パラメータ変動によって17%の誤差を生じている。

この問題をモデル追従系を構成して解いてみる。

(2-88)式で示されるモデルを作り

$$\begin{bmatrix} \dot{Z}_1 \\ \dot{Z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} R_m$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} \quad (2-88)$$

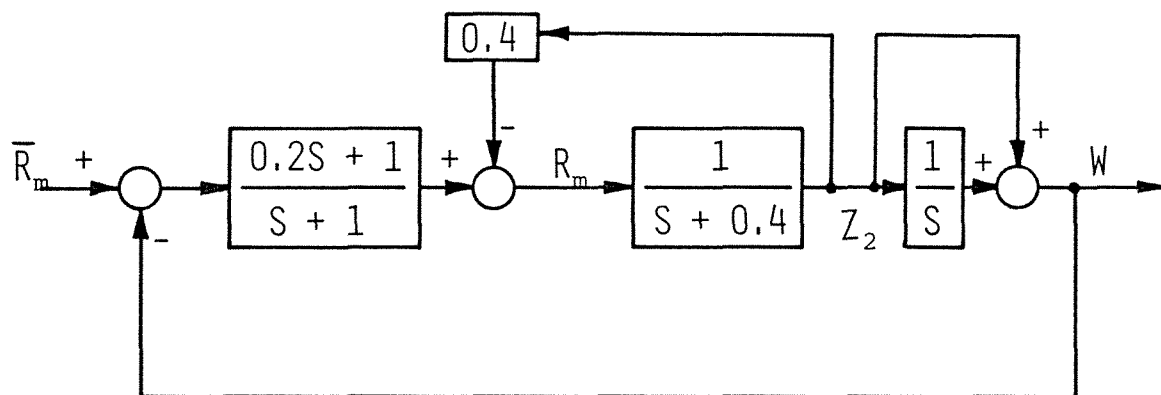
さらに

$$\dot{L} = -L + \bar{R}_m - W \quad (2-89)$$

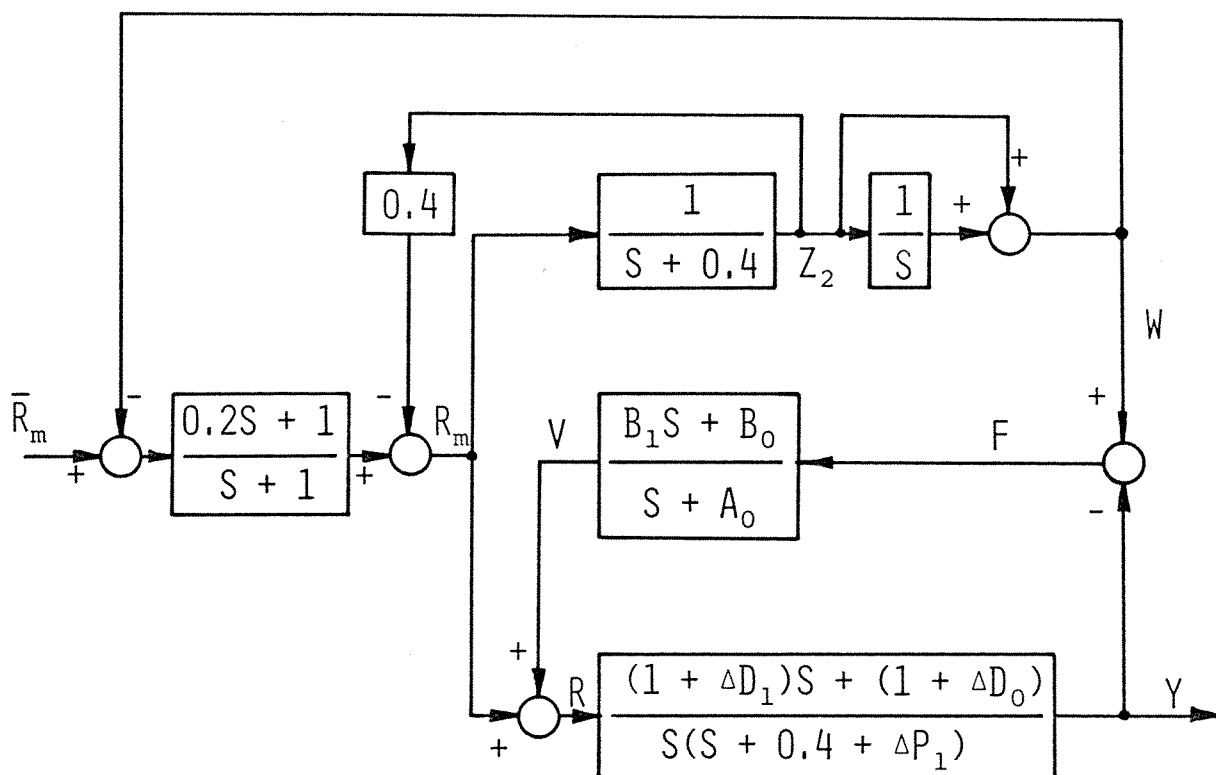
$$R_m = 0.8L - 0.4Z_2 + 0.2(\bar{R}_m - W)$$

として第2・9図の系を構成するとき、モデルの入出力伝達関数は(2-87)式となる。

R'_m がステップ関数のとき、第2・6図から補償器を0形として第2・10図の系をアナログ計算機によって構成し、以下の実験結果を得た。



第2.9図 モデルに対する設計



第2.10図 第2.9図のモデルを用いた
モデル追従系

第2.11図にみけるAはモデルの出力Wのステップ応答，B及びCは補償器係数をそれぞれ

$$[A_0, B_0, B_1] = [1.0, 2.0, 2.6]$$

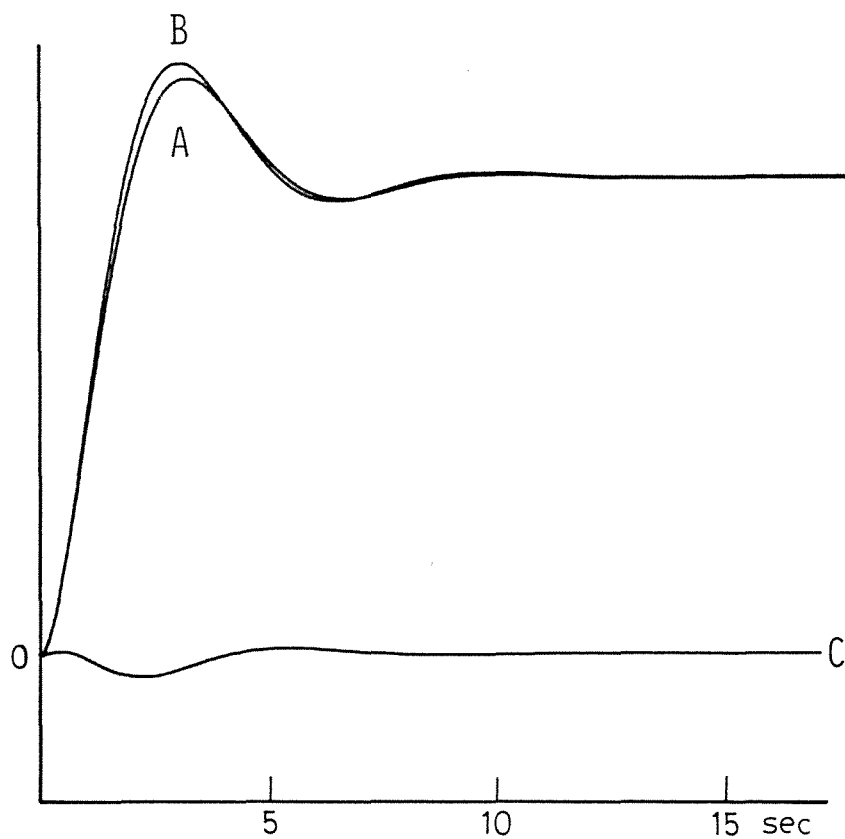
として，パラメータ変動分を無視したとき補償系の極を $[-1, -1, -2]$ に設定した場合のY及びFのステップ応答をそれぞれ示している。

第2.12図にみけるAはモデルの出力Wのステップ応答，B及びCは補償器係数をそれぞれ

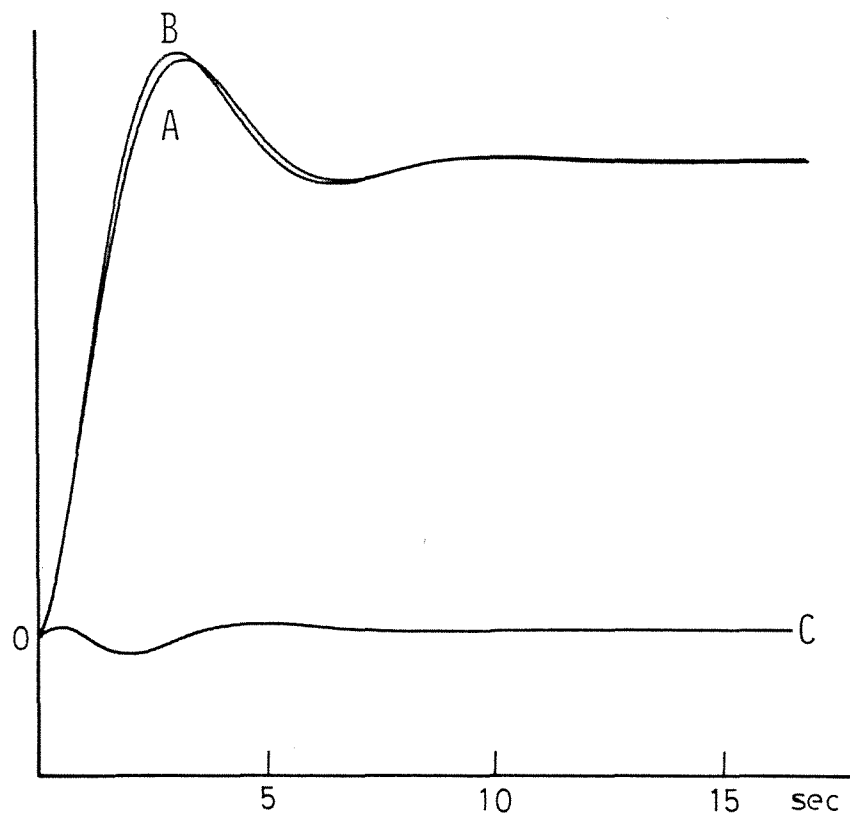
$$[A_0, B_0, B_1] = [7.7, 18.0, -0.1]$$

として，パラメータ変動分を無視したとき補償系の極を $[-2, -3, -3]$ に設定した場合のY及びFのステップ応答をそれぞれ示している。

極，零点の相殺による設計法を適用するとき，可制御性，あるいは可観測性，あるいはその両方が侵されるが，ほとんどの場合において不都合は生じないことが知られて¹⁸⁾おり，有効な設計法である。しかし，この設計法を実際の制御対象に対して直接適用することは第2.8図の結果から明らか



第2.11図 Aはモデルの出力 W のステップ応答, B, Cは第2.10図のモデル追従系において補償系の極を $[-1, -1, -2]$ に設定した場合の Y, F のステップ応答



第2.12図 Aはモデルの出力 W のステップ応答, B, Cは第2.10図のモデル追従系において補償系の極を $[-2, -2, -3]$ に設定した場合の Y, F のステップ応答

なように適当ではなく、モデル追従系に適用するときその有効性が発揮される。

2・8・2 S平面の右半平面に零点を持つ系

入出力伝達関数の零点を変更するためには、通常 2.8.1 の実験に見られるように相殺の手法が用いられる。しかし、S平面の右半平面に存在する零点に対し相殺の手法を適用することはできず、現在これに対する有効な手法は知られていない。

S平面の右半平面の零点がパラメータ変動によって生じると解釈すると、モデル追従系を構成することによってその入出力特性は改善されることが予想される。

今、制御対象は

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 + \Delta D_1 \\ 1 \end{bmatrix} R$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad (2-90)$$

で表わされ，外乱は存在しないものとする。

(2-90) 式の入出力伝達関数は

$$G_o(s) = \frac{(0 + \Delta D_1)s + 1}{s^2 + 0.4s + 1} \quad (2-91)$$

となり， $\Delta D_1 = -1$ のとき (2-91) 式は

$$G_o(s) = \frac{-s + 1}{s^2 + 0.4s + 1} \quad (2-92)$$

となって， s 平面の右半平面に零点が存在する。

(2-90) 式の制御対象の出力を

$$\begin{bmatrix} \dot{Z}_1 \\ \dot{Z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} R_m$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} \quad (2-93)$$

あるいは入出力伝達関数で

$$G_m(s) = \frac{1}{s^2 + 0.4s + 1} \quad (2-94)$$

で示されるモデルの出力のステップ応答に追従させる。

第2.13図の系をアナログ計算機で構成し，以下の実験結果を得た。なおこの場合，第2.5図から補償器は0形としたい。

第2.14図におけるAはモデルの出力 W のステップ応答，Bは(2-90)式における制御対象の出力 Y のステップ応答をそれぞれ示している。

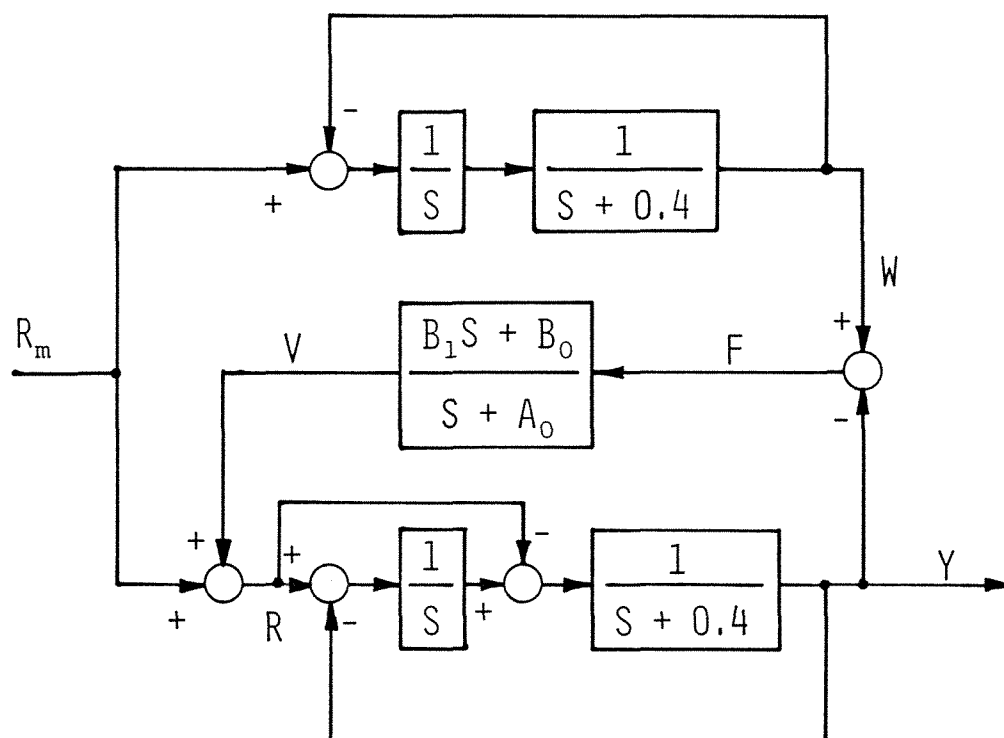
第2.15図におけるAはモデルの出力 W のステップ応答，B及びCは第2.13図において補償器係数をそれぞれ

$$[A_0, B_0, B_1] = [6.5, -2.5, 1.9]$$

として補償系の極を $[-1, -2, -2]$ に設定した場合の Y 及び F のステップ応答をそれぞれ示している。

第2.16図におけるAはモデルの出力 W のステップ応答，B及びCは補償器係数をそれぞれ

$$[A_0, B_0, B_1] = [25.7, 1.3, 17.1]$$



第2.13図 (2-90)式の制御対象に
対するモデル追従系

として補償系の極を $[-3, -3, -3]$ に設定した場合の Y 及び F のステップ応答をそれぞれ示している。

第 2.17 図における A はモデルの出力 W のステップ応答, B 及び C は補償器係数をそれぞれ

$$[A_0, B_0, B_1] = [89.0, 36.0, 74.4]$$

として補償系の極を $[-5, -5, -5]$ に設定した場合の Y 及び F のステップ応答をそれぞれ示している。

§ 2.9 結 言

パラメータ変動や外乱の存在する制御対象に対してモデル追従系を構成することにより, 厳密な数式モデル及びすべての状態変数を必要とする設計法を実際の制御対象に対しても容易に適用することができるとを示した。

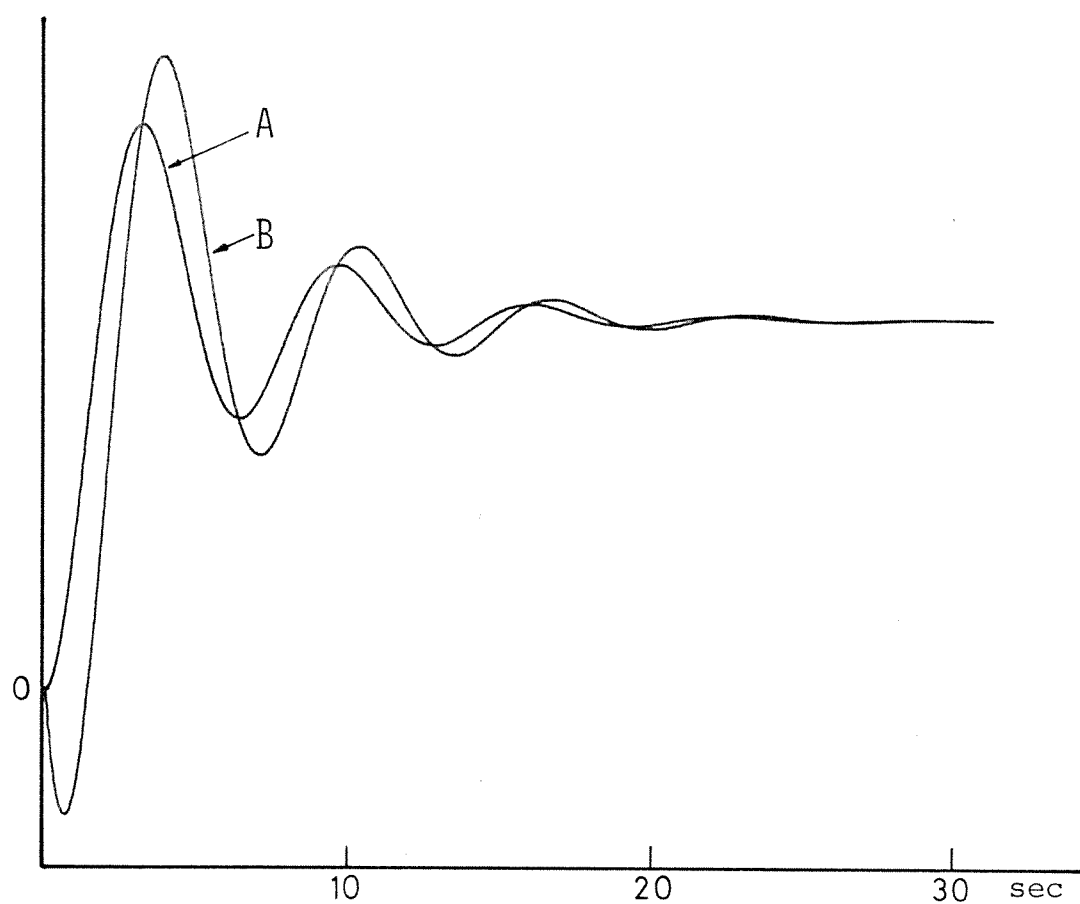
これより入力，外乱を $(p-1)$ 次の多項関数に限定したが，第2.2図のモデル追従系に $(p-1)$ 次より高次の多項関数が入力，外乱として加えられるとき， p 次以上の項に対して出力定常追従誤差が残る。

しかし，補題(2.2)の証明において明らかに，補償系の極の実数部を負に大に設定するとき Δ_1, Δ_2 から F を見た伝達関数行列は零に漸近する。

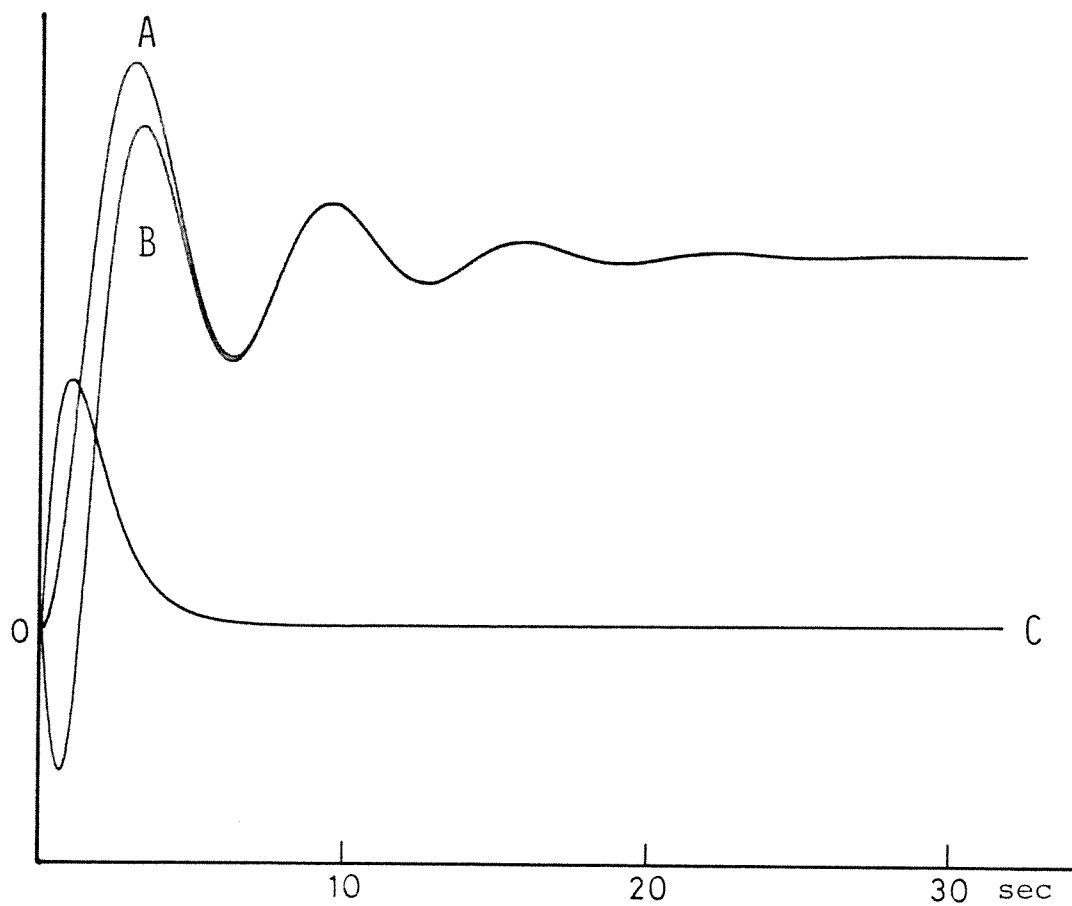
従って，この場合においては

$$\int_{t_0}^{t_1} [F_i(t)]^2 dt \leq \delta'_i \quad i=1, \dots, m \quad (2-95)$$

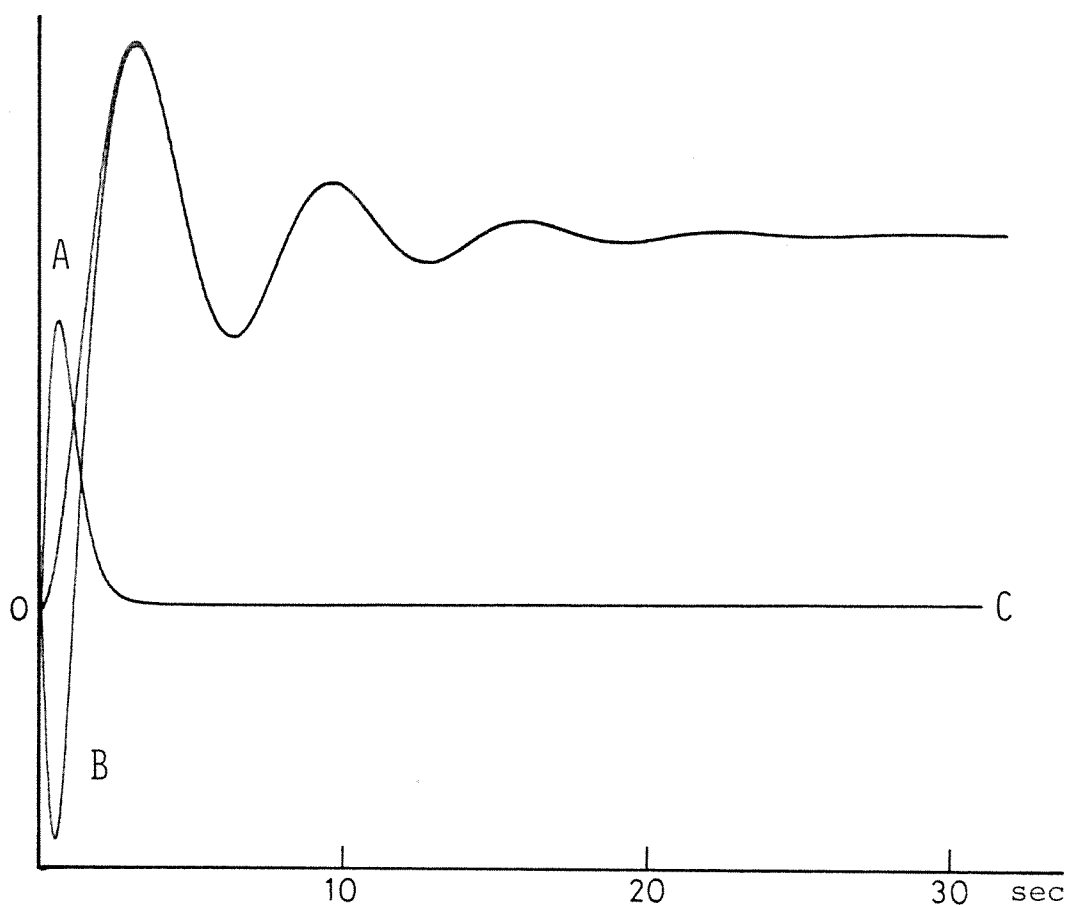
ここで $0_+ \leq t_0$ ， $t_1 < \infty$ ， δ'_i は任意の正の実数の意味で任意に出力追従精度を設定することができ。



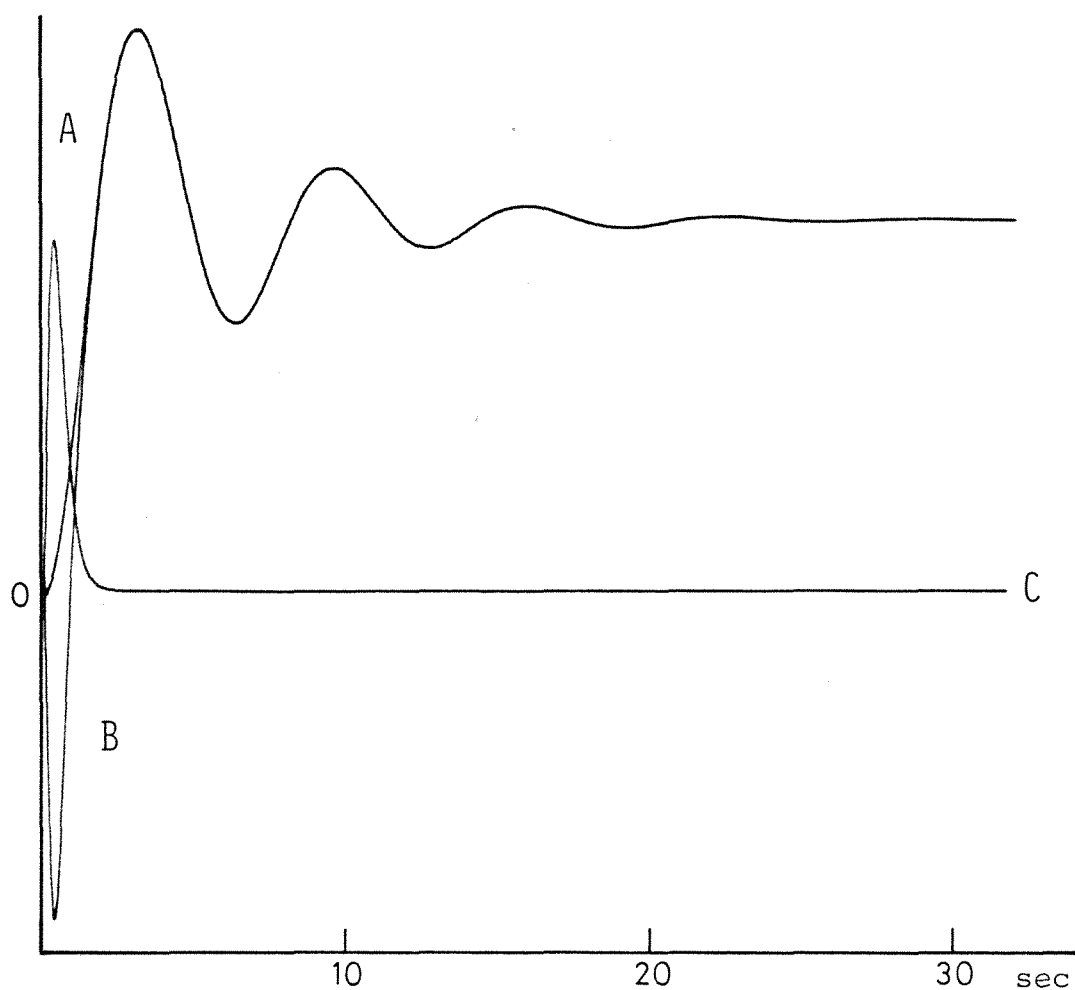
第2.14図 Aはモデルの出力 W のステップ応答, Bは(2-90)式の制御対象の出力 Y のステップ応答



第2.15図 Aはモデルの出力 W のステップ応答, B, Cは第2.13図のモデル追従系において補償系の極を $[-1, -2, -2]$ に設定した場合の Y , F のステップ応答



第2.16図 Aはモデルの出力 W のステップ応答, B, Cは第2.13図のモデル追従系において補償系の極を $[-3, -3, -3]$ に設定した場合の Y, F のステップ応答



第2.17図 Aはモデルの出力 W のステップ応答, B, Cは第2.13図のモデル追従系において補償系の極を $[-5, -5, -5]$ に設定した場合の Y, F のステップ応答

第3章 制御対象と異なる次数のモデルを用 いたモデル追従系 (19)~(21)

§ 3・1 序 論

第2章においてパラメータ変動や外乱の存在する制御対象を確定したパラメータを持ち、かつ外乱の存在しない理想的な制御対象と見なせるようにする方法としてのモデル追従系を示した。

これに対し本章においては、1入力1出力の制御対象の出力を指定の入出力特性を持ったモデルの出力に直接追従させる、即ち設計法としてのモデル追従系の構成を示す。

本章で示されるモデル追従系においても第2章で示されたモデル追従系と同様に、モデルの入力及び制御対象に加わる外乱が有限次数の多項関数で与えられるとき、パラメータ変動や外乱の存在

にもかかわらず

(1) 出力定常追従誤差は零となる,

(2) 出力追従精度を任意に設定することができ
る,

の特徴を持っている。

従って, 本章で示されるモデル追従系は制御対象に与えるパラメータ変動や外乱に関し, 極めて低感度とするこゝのできる設計法となっている。

本章で示されるモデル追従系に酷似した系として文献[5]が知られているが, 両者の比較は3.8節で述べる。

§ 3.2 エラーシステム

制御対象は1入力1出力で(3-1)式の標準形で与えられるものとする。

$$\begin{cases} \dot{X} = (P + \Delta P)X + QR + N_1 \\ Y = (D + \Delta D)X + N_2 \end{cases} \quad (3-1)$$

ここで X は n 次元状態ベクトル, R はスカラー
 入力, Y はスカラー出力, Q は $(n \times 1)$ の行列,
 P, D はそれぞれ $(n \times n), (1 \times n)$ のパラメ-
 タ測定値からなる行列, $\Delta P, \Delta D$ はそれぞれ $(n$
 $\times n), (1 \times n)$ のパラメ-タ変動分を表わす行列
 で

$$P + \Delta P = \left[\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \circ & & \circ \\ & \diagdown & \\ \circ & & \circ \end{array} & \begin{array}{ccc} 1 & & \circ \\ & \diagdown & \\ & & \circ \end{array} \\ \hline P_0 + \Delta P_0 \text{ ----- } P_{n-1} + \Delta P_{n-1} \end{array} \right],$$

$$Q = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{array} \right], \quad D + \Delta D = \left[D_0 + \Delta D_0 \text{ ----- } D_{n-1} + \Delta D_{n-1} \right]$$

と与えられる, N_1 は n 次元外乱ベクトル, N_2 は
 スカラー外乱で, それぞれ

$$N_1 = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{i!} K_i^1 t^i \square(t) \quad (3-2)$$

$$N_2 = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{i!} K_i^2 t^i \square(t) \quad (3-3)$$

ここで K_i^1 は $(n \times 1)$ の定数行列, K_i^2 はスカラー定数, $\square(t)$ は単位ステップ関数と示される $(p-1)$ 次多項関数で与えられるものとする。

(3-1) 式の制御対象が可制御であることは明らかであるが, さらに以下の条件を満足するものとする。

(イ) 対 $[P + \Delta P, D + \Delta D]$ は可観測の条件を満足する。

$$(ロ) \quad \text{rank} \left[\begin{array}{c|c} P + \Delta P & Q \\ \hline D + \Delta D & 0 \end{array} \right] = n+1 \quad (3-4)$$

(ハ) 出力 Y だけを直接観測することができる。

(3-4) 式はこの場合, 入出力伝達関数が零の零点を持たないことを意味している。

次に指定の多項関数応答を示す m 次のモデルを (3-5) 式の正準形で与え, その入出力伝達関

数は 0 形とし，極は S 平面の左半平面に存在するものとする。

$$\begin{cases} \dot{Z}^m = A Z^m + B R_m \\ W = C Z^m \end{cases} \quad (3-5)$$

ここで Z^m は m 次元状態ベクトル， R_m はスカラー入力， W はスカラー出力， A ， B ， C はそれぞれ $(m \times m)$ ， $(m \times 1)$ ， $(1 \times m)$ の行列で

$$A = \begin{bmatrix} \begin{array}{cccc} \circ & | & \circ & \cdots & \circ \\ | & & & & | \\ \circ & \cdots & \circ & & | \\ A_0 & \cdots & & & A_{m-1} \end{array} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} \circ \\ | \\ \circ \\ | \end{bmatrix}, \quad C = [C_0 \cdots C_{m-1}]$$

として与えられる，入力 R_m は (3-6) 式の $(p-1)$ 次多項関数で与えられるものとする。

$$R_m = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{i!} K_i t^i \square(t) \quad (3-6)$$

モデルにおいては出力 W 及びすべての状態 Z^m を直接観測できるものとする。

3. 2. 1 モデルの次数が制御対象の次数より低い場合

(3-5) 式のモデルにおいて, Z_{m+1} は

$$Z_{m+1} = [A]_0^{m-1} Z^m + R_m \quad (3-7)$$

$$\text{ここで } [A]_0^{m-1} = [A_0 \text{ ----- } A_{m-1}]$$

である, 順次

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{Z}_{m+1} = Z_{m+2} \\ \vdots \\ \dot{Z}_{n-1} = Z_n \\ \dot{Z}_n = \hat{R}_m \end{array} \right. \quad (3-8)$$

として $(n-m)$ 次元ベクトル

$$\bar{Z}^m = \begin{bmatrix} Z_{m+1} \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix}$$

と定めると, \bar{Z}^m は

$$\bar{Z}^m = L_A Z^m + \sum_{i=0}^{n-m-1} L_i R_m^{(i)} \quad (3-9)$$

ここで

$$L_A = \begin{bmatrix} [A]_0^{m-1} \\ [A]_0^{m-1} A \\ \vdots \\ [A]_0^{m-1} A^{n-m-1} \end{bmatrix}, \quad L_i = \begin{bmatrix} \left. \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right\} i \\ \vdots \\ [A]_0^{m-1} B \\ \vdots \\ [A]_0^{m-1} A^{n-m-i-2} B \end{bmatrix}$$

\hat{R}_m は

$$\hat{R}_m = [A]_0^{m-1} A^{n-m} Z^m + \sum_{i=0}^{n-m} [A]_0^{m-1} A^{n-m-i-1} B R_m^{(i)}$$

(3-10)

としてそれぞれ Z^m , R_m およびその微分項によつ

表わすことができる。

n 次元ベクトル \bar{Z} と

$$\bar{Z} = \begin{bmatrix} Z^m \\ \hline \bar{Z}^m \end{bmatrix} \quad (3-11)$$

とすると, \bar{Z} は

$$\begin{cases} \dot{\bar{Z}} = \bar{A} \bar{Z} + \bar{B} \hat{R}_m \\ W = \bar{C} \bar{Z} \end{cases} \quad (3-12)$$

ここで \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} はそれぞれ $(n \times n)$, $(n \times 1)$, $(1 \times n)$ の行列で

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = Q, \quad \bar{C} = [c \mid 0]$$

を満足する。

E , F をそれぞれ状態追従誤差ベクトル, 出力追従誤差として

$$\begin{cases} E = \bar{Z} - X \\ F = W - Y \end{cases} \quad (3-13)$$

で定義すると, (3-1)式, (3-12)式から

E , F に関して

$$\begin{cases} \dot{E} = (P + \Delta P)E - QR + (\bar{A} - P - \Delta P)\bar{Z} + \bar{B}\hat{R}_m - N_1 \\ F = (D + \Delta D)E + (\bar{C} - D - \Delta D)\bar{Z} - N_2 \end{cases}$$

(3-14)

の関係を導く。(3-14)式に(3-9)式,(3-10)式,(3-11)式を代入して整理すると

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{E} &= (P + \Delta P)E - QR - Q \{ [P + \Delta P]_0^{m-1} + \\ &\quad [P + \Delta P]_m^{n-1} L_A - [A]_0^{m-1} A^{n-m} \} Z^m \\ &\quad - Q \{ [P + \Delta P]_m^{n-1} \sum_{i=0}^{n-m-1} L_i - \sum_{i=0}^{n-m} [A]_0^{m-1} A^{n-m-i-1} \cdot \\ &\quad B \} R_m^{(i)} - N_1 \\ F &= (D + \Delta D)E + \{ C - [D + \Delta D]_0^{m-1} \\ &\quad - [D + \Delta D]_m^{n-1} L_A \} Z^m - [D + \Delta D]_m^{n-1} \sum_{i=0}^{n-m-1} L_i R_m^{(i)} \\ &\quad - N_2 \end{aligned} \right. \quad (3-15)$$

$$\begin{aligned} \therefore \because \quad [P + \Delta P]_0^{m-1} &= [P_0 + \Delta P_0 \text{-----} P_{m-1} + \Delta P_{m-1}] \\ [P + \Delta P]_m^{n-1} &= [P_m + \Delta P_m \text{-----} P_{n-1} + \Delta P_{n-1}] \\ [D + \Delta D]_0^{m-1} &= [D_0 + \Delta D_0 \text{-----} D_{m-1} + \Delta D_{m-1}] \\ [D + \Delta D]_m^{n-1} &= [D_m + \Delta D_m \text{-----} D_{n-1} + \Delta D_{n-1}] \end{aligned}$$

と仮定。新しい外部入力 V を導入して

$$\begin{aligned} R &= \{ [A]_0^{m-1} A^{n-m} - [P]_0^{m-1} - [P]_m^{n-1} L_A \} Z^m \\ &\quad + \{ [A]_0^{m-1} A^{n-m-1} B - [P]_m^{n-1} L_0 \} R_m - V \end{aligned}$$

(3-16)

とすると, (3-15)式は

$$\begin{cases} \dot{E} = (P + \Delta P)E + QV + \Delta E^1 \\ F = (D + \Delta D)E + \Delta F^1 \end{cases} \quad (3-17)$$

$$\begin{aligned} \therefore \Delta E^1 &= -Q \left\{ [\Delta P]_0^{m-1} + [\Delta P]_m^{n-1} L_A \right\} Z^m \\ &\quad - Q \left\{ [P + \Delta P]_m^{n-1} \sum_{i=1}^{n-m-1} L_i - \sum_{i=1}^{n-m} [A]_0^{m-1} A^{n-m-i-1} \right. \\ &\quad \left. B \right\} R_m^{(i)} - N_1 \end{aligned} \quad (3-18)$$

$$\begin{aligned} \Delta F^1 &= \left\{ C - [D + \Delta D]_0^{m-1} - [D + \Delta D]_m^{n-1} L_A \right\} Z^m \\ &\quad - [D + \Delta D]_m^{n-1} \sum_{i=0}^{n-m} L_i R_m^{(i)} - N_2 \end{aligned} \quad (3-19)$$

と書くことができる。

(3-17)式を $m \leq n$ の場合のエラーシステムと称する。

3・2・2 モデルの次数が制御対象の次数より
高い場合

(3-5)式のモデルにおいて, m 次元状態ベ

クトル Z^m を

$$Z^m = \begin{bmatrix} \bar{Z} \\ \hline \bar{Z}^m \end{bmatrix} \quad (3-20)$$

ここで \bar{Z} は n 次元ベクトル, \bar{Z}^m は $(m-n)$ 次元ベクトル

と 1 で表わすとき, \bar{Z} は (3-21) 式を満足する。

$$\begin{cases} \dot{\bar{Z}} = \bar{A} \bar{Z} + \bar{B} Z_{n+1} \\ W = C Z^m \end{cases} \quad (3-21)$$

ここで \bar{A} , \bar{B} は (3-8) 式におけるものと同じである。

E , F を (3-13) 式で定義すると, (3-1) 式, (3-21) 式から

$$\begin{cases} \dot{E} = (P + \Delta P) E - QR + (\bar{A} - P - \Delta P) \bar{Z} \\ \quad + \bar{B} Z_{n+1} - N_1 \\ F = (D + \Delta D) E - (D + \Delta D) \bar{Z} - C Z^m - N_2 \end{cases} \quad (3-22)$$

の関係を得る。(3-22) 式において

$$R = -[P]_0^{n-1} \bar{Z} + Z_{n+1} - V \quad (3-23)$$

とすると, (3-22) 式は

$$\begin{cases} \dot{E} = (P + \Delta P)E + QV + \Delta_E^2 \\ F = (D + \Delta D)E + \Delta_F^2 \end{cases} \quad (3-24)$$

$$\text{そこで } \Delta_E^2 = -\Delta P \bar{E} - N_1 \quad (3-25)$$

$$\Delta_F^2 = -(D + \Delta D)\bar{E} - CZ^m - N_2 \quad (3-26)$$

と書くことができる。(3-24) 式を $m > n$ の場合のエラーシステムと称する。

(3-17) 式, (3-24) 式のエラーシステムにみける $\Delta_E^{1,2}$, $\Delta_F^{1,2}$ の項にはモデルの状態 Z^m , モデルに対する入力及びその微分項が含まれている。しかしこれ等は E , F に関しては独立変数であり, 従って $\Delta_E^{1,2}$, $\Delta_F^{1,2}$ はエラーシステムに対する外乱項と見なすことができる。

ここで目的とするところは, 外乱項 $\Delta_E^{1,2}$, $\Delta_F^{1,2}$ や $E(0)$ の存在にもかかわらず, 出力定常誤差を零とし, (3-27) 式の意味で出力追従精度を任意に設定することである。

$$\int_{t_0}^{\infty} [F(t)]^2 dt \leq \delta \quad (3-27)$$

ここで $t_0 \neq 0$ であり, δ は任意の正の実数である。

§ 3. 3 P 形補償器

エラーシステムに $(n + p - 1)$ 個の積分器を結合して, (3-28) 式で示される合成系を構成する。

$$\begin{aligned} \dot{G}_1 &= G_2 \\ &\vdots \\ \dot{G}_p &= F = (D + \Delta D)E + \Delta_{F}^{1,2} \\ \dot{E} &= (P + \Delta P)E + (Q + \Delta Q)H_1 + \Delta_E^{1,2} \\ &\vdots \\ \dot{H}_{n-1} &= J \end{aligned} \quad (3-28)$$

ここで J は合成系のスカラー入力である。

定理(2.1)から (3-1) 式の制御対象が (3

- 4) 式の条件を満足するとき, (3-28) 式の合成系は常に可制御となる。従って

$$J = K_G G + K_E E + K_H H \quad (3-29)$$

$$\text{ここで} \quad G = \begin{bmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_P \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_{n-1} \end{bmatrix},$$

K_G, K_E, K_H はそれぞれ $(1 \times P), (1 \times n),$

$[1 \times (n-1)]$ の定数行列

で示される全状態フィードバックによって, $(2n + P - 1)$ 個の合成系のすべての極を任意に設定することができると。

次に入力を F , 出力を $V = H_1$ として

$$\begin{cases} H_1^{(n-1)} + \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i H_1^{(i)} = - \sum_{j=0}^{n+P-1} \beta_j G_1^{(j)} & (3-30-1) \\ G_1^{(P)} = F & (3-30-2) \end{cases}$$

で示される補償器を考える。(3-30) 式における α_i, β_j はスカラー定数である。

第2章におけると同様に, エラーシステムと

(3-30) 式の補償器で第2.1図で示される補償系を構成し, (3-28) 式の合成系との関係を調

とる。

$$H_i^{(i)} = H_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (3-31)$$

$$G_j^{(j)} = G_{j+1}, \quad j = 0, \dots, p-1 \quad (3-32)$$

とすると, (3-30-2) 式から

$$\begin{aligned} G_1^{(k+p)} = H^{(k)} &= (D + \Delta D)(P + \Delta P)^k E \\ &+ \sum_{\ell=1}^k (D + \Delta D)(P + \Delta P)^{k-\ell} Q H_\ell \\ &+ \sum_{\ell=1}^k (D + \Delta D)(P + \Delta P)^{k-\ell} \Delta_E^{1,2}{}^{(\ell-1)} + \Delta_F^{1,2}{}^{(k)}, \\ &k = 0, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (3-33)$$

の関係が得られる。(3-30) 式に (3-31) ~

(3-33) 式を代入すると, (3-30) 式は

$$\begin{aligned} \dot{H}_{n-1} &= - \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i H_{i+1} - \sum_{k=1}^{n-1} \beta_{p+k} \sum_{\ell=1}^k (D + \Delta D)(P + \Delta P)^{k-\ell} \cdot \\ &\quad Q H_\ell - \sum_{j=0}^{p-1} \beta_j G_{j+1} \\ &= - \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{p+k} (D + \Delta D)(P + \Delta P)^k E \\ &\quad - \sum_{k=1}^{n-1} \beta_{p+k} \left\{ \sum_{\ell=1}^k (D + \Delta D)(P + \Delta P)^{k-\ell} \Delta_E^{1,2}{}^{(\ell-1)} + \Delta_F^{1,2}{}^{(k)} \right\} \end{aligned}$$

(3-34)

となる。(3-29)式と(3-34)式との比較から

$\beta_j, j=0, \dots, p-1,$ は

$$[\beta_0, \dots, \beta_{p-1}] = K_F \quad (3-35)$$

といて, $\beta_{p+k}, k=0, \dots, n-1,$ は

$$[(D+\Delta D)', \dots, (P+\Delta P)'(D+\Delta D)'] \begin{bmatrix} \beta_p \\ \vdots \\ \beta_{m+p-1} \end{bmatrix} = K_E'$$

(3-36)

といてそれぞれ K_F, K_E に対応し, さらに

$\alpha_i, i=0, \dots, n-1,$ は

$$-\sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i H_{i+1} - \sum_{k=1}^{n-1} B_{p+k} \sum_{\ell=1}^k (D+\Delta D)(P+\Delta P)^{k-\ell} Q H_\ell$$

$$= K_H H \quad (3-37)$$

といて K_H に対応していることがわかる。

従って, 補償器を含めた補償系のすべての極と補償器の係数 α_i, β_j によって任意に設定することができるとができる。

(3-30)式をラプラス変換して

$$V(s) = - \frac{\sum_{i=0}^{n+p-1} \beta_i s^i}{s^p (s^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i s^i)} F(s)$$

(3-38)

が得られ，補償器は p 形となっている。

§ 3・4 モデル追従系

エラーシステムに対し p 形補償器を通して出力をフィードバックした補償系を構成し外乱項， $\Delta_E^{1,2}$ ， $\Delta_F^{1,2}$ 及びエラーシステム，補償器の初期値の出力追従誤差 F に対する影響を考察する。

< 補題 (3.1) >

補償系において

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s) = 0 \quad (3-39)$$

が成立し出力定常追従誤差は零となる。

<証明>

$\Delta_E^{1,2} = 0$, $\Delta_F^{1,2} = 0$ と 1 で初期値だけを考慮したとき, (3-39)式が成立することは明らかである。

次に, 外乱項 $\Delta_E^{1,2}$, $\Delta_F^{1,2}$ だけに注目する。

(3-17)式, (3-24)式をラプラス変換して

$$\begin{aligned} F(s) &= (D + \Delta D)(SI_n - P - \Delta P)^{-1} Q V(s) \\ &\quad + (D + \Delta D)(SI_n - P - \Delta P)^{-1} \Delta_E^{1,2}(s) + \Delta_F^{1,2}(s) \end{aligned} \quad (3-40)$$

を得る。さらに $V(s) = H_1(s)$ とし, (3-38)式を代入して補償系の極を λ_i , $i=1, \dots, 2n+p-1$, に設定すると, (3-40)式は

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{s^p |SI_n - P - \Delta P| (s^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i s^i) G(s)}{\prod_{i=1}^{2n+p-1} (s - \lambda_i)} \cdot \\ &\quad \left\{ (D + \Delta D)(SI_n - P - \Delta P)^{-1} \Delta_E^{1,2}(s) + \Delta_F^{1,2}(s) \right\} \end{aligned} \quad (3-41)$$

と書くことが出来る。 $\Delta_E^{1,2}(s)$, $\Delta_F^{1,2}(s)$ はそれぞれ (3-18) 式, (3-19) 式, (3-25) 式, (3-26) 式から

$$\begin{aligned} \Delta_E^1(s) = & -Q \left[([\Delta P]_0^{m-1} + [\Delta P]_m^{n-1} L_A)(SI_m - A)^{-1} \right. \\ & (BR_m(s) + \Sigma^m(o)) \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} ([P + \Delta P]_m^{n-1} L_i - [A]_0^{m-1} A^{n-m-i-1} B^{-1}) \cdot \\ & \left. S^i R_m(s) \right] - N_1(s) \end{aligned} \quad (3-42)$$

$$\begin{aligned} \Delta_F^1(s) = & [C - [D + \Delta D]_0^{m-1} - [D + \Delta D]_m^{n-1} L_A](SI_m - A)^{-1} \cdot \\ & (BR_m(s) + \Sigma^m(o)) \\ & - [D + \Delta D]_m^{n-1} \sum_{i=0}^{n-m} L_i S^i R_m(s) - N_2(s) \end{aligned} \quad (3-43)$$

$$\begin{aligned} \Delta_E^2(s) = & -\Delta P (I_n; 0)(SI_m - A)^{-1} (BR_m(s) + \Sigma^m(o)) \\ & - N_1(s) \end{aligned} \quad (3-44)$$

$$\Delta_F^2(s) = -(D + \Delta D)(I_n; 0)(SI_m - A)^{-1} (BR_m(s) + \Sigma^m(o))$$

$$- C(SI_m - A)^{-1}(BR_m(s) + Z^m(s)) - N_2(s) \quad (3-45)$$

と 1 で得られる。 R_m, N_1, N_2 が $(p-1)$ 次の 99 項関数で与えられるとき、明らかに

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^{p+1} \Delta_E^{1,2}(s) = 0 \quad (3-46)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^{p+1} \Delta_F^{1,2}(s) = 0 \quad (3-47)$$

が成立する。

(3-41) 式において、 $\Delta_E^{1,2}(s), \Delta_F^{1,2}(s)$ の係数に s^p の項が分離していることに注目すると、

(3-46) 式, (3-47) 式から (3-39) 式が導かれる。

<証明終>

<補題 (3.2)>

補償系の極入 σ_i の実数部 $\varepsilon \sigma_i$ とするとき、 $0+ \leq t$ に対して

$$\lim_{\sigma_i \rightarrow -\infty} F(t) = 0 \quad (3-48)$$

が成立する。

<証明>

補題(2.2)の証明と同様に, (3-28)式の合成系の入力と(3-29)式で与えられた(3-49)式で示される系で論ずる。

$$\dot{G}_1 = G_2 \quad (3-49-1)$$

⋮

$$\dot{G}_p = F = (D + \Delta D)E + \Delta_F^{1,2} \quad (3-49-2)$$

$$\dot{E} = (P + \Delta P)E + QH_1 + \Delta_E^{1,2} \quad (3-49-3)$$

$$\dot{H}_1 = H_2 \quad (3-49-4)$$

⋮

$$\begin{aligned} \dot{H}_{n-1} = & K_1^G G_1 + \cdots + K_p^G G_p + K_E E + K_1^H H_1 + \cdots \\ & + K_{n-1}^H H_{n-1} \end{aligned} \quad (3-49-5)$$

ここで K_i^G , K_j^H はスカラー定数, K_E は $(1 \times n)$ の定数行列

最初に外乱項 $\Delta_E^{1,2}$, $\Delta_F^{1,2}$ だけに注目する。

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ K_1^G & \cdots & K_p^G & K_E & K_1^H & \cdots & K_{n-1}^H \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} D + \Delta D & 0 \\ P + \Delta P & Q \end{bmatrix}$

(3-50)

とすると, (3-49) 式の系の特性方程式は

$$\det(SI_{2n+p-1} - M) = 0 \quad (3-51)$$

で与えられる。特性方程式の定数項は $-\det M$

となり, 補償系の極 λ_i と

$$-\det M = \prod_{i=1}^{2n+p-1} \lambda_i \quad (3-52)$$

の関係がある。

M の第 1 列に K_2^G / K_1^G を乗じて第 2 列から引く
操作を順次続けると

$$-\det M = -\det \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ K_1^G & \cdots & 0 & \cdots & \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} D + \Delta D & 0 \\ P + \Delta P & Q \end{bmatrix}$

$$= K_1^G \det \left[\begin{array}{c|c} P + \Delta P & Q \\ \hline D + \Delta D & 0 \end{array} \right] \quad (3-53)$$

の関係を得る。(3-4)式から

$$\det \left[\begin{array}{c|c} P + \Delta P & Q \\ \hline D + \Delta D & 0 \end{array} \right] \neq 0 \quad (3-54)$$

であり、従って(3-52)式、(3-53)式から

$$\lim_{G_1 \rightarrow -\infty} |K_1^G| = (\infty)^{2n+p-1} \quad (3-55)$$

を得る。(3-49-5)式から

$$\begin{aligned} \frac{1}{K_1^G} \dot{H}_{n-1} &= G_1 + \frac{1}{K_1^G} \{ K_2^G G_2 + \dots + K_p^G G_p + K_E E \\ &\quad + K_1^H H_1 + \dots + K_{n-1}^H H_{n-1} \} \end{aligned} \quad (3-56)$$

と、 $G_1 \rightarrow -\infty$ とするときは

$$G_1 = 0 \quad (3-57)$$

を得る。(3-57)式を(3-49)式に代入して

順次

$$\dot{G}_2 = 0 \quad (3-58-1)$$

$$\vdots$$

$$\dot{G}_p = 0 \quad (3-58-2)$$

$$\dot{G}_p = F = 0 \quad (3-58-3)$$

を得る。(3-58-3)式は, $\Delta_E^{1,2}(s)$, $\Delta_F^{1,2}(s)$ から $F(s)$ を見れば伝達関数を求めるとき, 零点を表わす s の $2n+p-1$ 項式の係数と $\prod_{i=1}^{2n+p-1} \lambda_i$ の比が $\sigma_i \rightarrow -\infty$ とするとき零に漸近することを意味している。

補題(3.1)から $F(\infty) = 0$ であり, 従って外乱項 $\Delta_E^{1,2}$, $\Delta_F^{1,2}$ だけを考えるとき, $0 \leq t$ に対し

$$\lim_{\sigma_i \rightarrow -\infty} F(t) = 0 \quad (3-59)$$

が成立する。

次に初期値が存在するとき, F の応答は

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & D + \Delta D & \vdots & 0 \end{bmatrix} \varepsilon^{Mt} \begin{bmatrix} \hline G(0) \\ \hline E(0) \\ \hline H(0) \end{bmatrix}$$

(3-60)

$$\lim_{\sigma_i \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^{\infty} [F(t)]^2 dt = 0 \quad (3-62)$$

ここで $t_0 \neq 0$

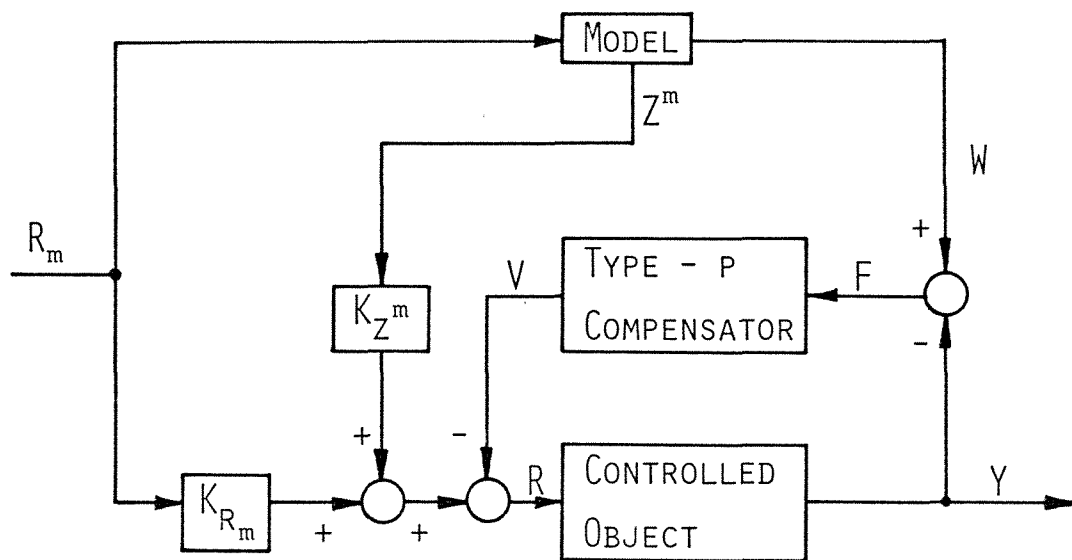
が成立することは明らかである。

よって σ_i の設定によって (3-27) 式を満足させることができる。

<証明終>

定理(3.1)から、第3.1図に示される系を構成するとき、出力定常追従誤差は零となり、補償器の係数によって (3-27) 式の意味で任意の追従精度を得ることができる。第3.1図の系をモデル追従系と称する。

これまで、モデルの入出力伝達関数は0形との仮定を置いていたが、モデルが P_m 形するとき、補償器を $(P + P_m)$ 形とすることによって補題(3.1), (3.2)、定理(3.1)が成立し、任意の追従精度を得ることができる。



第 3.1 図 モデル追従系

$m \leq n$ のとき, $K_{R_m} = [A]_0^{m-1} A^{n-m-1} B - [P]_m^{n-1} L_0$,

$K_{Z^m} = [[A]_0^{m-1} A^{n-m} - [P]_0^{m-1} - [P]_m^{n-1} L_A]$

$m > n$ のとき, $K_{R_m} = 0$,

$K_{Z^m} = [-[P]_0^{n-1} \quad 1 \quad 0]$

補償器の係数の具体的な設定手順は 2・6 節で述べられたと同様に、次のようになる。

(1) 入力，外乱の最高次数を $(p-1)$ 次とし

て，モデルが p_m 形ならば，補償器を

$(p+p_m)$ 形とする。

(2) (3-27) 式の追従精度を考慮して，補

償系の極 $\lambda_i, i=1, \dots, 2n+p-1$ ，を仮定し

て (3-29) 式にふけるフィードバック係

数行列 K_G, K_E, K_H を求める。

(3) 変動分 $\Delta P, \Delta D$ を無視して，(3-35)

～(3-37) 式から α_i, β_j を求める。

(4) 得られたモデル追従系をシミュレーションし

て，必要なら λ_i を選りなおし，以

上の手順を繰返す。

§ 3・5 多項関数目標値に追従する系

多項関数目標値に制御対象の出力を追従させる問題はサーボ問題として扱われ、

(1) 多項関数目標値に対して定常誤差が零となること、

(2) 指定された過渡追従特性（オーバシュートなど）のような出力の一部に着目した特性）に設定することができること、

(3) 定常特性はパラメータ変動や外乱の影響を全く受けないこと、

(4) 過渡追従特性はパラメータ変動や外乱に関して極めて低感度であること、

が要求される。

これらにサーボ問題を解決する方法として、
 多項関数目標値を発生する自励系を導入するもの^{22)~25)}
 , 開ループ伝達関数が P 形のとき、その出力フィードバック系は $(P-1)$ 次の多項関数目標値に

対し定常誤差が零となる事実に立脚し^{26), 27)}たもの、
 らが知られている。

文献[22]~[25]においては、出力ギャレ
 ータ問題に変換して解いているために、外乱とし
 てはインパルス関数だけを考慮したことになり、
 また指定された過渡追従特性に設定することは困
 難である。一方、文献[26]、[27]においては
 パラメータ変動や $(p-1)$ 次の多項関数で与えら
 れる外乱が存在しても定常追従特性は全く影響
 を受けない。しかし系の極と零点の双方を任意に
 設定することができないので、任意の過渡追従特
 性を得ることができず、またパラメータ変動や外
 乱は過渡追従特性に直接影響する構造となってい
 る。

これに対し、第3.1図のモデル追従系において
 モデルを多項関数目標値に対し定常誤差が零とな
 り、かつ指定の過渡追従特性を保持するように構成す
 る。このときパラメータ変動や外乱が存在しても

制御対象の出力はモデルの出力に任意の追従精度で、かつ定常誤差が零で追従する。すなわち、この場合制御対象の多項関数目標値に対する定常特性、及び過渡追従特性はモデルによって決定され、一対パラメータ感度、外乱感度はP形補償器によって任意に設定できる。この結果、サーボ問題に要求される(1)～(4)の条件を満足させることができる。

§ 3.6 補償器次数の低減

3.6.1 制御対象の状態変数が直接観測できる場合

2.7.1 に於いて、制御対象のいくつかの状態変数が直接観測できるとき、補償器次数の低減が予想されることを述べる。本節に於いては、より具体的に補償器の次数低減について論ずることが

できる。

今、制御対象の状態変数 $X' = [X_1 \cdots X_n]'$ の中から X_1, X_2, \dots, X_r の r 個が直接観測できるとする。ただし、 $m \leq n$ の場合においては $r \leq m$ とする。

このとき、(3-17)式、(3-24)式のエラーシステムにおいて、 E_1, E_2, \dots, E_r の r 個が直接観測できる。これを

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \end{bmatrix} E \quad (3-63)$$

として表わす。

(3-30)式に対応して、(3-64)式で表わされる補償器を考える。

$$\begin{cases} H_1^{(\alpha)} + \sum_{i=0}^{\alpha-1} \alpha_i H_1^{(i)} = - \sum_{j=0}^{p-1} \beta_j G_1^{(j)} - \sum_{k=0}^{\alpha} \gamma_k \begin{bmatrix} \bar{F} \\ -\bar{F} \end{bmatrix}^{(k)} \\ G_1^{(p)} = F \end{cases} \quad (3-64)$$

ここで α_i, β_j はスカラー定数、 γ_k は $[1 \times (1+r)]$ の定数行列である。

$$\begin{bmatrix} \bar{F} \\ \bar{F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ \hline D + \Delta D \end{bmatrix} E + \begin{bmatrix} 0 \\ \hline \Delta_{\bar{F}}^{1,2} \end{bmatrix} \quad (3-65)$$

とす

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{F} \\ \bar{F} \end{bmatrix}^{(\kappa)} &= \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ \hline D + \Delta D \end{bmatrix} (P + \Delta P)^{\kappa} E \\ &+ \sum_{\ell=1}^{\kappa} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ \hline D + \Delta D \end{bmatrix} (P + \Delta P)^{\kappa-\ell} Q H_{\ell}^{(\ell-1)} \\ &+ \sum_{\ell=1}^{\kappa} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ \hline D + \Delta D \end{bmatrix} (P + \Delta P)^{\kappa-\ell} \Delta_E^{1,2(\ell-1)} + \begin{bmatrix} 0 \\ \hline \Delta_{\bar{F}}^{1,2(\kappa)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3-66)$$

とす。 (3-64) 式は (3-31) 式, (3-32) 式,

(3-66) 式を代入す

$$\dot{H}_{\alpha} = - \sum_{i=0}^{\alpha-1} \alpha_i H_{i+1} - \sum_{k=1}^{\alpha} r_k \sum_{\ell=1}^{\kappa} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ \hline D + \Delta D \end{bmatrix} (P + \Delta P)^{\kappa-\ell}$$

$$\begin{aligned} Q H_{\ell} &= \sum_{j=0}^{p-1} \beta_j G_{j+1} - \sum_{k=0}^{\alpha} r_k \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ \hline D + \Delta D \end{bmatrix} (P + \Delta P)^{\kappa} E \\ &- \sum_{k=1}^{\alpha} r_k \left\{ \sum_{\ell=1}^{\kappa} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ \hline D + \Delta D \end{bmatrix} (P + \Delta P)^{\kappa-\ell} \Delta_E^{1,2(\ell-1)} + \begin{bmatrix} 0 \\ \hline \Delta_{\bar{F}}^{1,2(\kappa)} \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

(3-67)

を得る。

(3-29)式との比較から, $\beta_j, j=0, \dots, p-1$,
は(3-35)式と同様に $[\beta_0 \dots \beta_{p-1}] = K_E$
として定まる。次に $\gamma_k, k=0, \dots, \alpha$ が

$$\left[\begin{bmatrix} I_r | 0 \\ \hline D + \Delta D \end{bmatrix}', \dots, (P + \Delta P)' \begin{bmatrix} I_r | 0 \\ \hline D + \Delta D \end{bmatrix}' \right] \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \vdots \\ \gamma_\alpha \end{bmatrix} = K_E' \quad (3-68)$$

から K_E に対応して定まるならば, $\alpha_i, i=0, \dots, \alpha-1$, 17

$$= \sum_{i=0}^{\alpha-1} \alpha_i H_{i+1} = \sum_{k=1}^{\alpha} \gamma_k \sum_{\ell=1}^k \begin{bmatrix} I_r | 0 \\ \hline D + \Delta D \end{bmatrix} (P + \Delta P)^{k-\ell} Q H_\ell = K_H H \quad (3-69)$$

として K_H に対応して定まり, 補償系のすべての極は 補償器の係数 $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k$ によって設定することができる。

(3-68)式から $\gamma_0, \dots, \gamma_\alpha$ が定まる必要十分条件は

$$\text{rank} \left[\left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline D + \Delta D \end{array} \right]', \dots, (P + \Delta P)^\alpha, \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline D + \Delta D \end{array} \right]' \right] = n$$

(3-70)

で与えられる。

ところで

$$\left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline D + \Delta D \end{array} \right] (P + \Delta P)^\ell = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & I_r & 0 \\ \hline (D + \Delta D)(P + \Delta P)^\ell \end{array} \right]$$

(3-71)

となり， ℓ の増加と共に I_r の単位行列が右側方向

に1列づつ移動すること， $(D + \Delta D)(P + \Delta P)^\ell$ ，

$\ell = 0, \dots, n-1$ ，は制御対象が可観測であることから，

互に独立な行ベクトルであることに注目すると

と

$$\left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline D + \Delta D \end{array} \right] (P + \Delta P)^\ell \quad \text{において} \quad \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline D + \Delta D \end{array} \right] (P + \Delta P)^\alpha,$$

$\alpha = 0, \dots, \ell-1$ ，の行ベクトルと独立な行ベクトル

は2本存在することがわかる。

従って

$$\text{rank} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ \hline & D + \Delta D \end{bmatrix} = \bar{r} \quad (3-72)$$

ここで $\bar{r} = r$, または $r+1$

とするとき, (3-70)式を満足する最小の α は

$$\bar{r} \geq \frac{n - \bar{r}}{2} \quad (3-73)$$

を満足する最小の整数 \bar{r} で与えられる。

エラーシステムにおいて直接観測できる状態変数が順不同のとき, $E' = [E_1 \ E_2 \ \dots \ E_n]'$ の順序を入れ替えて

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} Ea_1 \\ \vdots \\ Ea_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \end{bmatrix} \bar{E} \quad (3-74)$$

として表わす。ただし, $m \leq n$ の場合は, E_1, E_2, \dots, E_m の中から r 個が直接観測されるものとする。このとき, $(P + \Delta P)$ は $(\bar{P} + \Delta \bar{P})$ に, $(D + \Delta D)$ は $(\bar{D} + \Delta \bar{D})$ にそれぞれ変換するものとする。

この場合, 補償器係数によって補償系の極を設

定まることのできる条件は, (3-70)式から

$$\text{rank} \left[\left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline \bar{D} + \Delta \bar{D} \end{array} \right]', \dots, (\bar{P} + \Delta \bar{P})', \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline \bar{D} + \Delta \bar{D} \end{array} \right]' \right] = n$$

(3-75)

で与えられる。

ところで

$$\left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline \bar{D} + \Delta \bar{D} \end{array} \right] (\bar{P} + \Delta \bar{P})^l = \left[\begin{array}{c|c|c} \overbrace{0}^l & \square & 0 \\ \hline (\bar{D} + \Delta \bar{D})(\bar{P} + \Delta \bar{P})^l \end{array} \right]$$

(3-76)

ここで \square は 0 と 1 からなる $(r \times r)$ の行列,
となり, l の増加と共に \square が右側を向に 1 列づつ
移動すること, 更に

$$(\bar{D} + \Delta \bar{D})(\bar{P} + \Delta \bar{P})^l = (D + \Delta D)(P + \Delta P)^l$$

(3-77)

となることに注目すると,

$$\left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline \bar{D} + \Delta \bar{D} \end{array} \right] (\bar{P} + \Delta \bar{P})^l \text{ には } \text{したがって}, \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline \bar{D} + \Delta \bar{D} \end{array} \right] (\bar{P} + \Delta \bar{P})'^\alpha,$$

$\alpha = 0, \dots, l-1,$ の行ベクトルと独立な行ベクト

ルは二本存在する。

従って, (3-75)式を満足する最小の α は
(3-73)式を満足する最小の整数 \bar{r} で与えられる。

以上の結果をまとめると, 制御対象から r 個の状態変数が直接観測されるとき, (ただし $m \leq n$ のときは x_1, x_2, \dots, x_m の中から r 個が直接観測されるものとする)補償器の次数は $(\bar{r} + p)$ 次元となり, 状態変数が直接観測されない場合と比較して, $(n - 1 - \bar{r})$ 次元だけ次数を低減することができる。

3・6・2 制御対象が積分特性を持つ場合

この場合は2・7・2に於ける議論を直接適用することができる。

すなわち, 制御対象の入出力伝達関数が \hat{p} 形の場合, $R = \bar{R} - Y$ のフィードバック系を新らに

制御対象と見なすとき，補償器を $(p - \hat{p})$ 形として既に示されたモデル追従系のすべての特性を満足させることができる。

§ 3 . 7 実験結果

3 . 7 . 1 高次系の低次系近似

制御対象が

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -(2 + \Delta P_0) & -(1.8 + \Delta P_1) & -(2.4 + \Delta P_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} R$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 + \Delta D_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \quad (3-78)$$

で与えられるとき，出力 Y を

$$\begin{cases} \dot{Z}_1 = -Z_1 + R_m \\ W = Z_1 \end{cases} \quad (3-79)$$

で表わされるモデルの出力 W に追従させて，ステップ入力に関して 3 次系を 1 次系に近似する問題を考える。

この場合，第 3.1 図に示ける K_{Rm} ， K_{Zm} はそれぞれ $K_{Rm} = 0.4$ ， $K_{Zm} = 1.6$ となり，パラメータ変動分をそれぞれ

$$\Delta P_0 = -0.2, \quad \Delta P_1 = 0.2, \quad \Delta P_2 = -0.2,$$

$$\Delta D_0 = 0.2,$$

として第 3.2 図の系をアナログ計算機によって構成し，以下の実験結果を得た。

第 3.3 図に示ける A はモデルの出力 W のステップ応答， B は補償器を除いた場合の Y のステップ応答とそれぞれ示している。

第 3.4 図に示ける A はモデルの出力 W のステップ応答， B 及び C は補償器係数をそれぞれ

$$[\alpha_0, \alpha_1] = [15.6, 6.6]$$

$$[\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3] = [9.0, 7.8, 28.0, 13.2]$$

としてパラメータ変動分を無視したとき補償系の極を $[-1, -1, -1.5, -1.5, -2, -2]$ に設定した場合の Y 及び F のステップ応答をそれぞれ示している。

第 3.5 図に示ける A はモデルの出力 W のステップ応答, B 及び C は補償器係数をそれぞれ

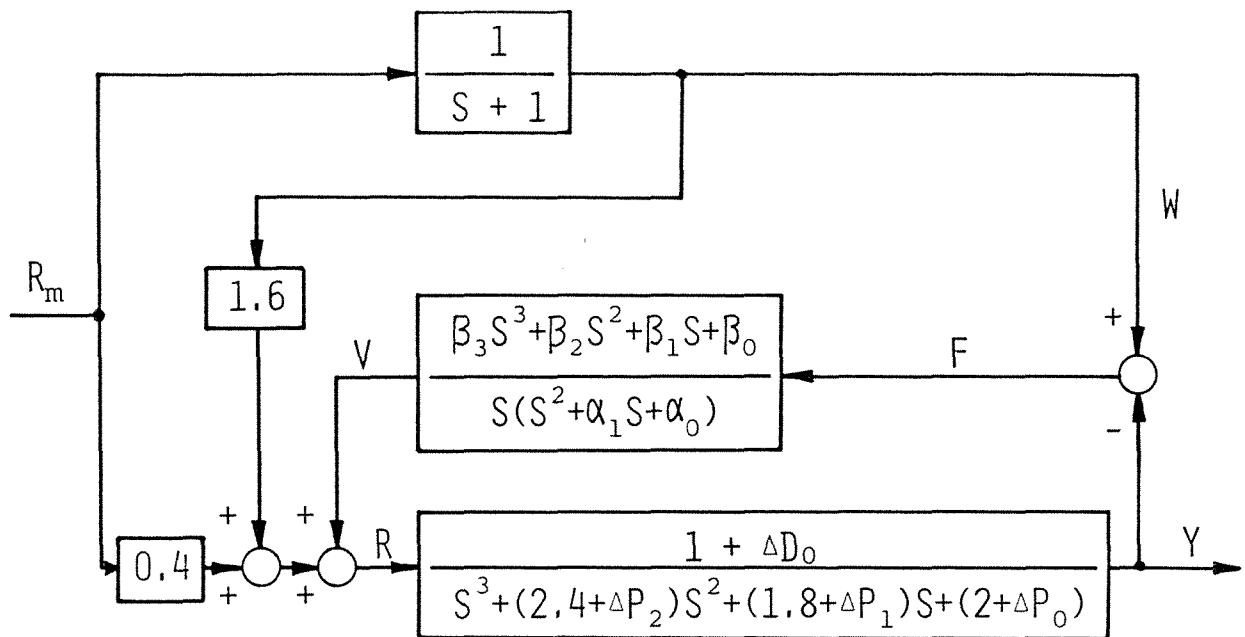
$$[\alpha_0, \alpha_1] = [35.2, 9.6]$$

$$[\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3] = [64.0, 121.7, 157.5, 56.3]$$

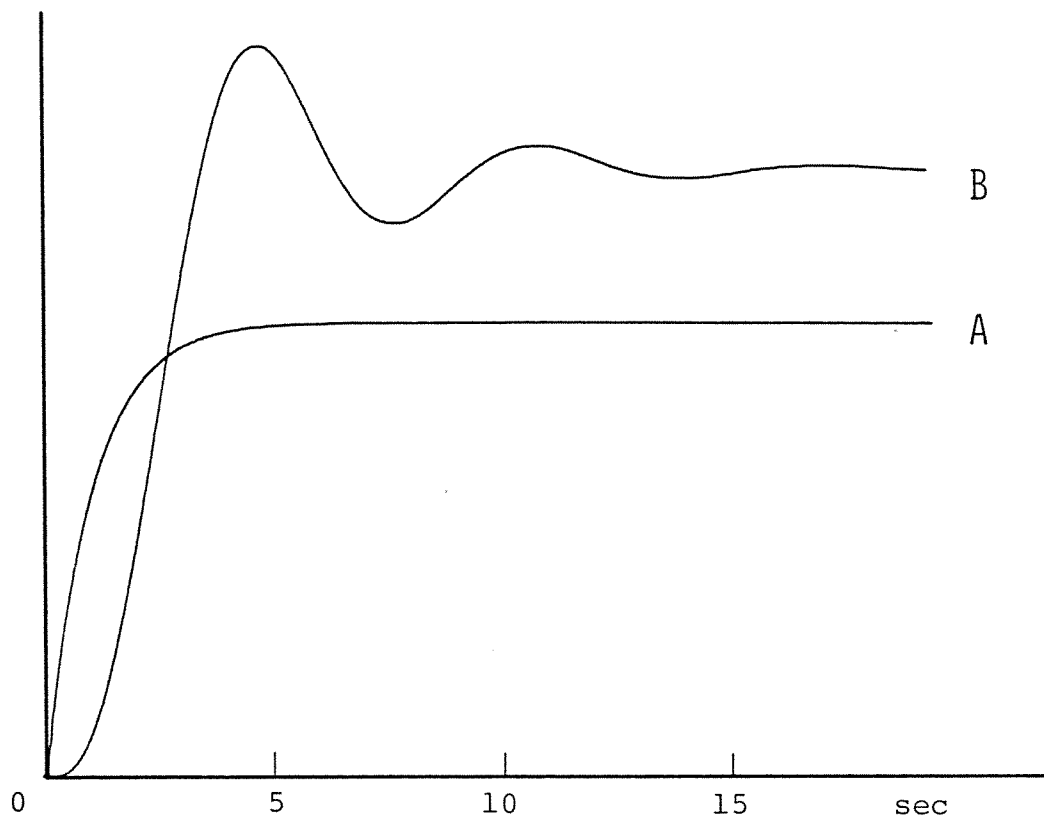
としてパラメータ変動分を無視したとき補償系の極を $[-2, -2, -2, -2, -2, -2]$ に設定した場合の Y 及び F のステップ応答をそれぞれ示している。

3.7.2 ランフ°入カに追従する系

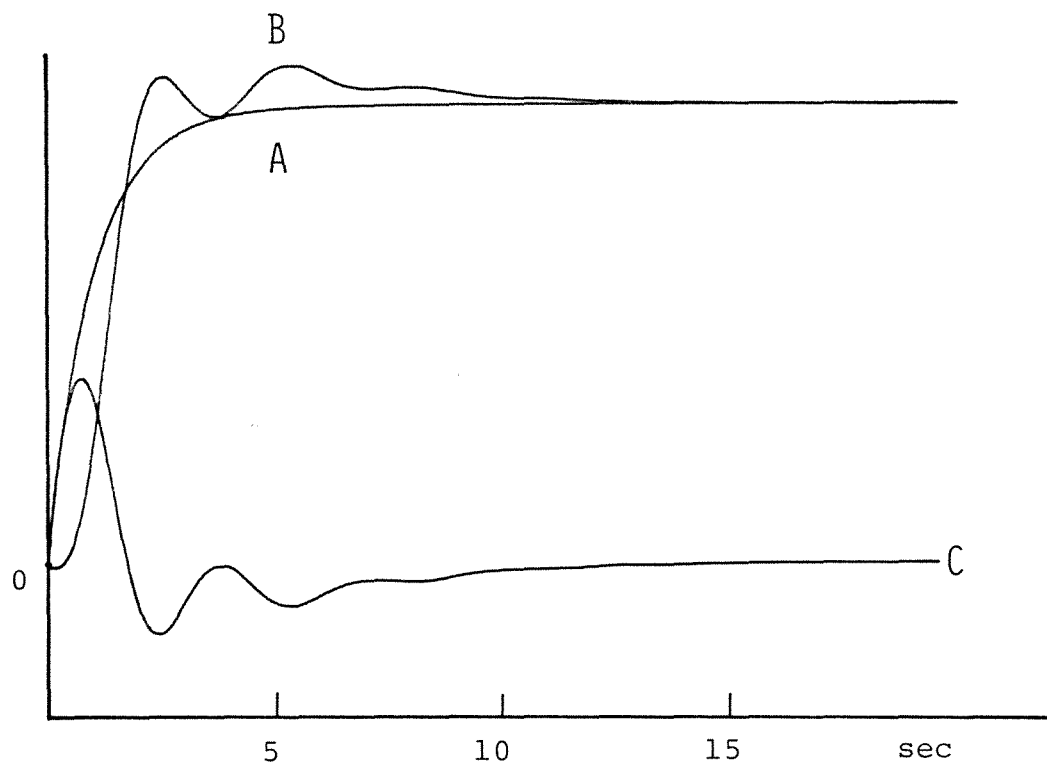
制御対象が



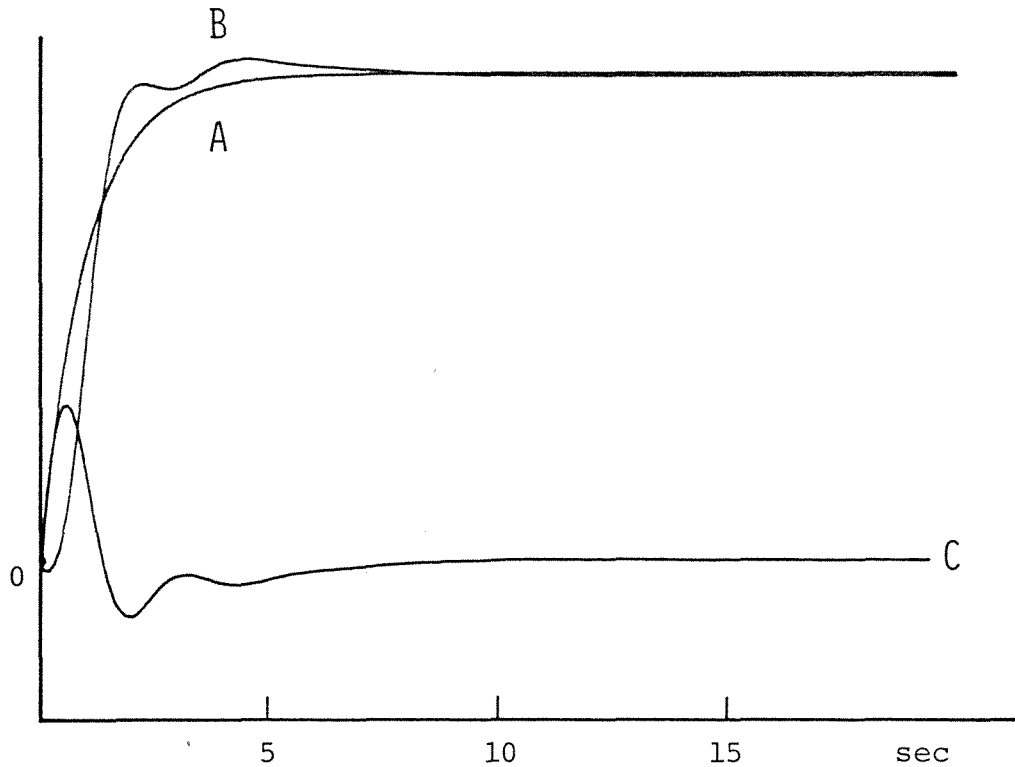
第3.2図 (3-78) 式の制御対象の出力
 が (3-79) 式のモデルの出力に追
 従させるモデル追従系



第3.3図 Aはモデルの出力 W のステップ応答, Bは第3.2図の系において補償器を除く場合の Y のステップ応答



第3.4図 Aはモデルの出力 W のステップ応答, B, Cは第3.2図のモデル追従系において補償系の極を $[-1, -1, -1.5, -1.5, -2, -2]$ に設定した場合の Y, F のステップ応答



第3.5図 Aはモデルの出力 W のステップ応答, B, Cは第3.2図のモデル追従系において補償系の極を $[-2, -2, -2, -2, -2, -2]$ に設定した場合の Y , F のステップ応答

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = -(1 + \Delta P_0) X_1 + R \\ Y = X_1 \end{cases} \quad (3-80)$$

で与えられるとき，出力 Y をランプ入力に対して定常誤差が零となる第3.6図に示されるモデルの出力 W に追従させる問題を考える。

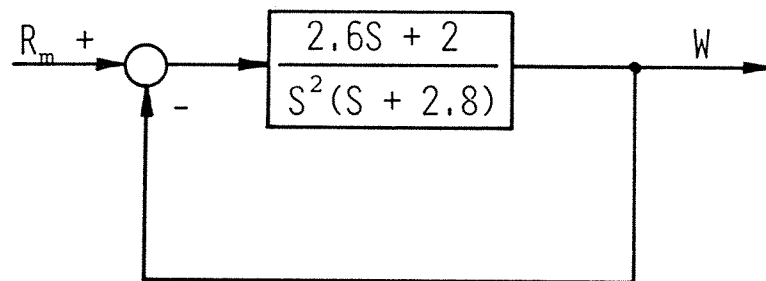
第3.6図のモデルを状態方程式で表れすと

$$\begin{bmatrix} \dot{Z}_1 \\ \dot{Z}_2 \\ \dot{Z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2.0 & -2.6 & -2.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} R_m$$

$$W = \begin{bmatrix} 2.0 & 2.6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix} \quad (3-81)$$

となる。この場合，第3.1図に示ける K_{Rm} ， K_{Zm} はそれぞれ $K_{Rm} = 0$ ， $K_{Zm} = [1 \ 1 \ 0]$ となり，パラメータ変動分を $\Delta P_0 = 0.2$ として第3.7図の系をアナログ計算機によって構成し，以下の結果を得た。

第3.8図に示ける A は $R_m = 0.4t$ のランプ入



第 3.6 図 ランプ入カに定常誤差が零

で追従するモデル

カ, B はモデルの出力 W のランプ応答, C は補償器を除いた場合の Y のランプ応答とそれぞれ示している。

第3.9図に示ける A は $R_m = 0.4 \text{ t}$ のランプ入力, B はモデルの出力 W のランプ応答, C 及び D は補償器係数とそれぞれ

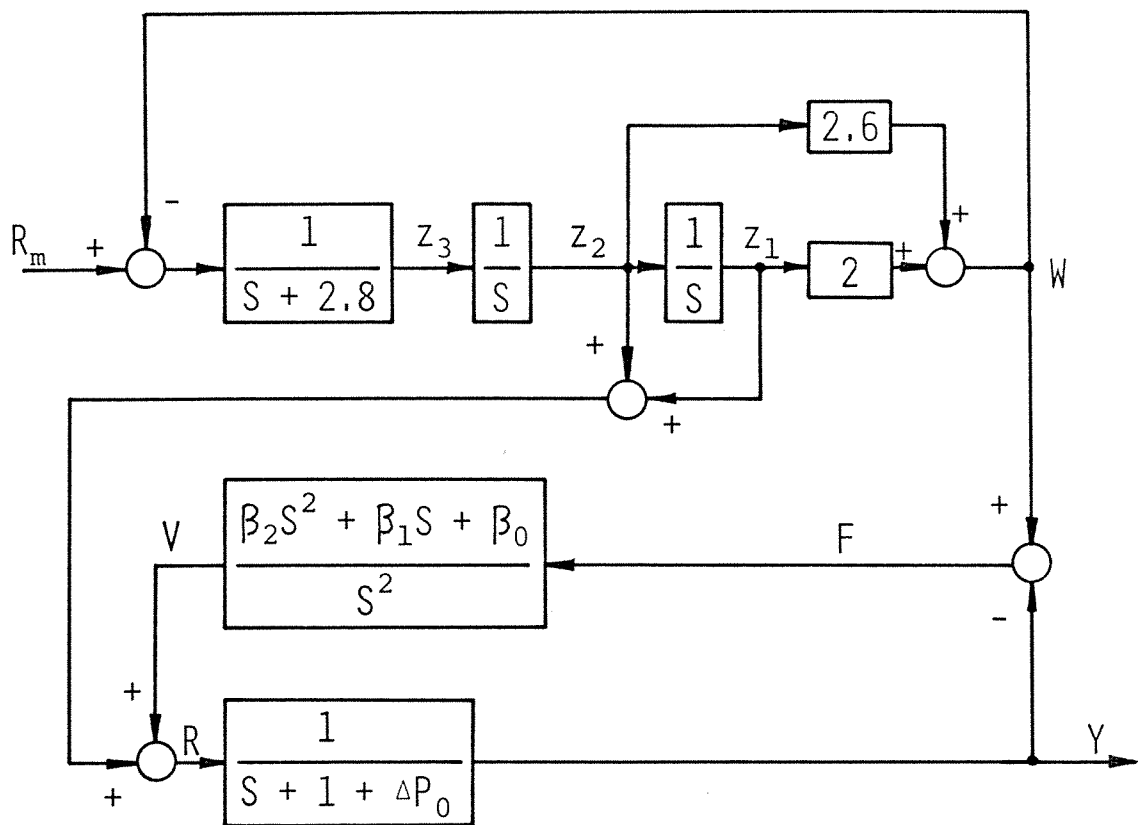
$$[\beta_0, \beta_1, \beta_2] = [0.25, 1.25, 1.0]$$

としてパラメータ変動分を無視したとき, 補償系の極を $[-0.5, -0.5, -1]$ に設定した場合の Y 及び F のランプ応答とそれぞれ示している。

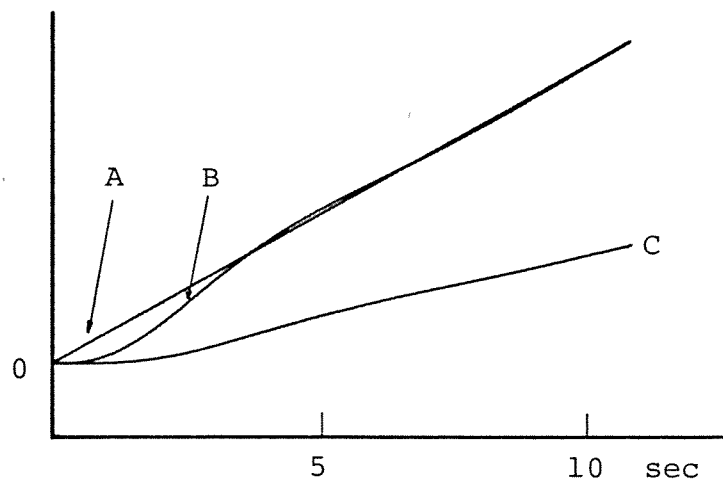
第3.10図に示ける A は $R_m = 0.4 \text{ t}$ のランプ入力, B はモデルの出力 W のランプ応答, C 及び D は補償器係数とそれぞれ

$$[\beta_0, \beta_1, \beta_2] = [2.0, 5.0, 3.0]$$

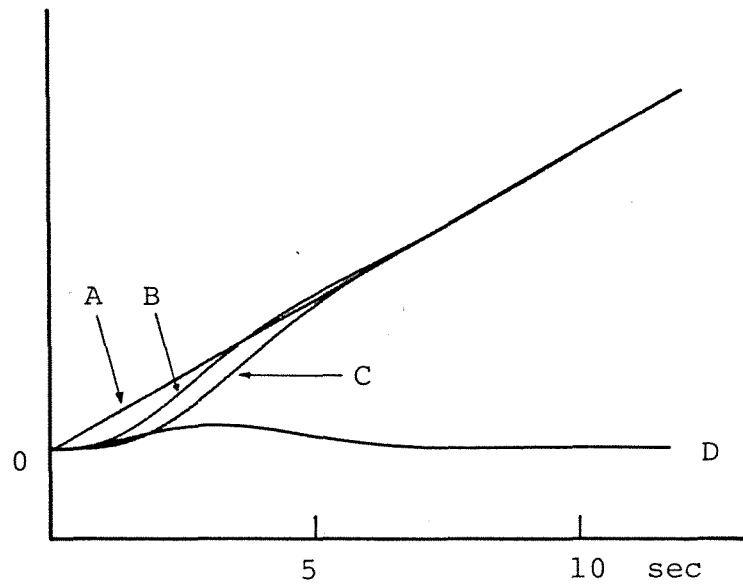
としてパラメータ変動分を無視したとき, 補償系の極を $[-1, -1, -2]$ に設定した場合の Y 及び F のランプ応答とそれぞれ示している。



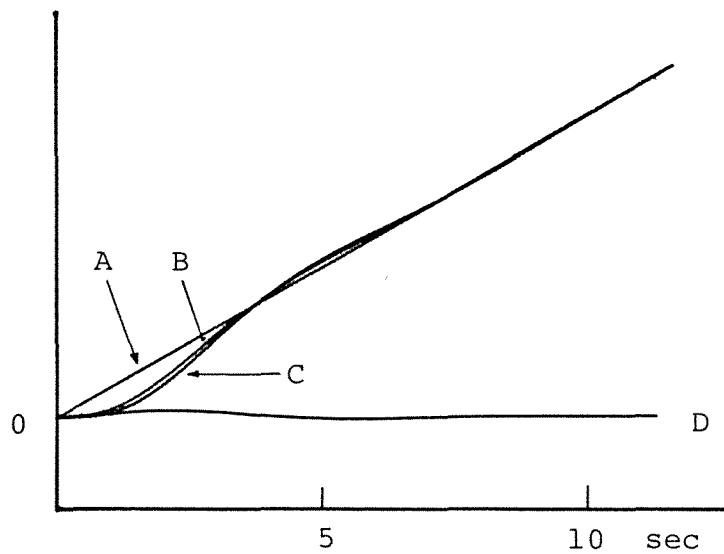
第 3.7 図 (3-80) 式の制御対象の
 出力を (3-81) 式のモデルの出力に
 追従させるモデル追従系



第3.8図 Aは $R_m = 0.4t$ のランプ入力,
 Bはモデルの出力 W のランプ応答,
 Cは第3.7図の系において補償器を除いた場合の Y のランプ応答



第3.9図 Aは $R_m = 0.4$ のランプ入力
 カ, Bはモデルの出力 W のランプ応答,
 C, Dは第3.7図のモデル追従系に
 ついて補償系の極を $[-0.5, -0.5, -1]$ に
 設定した場合の Y , F のランプ応答



第3.10図 Aは $R_m = 0.4t$ のランプ入力,
 Bはモデルの出力 W のランプ応答, C,
 Dは第3.7図のモデル追従系において
 補償系の極を $[-1, -1, -2]$ に設定し
 た場合の Y , F のランプ応答

§ 3.8 CONDITIONAL FEEDBACK SYSTEM

文献 [5] で提案されている系は CONDITIONAL FEEDBACK SYSTEM と呼ばれ、第 3.11 図に示される構成となっている。

第 3.11 図に於いて、 $G_1(s)$ は制御対象であり、 $B(s)$ はモデルである。

$$A(s) = \frac{B(s)}{G_1(s)H(s)} \quad (3-82)$$

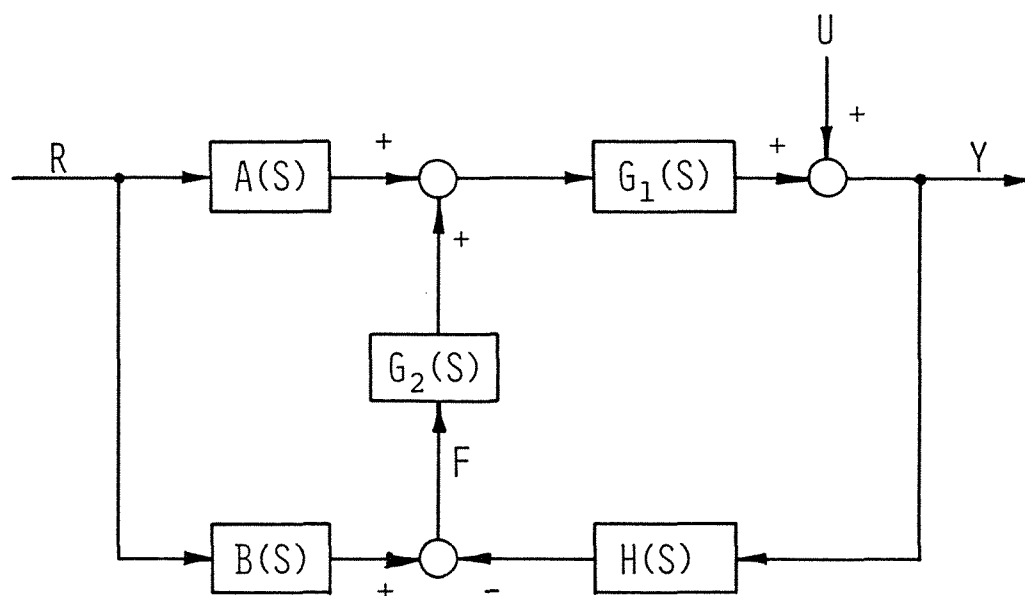
とすると

$$Y(s) = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} U(s) + B(s)R(s) \quad (3-83)$$

となる。

今、制御対象の伝達関数にパラメータ変動が存在するとしてこれを $G_1(s, \Delta)$ として表わす。

パラメータ変動が存在する場合に於いても $A(s)$ は (3-82) 式で与えられる



第 3.11 图 CONDITIONAL FEEDBACK SYSTEM.

$$Y(s) = \frac{1}{1 + G_1(s, \Delta) G_2(s) H(s)} U(s) + B(s) \cdot \frac{G_1(s, \Delta)}{G_1(s)} \cdot \frac{1 + G_1(s) G_2(s) H(s)}{1 + G_1(s, \Delta) G_2(s) H(s)} R(s)$$

(3-84)

となる。

(3-84)式からモデルの出力に対する追従誤差 F は $H(s) = 1$ として

$$F(s) = - \frac{1}{1 + G_1(s, \Delta) G_2(s)} U(s) + B(s) \frac{G_1(s) - G_1(s, \Delta)}{G_1(s)} \cdot \frac{1}{1 + G_1(s, \Delta) G_2(s)} R(s)$$

(3-85)

となつて (3-27) 式で追従精度を定義するとき、

$$1 + G_1(s, \Delta) G_2(s) = 0 \quad \text{で決定される極配置に}$$

つて任意に追従精度を設定することが出来る。

しかしながら (3-82) 式から $A(s)$ を物理的に実現するためには

(イ) $H(s) = 1$ の場合

$[B(s)$ の分子の次数 $+ G_1(s)$ の分母の次数]

$\leq [B(s)$ の分母の次数 $+ G_1(s)$ の分子の次数],

(ロ) $G_1(s)$ の零点は s 平面の右半平面に存在し

ない,

の条件が満足されなければならない。

この点に関し, CONDITIONAL FEEDBACK SYSTEM は第3.1
図のモデル追従系より制約を受け3.7.1で示され
た例題を CONDITIONAL FEEDBACK SYSTEM で実現すること
はできない。

§ 3.9 結 言

制御対象と次数の異なるモデルを用いた設計法
としてのモデル追従系の構成を示した。

高次の制御対象を低次のモデルに追従させるこ

とにより、出力の時間特性に着目して設計が容易になり、一方高次モデルを用いることにより多項関数入力に追従させる系の設計が容易になる。

第3.1図のモデル追従系に $(p-1)$ 次より高次の多項関数が入力、外乱として加えられるとき、 p 次以上の項に対して出力定常追従誤差が残る。しかしこの場合においても、補償系の極の設定により(2-95)式と同様に

$$\int_{t_0}^{t_1} [F(t)]^2 dt \leq \delta' \quad (3-86)$$

ここで $0_+ \leq t_0$, $t_1 < \infty$, δ' は任意の正の実数, の意味で, 任意に出力追従精度を設定することができる。

第4章 非線形制御対象に対するモデル追従系²⁸⁾

§4.1 序 論

従来、非線形系に関しては安定領域を求めることを中心とした解析が主として行われて、設計に関しては古典理論では記述関数を用いたもの、現代理論においてはレギュレータ問題に帰着させた²⁹⁾もの、が知られている。

しかしこれ等は系を設計することよりも、むしろ安定化することと直接の目的としており、例えばステップ入力に対するオーバーシュートなどのような出力の時間特性に注目した設計法はまだ報告されていない。

非線形系の設計を困難にする最も大きな原因は変係数系や非線形特性が状態に依存しているよう

な場合に、 S 領域で議論することができず、時間領域で処理しなければならない点である。

従って、非線形系に対する時間領域での設計法を新たに開発するのは別に、非線形特性をなんらかの方法によって近似的に線形化し、線形系に対する設計法を非線形系に対しても適用可能にすることは、非線形系の設計問題を解決する有効な方法であろうと思われる。

第2章、第3章において、モデル追従系を構成するとき、制御対象の出力に対するパラメータ感度及び外乱感度を任意に設定することができることを示す。

従って、もし非線形特性が線形系におけるパラメータ変動や外乱として表現されることができれば、線形モデルを用いてモデル追従系を構成することによって擬似線形系化が可能である。

非線形系を非線形特性に注目して、動的な非線形系と静的な非線形系に分類することができる。前者

は動的要素自体が非線形特性を示す場合で、例えば双線形系や止り時間系などがこれに含まれる。一方後者には、線形な動的要素に例えば飽和特性を示すような静的非線形要素が結合している系、あるいは変係数系が含まれる。

以下で述べられる擬似線形系化の理論は、静的非線形系に対して適用することができると。

§ 4. 2 静的非線形系

静的非線形要素に対する入力と r_i 、出力と u_i とし、非線形特性を折線近似すると、静的非線形要素の入出力特性は一般に

$$u_i = (k + \Delta k_j^i) r_i + n_j^i \quad (4-1)$$

ただし

$$s_{j-1}^i < r_i \leq s_j^i \quad (4-2)$$

として書くことができる。

今、 m 個の静的非線形要素の入出力特性を y と

めて

$$U = (K + \Delta K_j) R + N_j \quad (4-3)$$

に代し

$$S_{j-1} < R \leq S_j \quad (4-4)$$

ここで

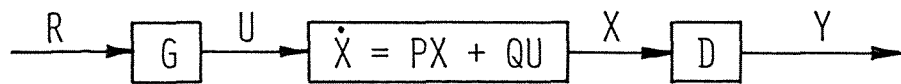
$$S_j = \begin{bmatrix} S_j^1 \\ \vdots \\ S_j^m \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} k \\ \vdots \\ k \end{bmatrix} \quad \Delta K_j = \begin{bmatrix} \Delta k_j^1 \\ \vdots \\ \Delta k_j^m \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad N_j = \begin{bmatrix} n_j^1 \\ \vdots \\ n_j^m \end{bmatrix}$$

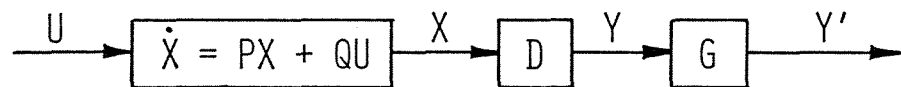
として表わす。

多入力多出力の静的非線形系は、第4.1図の
(1), (2), (3)で示される静的非線形要素と線形動的要素の基本結合に分解することができる。

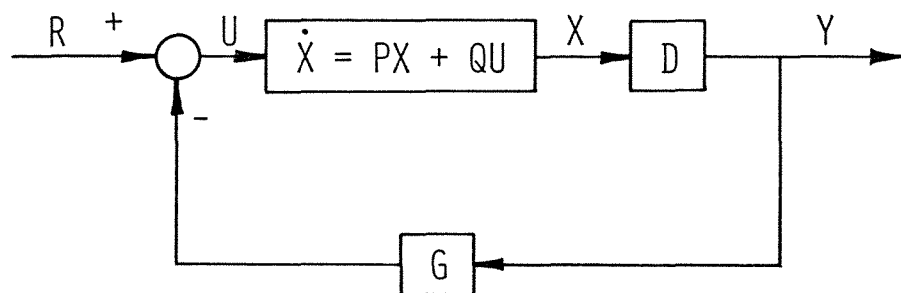
1)



2)



3)



第 4.1 図 静的非線形要素 G と線形動的要素の基本結合

動的要素の入力ベクトル U , 出力ベクトル Y をそれぞれ m 次元とすると, 第 4.1 図に示される (1), (2), (3) の系はそれぞれ

$$\begin{cases} \dot{X} = PX + Q(K + \Delta K_j)R + QN_j \\ Y = DX \end{cases} \quad (4-5)$$

$$\begin{cases} \dot{X} = PX + QU \\ Y = (K + \Delta K_j)DX + N_j \end{cases} \quad (4-6)$$

$$\begin{cases} \dot{X} = [P - Q(K + \Delta K_j)D]X + QR - QN_j \\ Y = DX \end{cases}$$

(4-7)

と書くことができる。(4-5) ~ (4-7) 式においてそれぞれ静的非線形特性が線形系に対するパラメータ変動及び外乱として表わされている。

従って, 第 4.1 図に示された基本結合から構成

されている多入力多出力静的非線形系は一般に

$$\begin{cases} \dot{X} = [P + \Delta P(x, R, t)]X + [Q + \Delta Q(x, R, t)]R \\ \quad + N_1(x, R) \\ Y = [D + \Delta D(x, R, t)]X + N_2(x, R) \end{cases} \quad (4-8)$$

ここで X は n 次元状態ベクトル, R は m 次元入力ベクトル, Y は m 次元出力ベクトル, P, Q, D はそれぞれ $(n \times n), (n \times m), (m \times n)$ のパラメータ測定値からなる定数行列, $\Delta P(x, R, t), \Delta Q(x, R, t), \Delta D(x, R, t)$ はそれぞれ $(n \times n), (n \times m), (m \times n)$ の状態, 入力, 時間依存した非線形特性をパラメータ変動として表わした行列, $N_1(x, R), N_2(x, R)$ はそれぞれ n 次元, m 次元の状態, 入力に依存した非線形特性を外乱として表わしたベクトルとして表わすことができる。

§ 4.3 モデル追従系による疑似線形系化

非線形制御対象が (4-8) 式で示されるようにパラメータ変動や外乱の存在する線形系としてみえられるものとし、簡単のためパラメータ測定誤差や外部からの外乱は存在しないものとする。

(4-8) 式の非線形制御対象が次の条件を満足するとき、非線形制御対象はモデル追従系の構成条件を満足すると称する。

(1) 対 $[P + \Delta P, Q + \Delta Q]$ は可制御の条件を満足する。

(2) 対 $[P + \Delta P, D + \Delta D]$ は可観測の条件を満足する。

$$(3) \quad \text{rank} \left[\begin{array}{c|c} P + \Delta P & Q + \Delta Q \\ \hline D + \Delta D & 0 \end{array} \right] = n + m. \quad (4-9)$$

(4-8) 式のパラメータ測定値 P , Q , D を用いて (4-10) 式で示されるモデルを作り

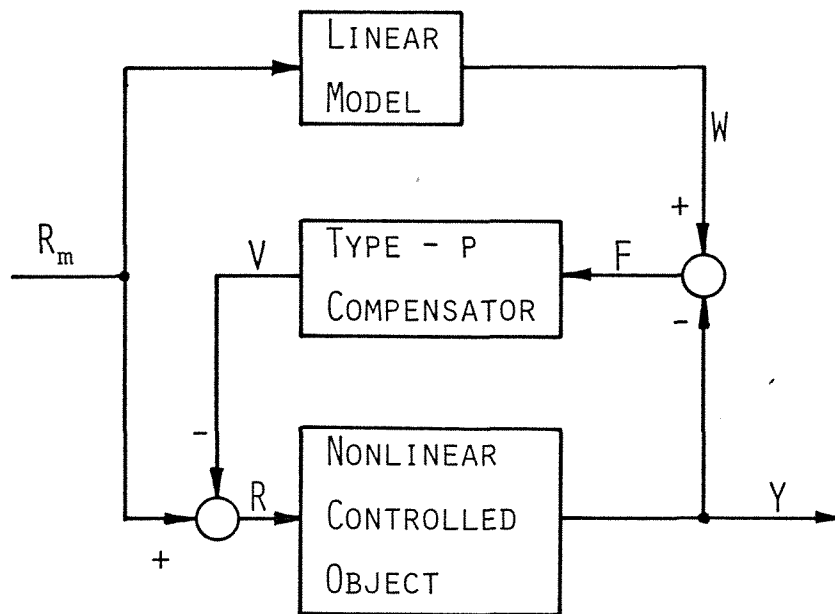
$$\begin{cases} \dot{Z} = PZ + QR_m \\ W = DZ \end{cases} \quad (4-10)$$

第 4.2 図の系を構成する。

(4-8) 式に於ける外乱 N_1 , N_2 は非線形特性によって決定されるものであり, 一般にステップ関数的に変化する。従って第 4.2 図に於いて入力 R_m が $(p-1)$ 次の多項関数で与えられるとき, 補償器を P 形とすることによって (2-14) 式の意味で任意の出力追従精度を得ることが出来る。

この事実は静的非線形制御対象に対して第 4.2 図で示されるモデル追従系を構成するとき, 擬似線形系化することが出来ることを示している。

この結果, 第 4.2 図のモデル追従系に線形系に対応する設計法を適用して第 2.2 図の系を構成するとき指定された特性を持った線形モデルの出力 W



第 4.2 図 モデル追従系

に任意の追従精度で非線形制御対象の出力が追従し、設計の目的を達成することができる。

§ 4. 4 飽和，クーロン摩擦，バックラッシュ特性を含むサーボ系の設計

実際のサーボ系においては、入力増幅器における飽和特性，モータ回転軸及び負荷回転軸におけるクーロン摩擦特性，モータ回転軸と負荷回転軸との間を歯車列で結合しときのバックラッシュ特性，等の非線形特性を含むことを避けることはできない。

このような非線形サーボ系を扱うものとして文献[30]～[33]が知られている。

しかしながら，文献[30]～[32]においては解析のみが行われ，わずかに具体的な設計法を示すものとして，文献[33]があるにすぎない。文献[33]においても，その設計法は試行錯誤的

なものであり、このようにサーボ系に限ぎってみても一般的な設計法は手だ確立されていないのが現状である。

本節ではモデル追従系による擬似線形系化の例題として、飽和、クーロン摩擦、バックラッシュ特性を含むサーボ系を取り上げ、その有効性を示すものである。

最初に1個の非線形要素を含む場合について検討し、最後に3個の非線形要素を同時に含む場合を考える。

簡単のため、非線形要素を除いたサーボモータの状態方程式は

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K \end{bmatrix} \bar{R}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad (4-11)$$

あるいは伝達関数で

$$Y(s) = \frac{K}{s(s+T)} \bar{R}(s) \quad (4-12)$$

として表わされるものとし、 K 、 T における測定誤差や外乱は存在しないものとする。

4.4.1 飽和特性を含む場合

入力増幅器の飽和特性を考慮したサーボ系は、第4.3図で示される。第4.3図のフィードバック系全体を制御対象と見なすと、制御対象の状態方程式は

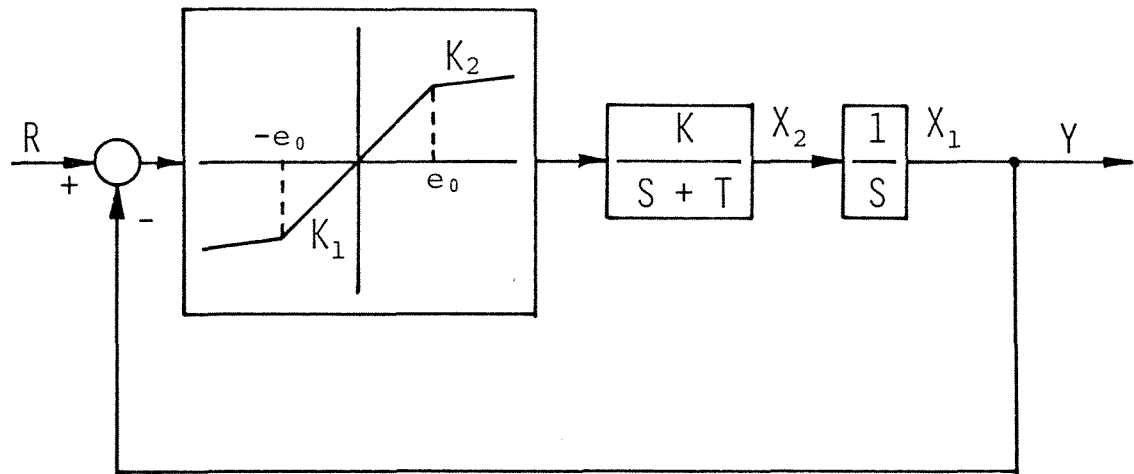
$|R - Y| \leq e_0$ のとき

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K_1 K & -T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_1 K \end{bmatrix} R$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad (4-13)$$

$|R - Y| > e_0$ のとき

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K_2 K & -T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_2 K \end{bmatrix} R$$



第4.3図 入力増幅器の飽和特性を考

慮したサーボ系

$$\begin{aligned}
 & + \begin{bmatrix} 0 \\ (K_1 - K_2)K e_0 \end{bmatrix} \\
 Y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad (4-14)
 \end{aligned}$$

となる。(4-6)式, (4-7)式を代入する

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(K_1 + \Delta K_1')K & -T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ (K_1 + \Delta K_1')K \end{bmatrix} R \\
 & + \begin{bmatrix} 0 \\ N_1' \end{bmatrix} \\
 Y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad (4-15)
 \end{aligned}$$

ここで $|R - Y| \leq e_0$ のとき

$$\Delta K_1' = 0, \quad N_1' = 0$$

$|R - Y| > e_0$ のとき

$$\Delta K_1' = K_2 - K_1, \quad N_1' = (K_1 - K_2)K e_0$$

と書くことができる。(4-15)式は飽和特性を線形系に与えるパラメータ変動分及び外乱と

として表わしてあり，さらに明らかにモデル追従系の構成条件を満足している。

(4-15)式から(4-16)式で示されるモデルを作る。

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 k & -T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k_1 k \end{bmatrix} R_m$$

$$\bar{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (4-16)$$

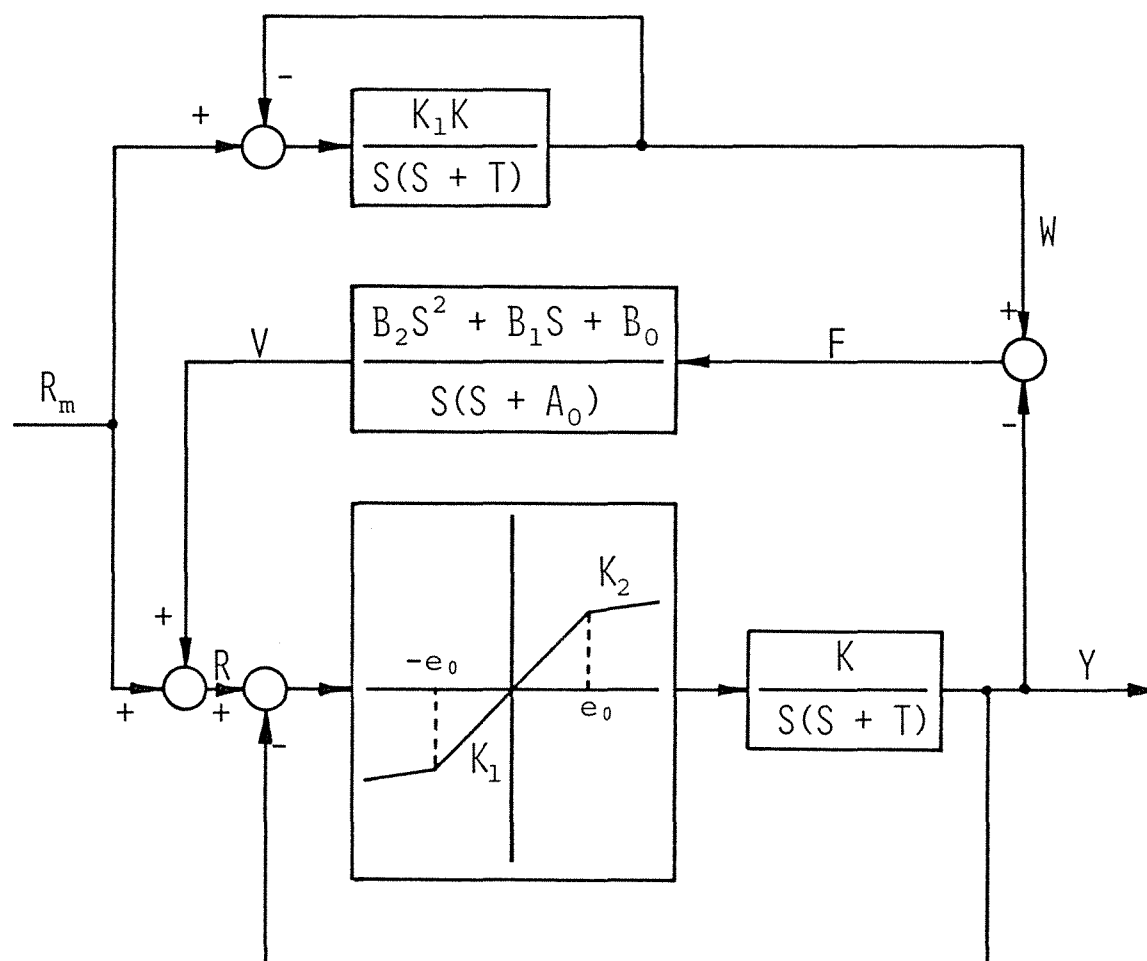
(4-15)式に於いて外乱項 N_1^1 はステップ関数助に変化することに注目すると， R_m がステップ関数のとき，補償器を1形として第4.4図に示されるモデル追従系を構成する。

$$T = 0.4, \quad k = 1, \quad k_1 = 1, \quad k_2 = 0.2,$$

$$e_0 = 0.5 \text{ (V)}, \quad R_m = 0.8 \text{ (V)},$$

として以下の実験結果をアナログ計算機によって得た。

第4.5図に於けるAはモデルの出力 W のステップ応答，Bは第4.3図の制御対象に於ける出力 Y



第4.4図 第4.3図のサーボ系に対する
モデル追従系

のステップ応答をそれぞれ示している。

第4.6図に於けるAはモデルの出力Wのステップ応答，B及びCは第4.4図に於いて

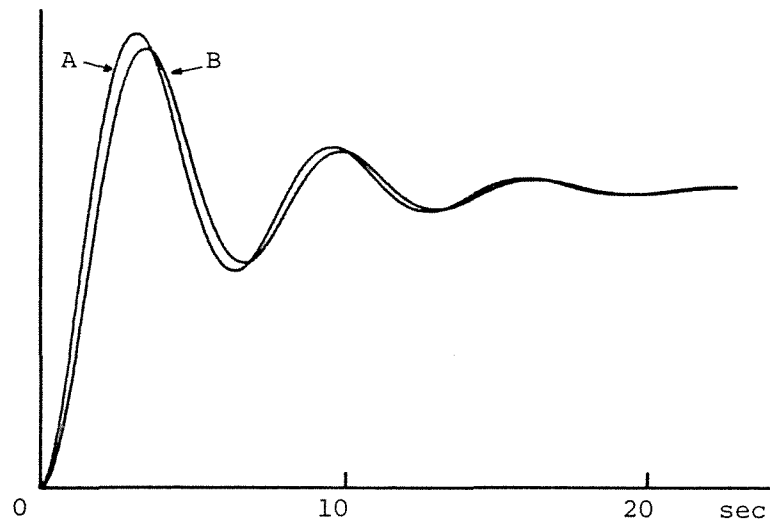
$$[A_0, B_0, B_1, B_2] = [15.6, 16.0, 48.4, 32.8]$$

としてパラメータ変動分 ΔK^1 を無視したとき，補償系の極を $[-2, -2, -2, -2]$ に設定した場合のY及びFのステップ応答をそれぞれ示している。

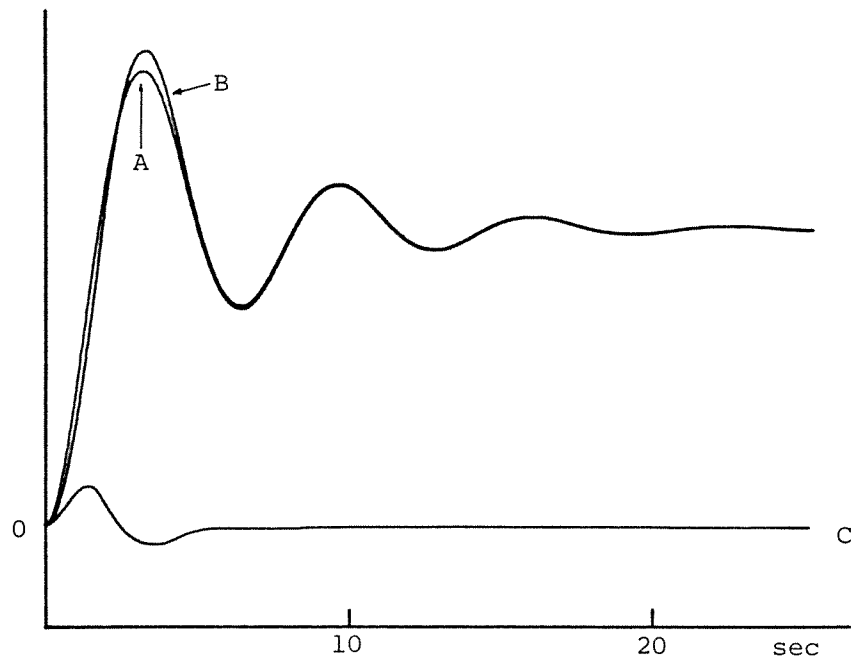
第4.7図に於けるAはモデルの出力Wのステップ応答，B及びCは第4.4図に於いて

$$[A_0, B_0, B_1, B_2] = [23.6, 81.0, 192.4, 79.6]$$

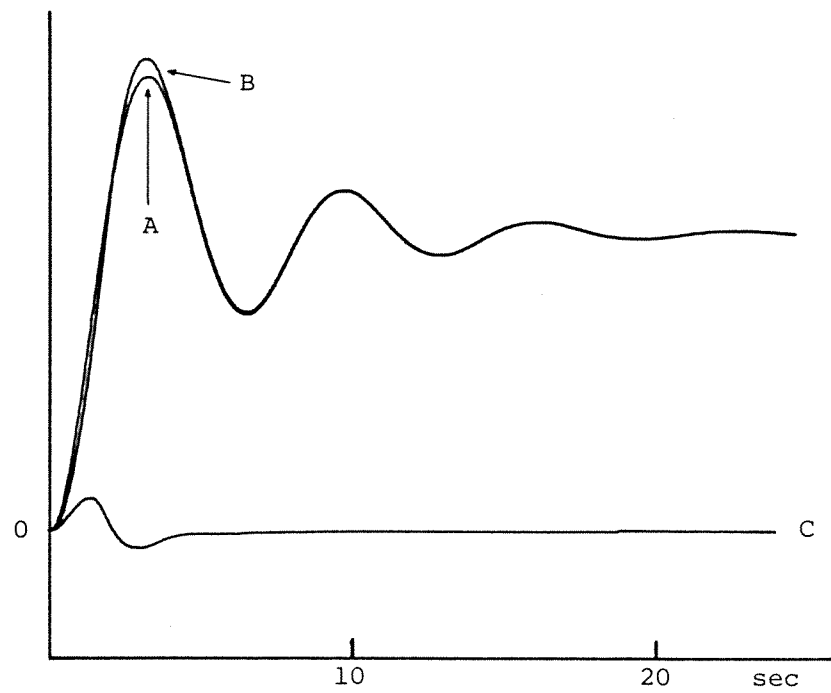
としてパラメータ変動分 ΔK^1 を無視したとき，補償系の極を $[-3, -3, -3, -3]$ に設定した場合のY及びFのステップ応答をそれぞれ示している。



第4.5図 Aはモデルの出力 W のステップ応答, Bは第4.3図の系における出力 Y のステップ応答



第4.6図 Aはモデルの出力 W のステップ応答, B, Cは第4.4図のモデル追従系において補償系の極を $[-2, -2, -2, -2]$ に設定した場合の Y, F のステップ応答



第4.7図 Aはモデルの出力 W のステップ応答, B, Cは第4.4図のモデル追従系において補償系の極を $[-3, -3, -3, -3]$ に設定した場合の Y, F のステップ応答

4.4.2 クーロン摩擦特性を含む場合

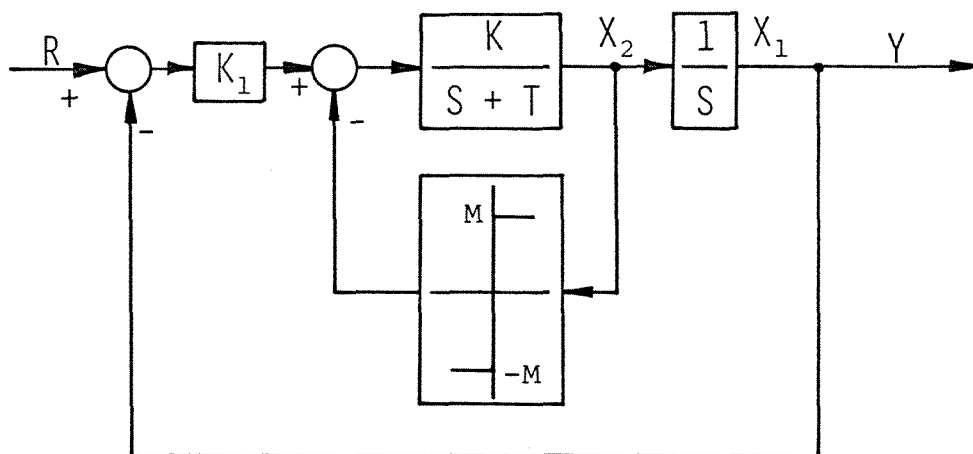
クーロン摩擦特性を考慮したサーボ系は、第4.8図で示される。第4.8図のフィードバック系全体を制御対象と見なすと、制御対象の状態方程式は

$X_2 \geq 0$ のとき

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K_1 K & -T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_1 K \end{bmatrix} R \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 \\ -KM \end{bmatrix} \\ Y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad (4-17) \end{aligned}$$

$X_2 < 0$ のとき

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K_1 K & -T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_1 K \end{bmatrix} R \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 \\ KM \end{bmatrix} \end{aligned}$$



第4.8図 クーロニ摩擦特性を考慮し

たサーボ系

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (4-18)$$

と取らる。 (4-17) 式, (4-18) 式をまとめると

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K_1 K & -T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_1 K \end{bmatrix} R$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ N_1^2 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (4-19)$$

ここで $x_2 \geq 0$ のとき, $N_1^2 = -KM$

$x_2 < 0$ のとき, $N_1^2 = KM$

と書くことができる。(4-19) 式はクーロン摩擦特性と線形系に対する外乱として表わしており, さらに明らかにモデル追従系の構成条件を満足している。

(4-19) 式から, 飽和特性を含む場合と同様に (4-16) 式のモデルを作る。

(4-19)式において外乱項 N_i^2 はステップ関数的に変化することに注目すると, R_m がステップ関数のとき補償番を1形として第4.9図で示されるモデル追従系を構成する。

$T=0.4$, $K=1$, $K_1=1$, $M=0.1$ (π), $R_m=0.8$ (π),
として以下の実験結果をアナログ計算機によって得た。

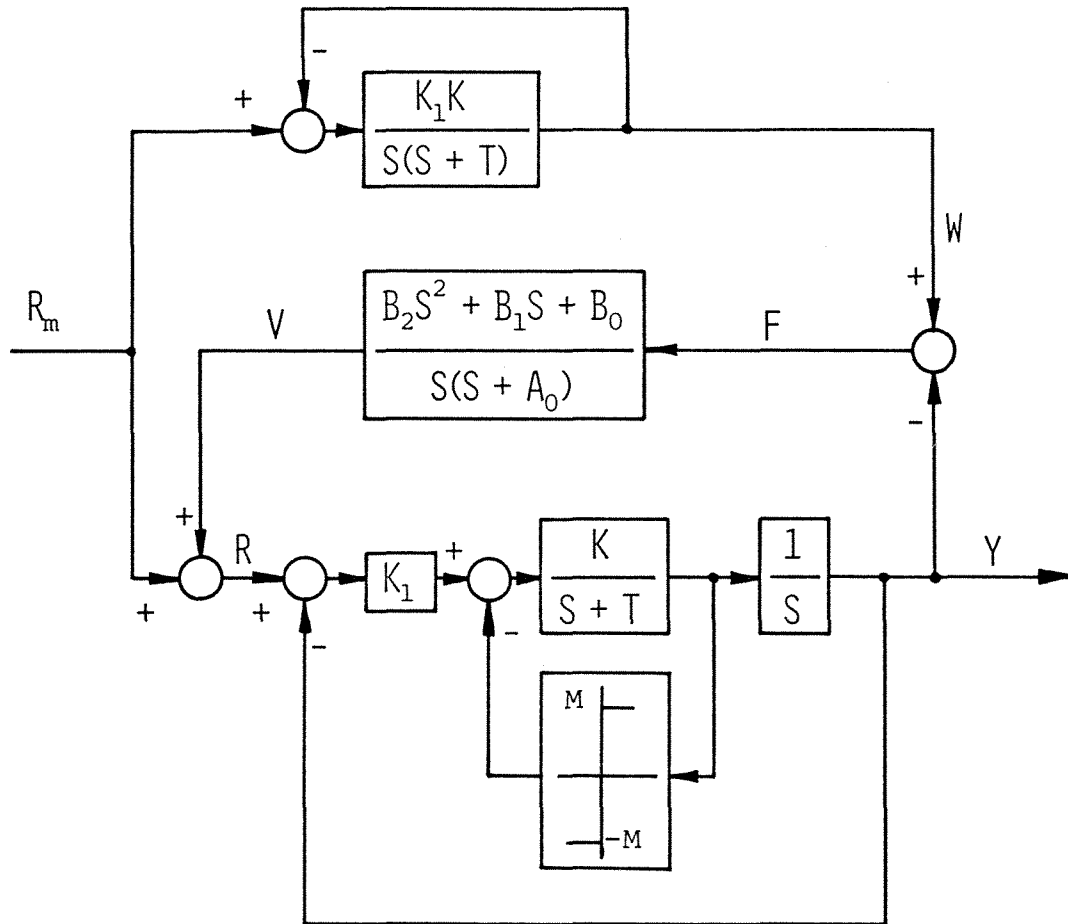
第4.10図におけるAはモデルの出力Wのステップ応答, Bは第4.8図の制御対象における出力Yのステップ応答をそれぞれ示している。

第4.11図におけるAはモデルの出力Wのステップ応答, B及びCは第4.9図において

$$[A_0, B_0, B_1, B_2] = [15.6, 16.0, 48.4, 32.8]$$

として補償系の極を $[-2, -2, -2, -2]$ に設定した場合のY及びFのステップ応答をそれぞれ示している。

第4.12図におけるAはモデルの出力Wのステップ応答, B及びCは第4.9図において



第4.9図 第4.8図のサーボ系に対する
モデル追従系

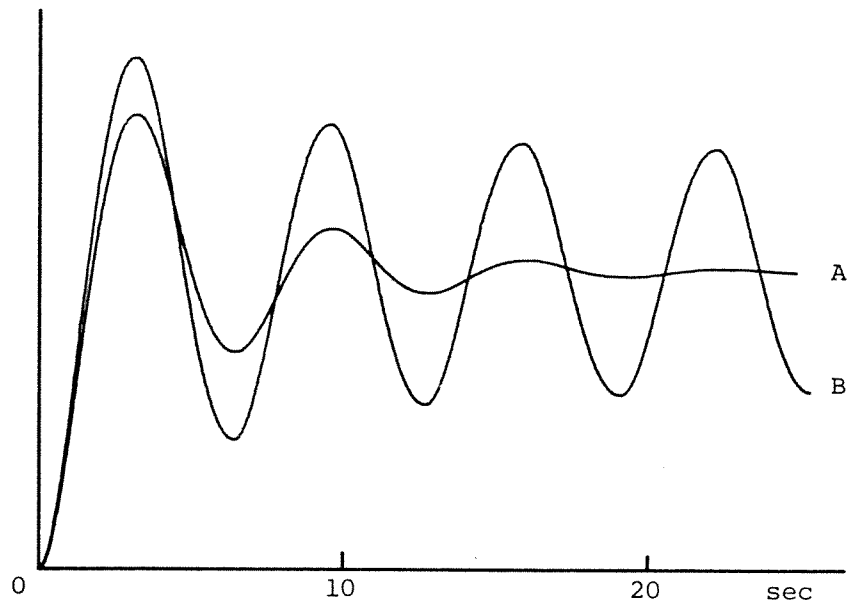
$$[A_0, B_0, B_1, B_2] = [23.6, 81.0, 192.4, 79.6]$$

として補償系の極を $[-3, -3, -3, -3]$ に設定し、この場合の Y 及び F のステップ応答をそれぞれ示している。

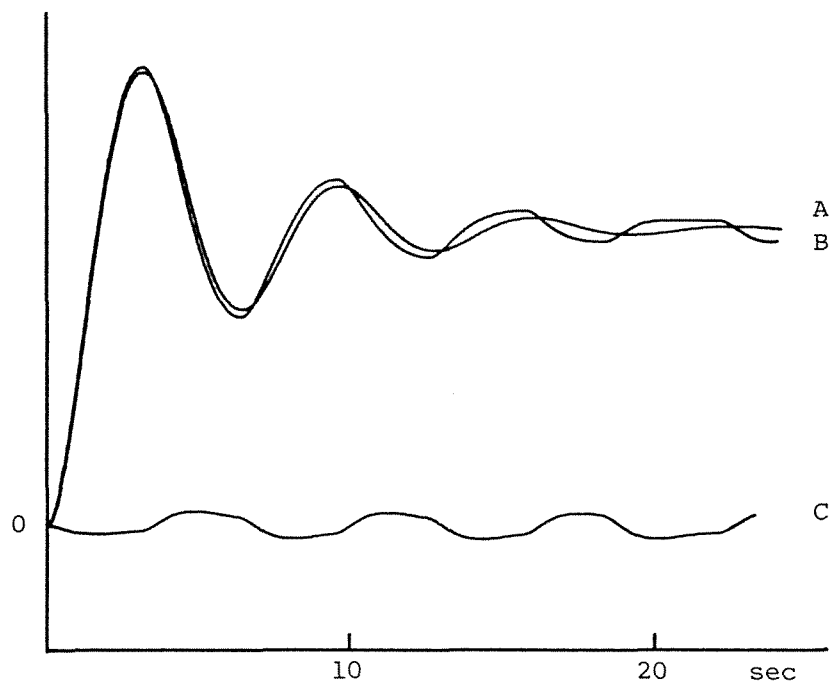
4・4・3 バックラッシュ特性を含む場合

サーボ系におけるバックラッシュはモータ回転軸と負荷回転軸の間に存在する歯車列によって生ずると考えるのが一般的であって、バックラッシュ特性を含むサーボ系は第4・13図で示される。第4・1図において Y はモータ回転軸の回転角、 Y' は負荷回転軸の回転角である。

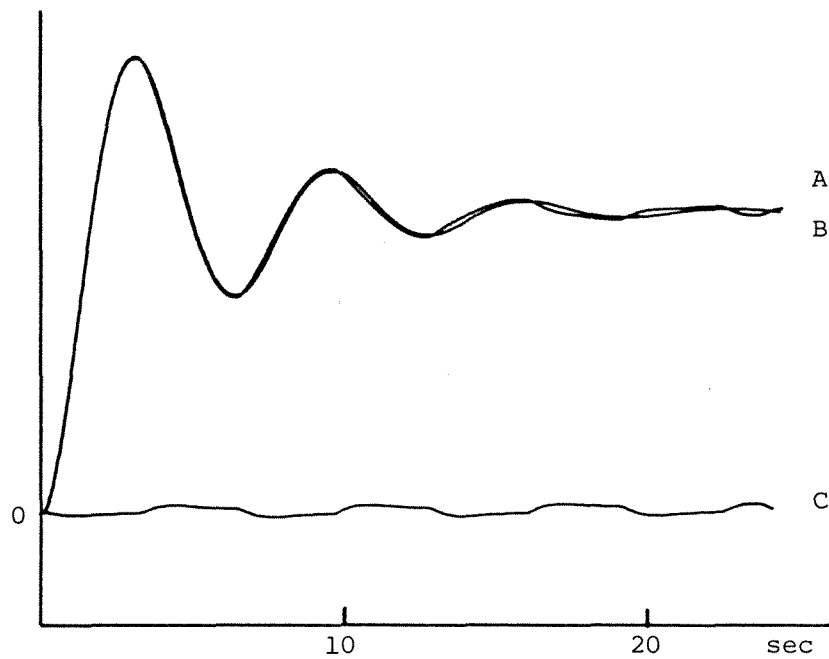
Y' を出力として第4・13図の制御対象の状態方程式を求めるとき、 Y' が $0 \rightarrow a$ 間、 $b \rightarrow c$ 間、 $d \rightarrow e$ 間に存在する場合、モデル追従系の構成条件のうち、(2)の可観測の条件、(3)における(4-9)式を満足しない。



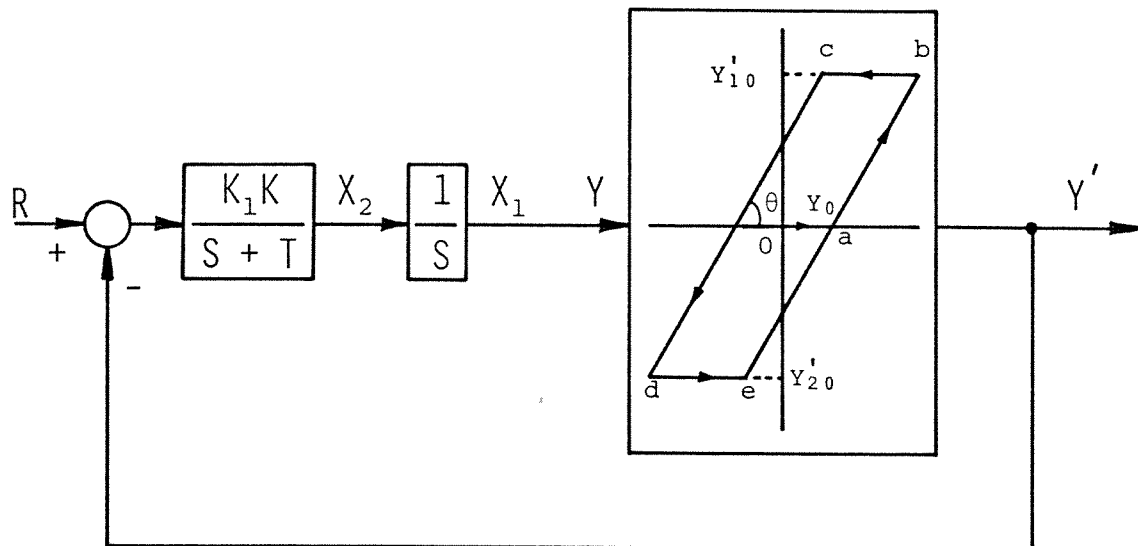
第4.10図 Aはモデルの出力 W のステップ応答, Bは第4.8図の系における出力 Y のステップ応答



第4.11図 Aはモデルの出力 W のステップ応答, B, Cは第4.9図のモデル追従系において補償系の極を $[-2, -2, -2, -2]$ に設定した場合の Y , H のステップ応答



第4.12図 Aはモデルの出力 W のステップ応答, B, Cは第4.9図のモデル追従系において補償系の極を $[-3, -3, -3, -3]$ に設定した場合の Y , F のステップ応答



第4.13図 バックラッシュ特性を考慮

1. ヒサ - ボ系

モータ回転軸の回転角 Y を出力として第 4・13 図の制御対象の状態方程式を求めると、最初に出カ Y および Y' が 0 点に存在して、(4-20) ~ (4-24) 式を得る。

1) Y' が 0 - a 間に存在するとき

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_1 K \end{bmatrix} R$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad (4-20)$$

2) Y' が $a \rightarrow b$, $c \rightarrow b$ 間に存在するとき

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K_1 K & -T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_1 K \end{bmatrix} R + \begin{bmatrix} 0 \\ K_1 K Y_0 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad (4-21)$$

3) Y' が $b \rightarrow c$ 間に存在するとき

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_1 K \end{bmatrix} R + \begin{bmatrix} 0 \\ -K_1 K Y'_{10} \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (4-22)$$

4) Y' が $C \rightarrow d$ 間に存在するとき

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K_1 K & -T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_1 K \end{bmatrix} R + \begin{bmatrix} 0 \\ -K_1 K Y_0 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (4-23)$$

5) Y' が $d \rightarrow e$ 間に存在するとき

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_1 K \end{bmatrix} R + \begin{bmatrix} 0 \\ -K_1 K Y'_{20} \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (4-24)$$

(4-20) ~ (4-24) 式をまとめると, (4-25) 式となる。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(K_1 + \Delta K_1^3) K & -T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_1 K \end{bmatrix} R + \begin{bmatrix} 0 \\ N_1^3 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (4-25)$$

ここで ΔK_1^3 , N_1^3 は Y' の存在領域によって第4・1表のように与えられる。

第4・1表 Y' の存在領域と ΔK_1^3 , N_1^3

Y' の存在領域	ΔK_1^3	N_1^3
$0 \longrightarrow a$	$-K_1$	0
$a \longrightarrow b$	0	$K_1 K Y_0$
$b \longrightarrow c$	$-K_1$	$-K_1 K Y'_{10}$
$c \longrightarrow d$	0	$-K_1 K Y_0$
$d \longrightarrow e$	$-K_1$	$-K_1 K Y'_{20}$
$e \longrightarrow b$	0	$K_1 K Y_0$

(4-25)式はバックラッシュ特性と線形系におけるパラメータ変動及び外乱として表われてあり、さらに明らかにモデル追従系の構成条件を満足する。(4-25)式から、飽和特性を含む場合やクーロン摩擦特性を含む場合と同様に、(

4-16) 式のモデルを作る。

(4-25) 式において外乱項 N_1^3 はステップ関数的に変化することに注目すると, R_m がステップ関数のとき補償器を1形として第4.14図に示されるモデル追従系を構成する。以下の実験結果は

$$T = 0.4, \quad K = 1, \quad K_1 = 1, \quad Y_0 = 0.25(V), \quad \theta = 45(\text{度}),$$

$$R_m = 0.8(V),$$

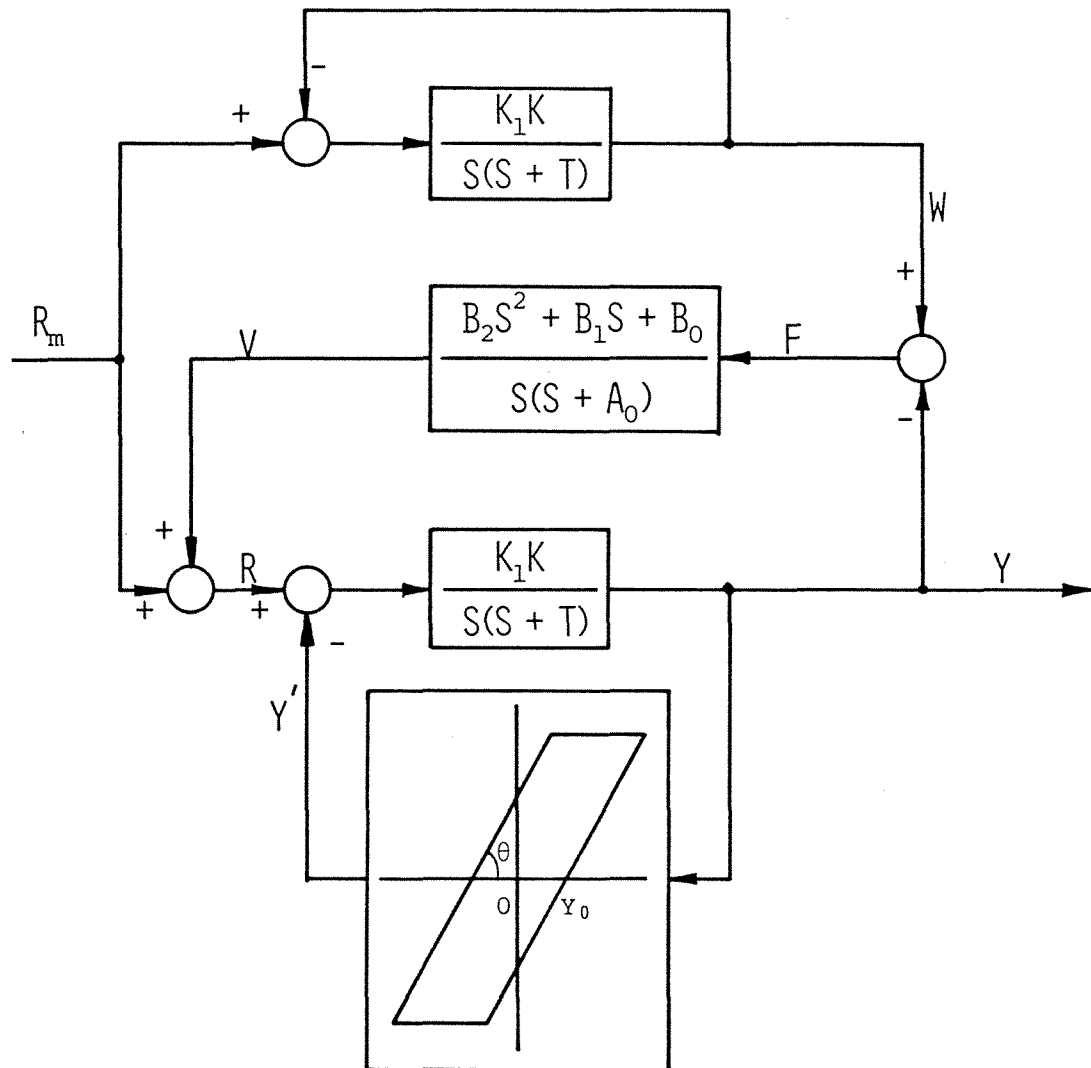
としてアナログ計算機によって得た。

第4.15図に示ける A はモデルの出力 W のステップ応答, B 及び C は第4.13図の制御対象に示ける出力 Y 及び Y' のステップ応答をそれぞれ示している。

第4.16図に示ける A はモデルの出力 W のステップ応答, B, C 及び D は第4.14図において

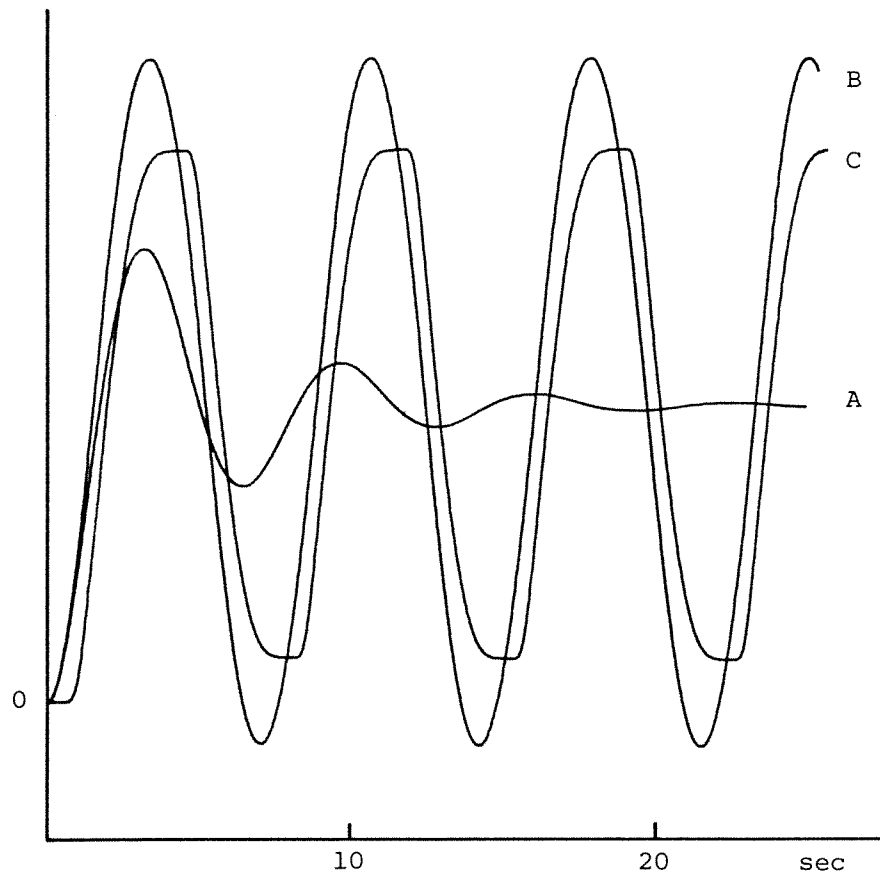
$$[A_0, B_0, B_1, B_2] = [15.6, 16.0, 48.4, 32.8]$$

としてパラメータ変動分 ΔK_1^3 を無視したとき, 補償系の極を $[-2, -2, -2, -2]$ に設定した場合の Y , Y' 及び W のステップ応答をそれぞれ示して

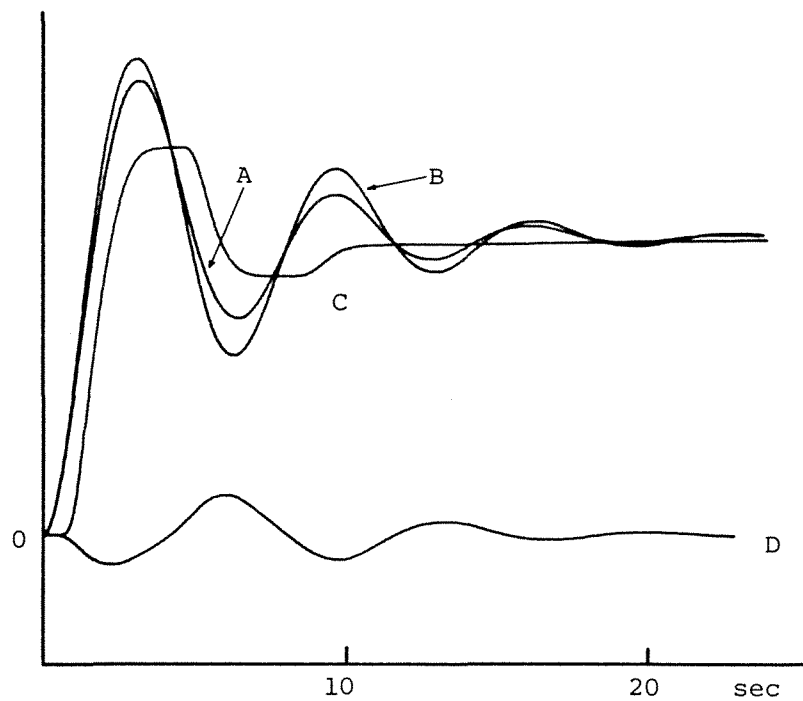


第4.14図 第4.13図のサーボ系に対する

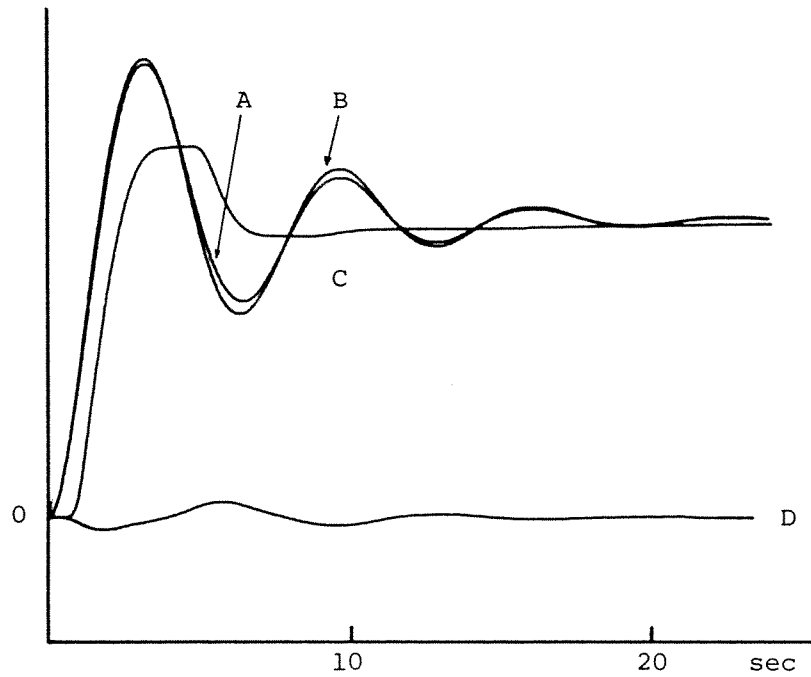
モデル追従系



第4.15図 Aはモデルの出力 W のステップ応答, B, Cは第4.13図の系における Y , Y' のステップ応答



第4.16図 Aはモデルの出力 W のステップ応答， B， C 及び D は第4.14図のモデル追従系において補償系の極を $[-2, -2, -2, -2]$ に設定した場合の Y ， Y' 及び F のステップ応答



第4.17図 Aはモデルの出力 W のステップ応答， B， C及びDは第4.14図のモデル追従系において補償系の極を $[-3, -3, -3, -3]$ に設定した場合の Y ， Y' 及び F のステップ応答。

いる。

第4.17図に示ける A はモデルの出力 W のステップ応答, B , C 及び D は第4.14図に示いて

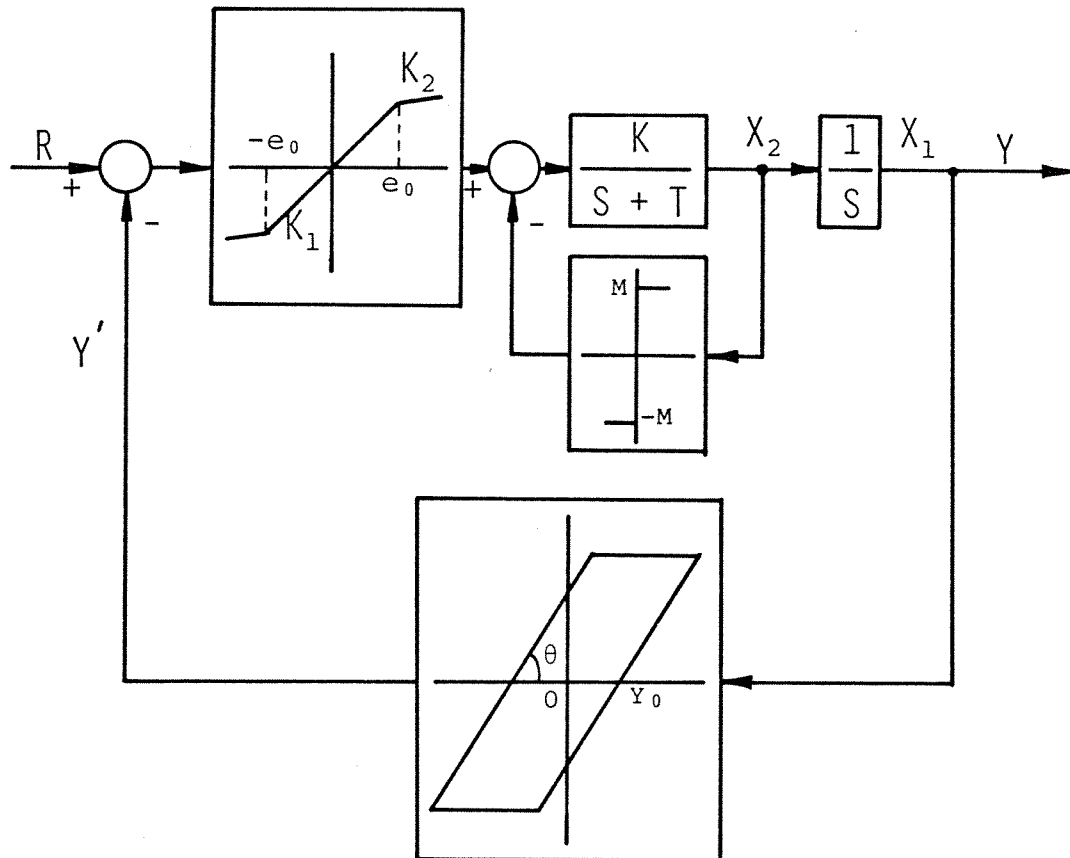
$$[A_0, B_0, B_1, B_2] = [23.6, 81.0, 192.4, 79.6]$$

としてパラメータ変動分 ΔK_1^3 を無視し, 補償系の極を $[-3, -3, -3, -3]$ に設定した場合の Y , Y' 及び F のステップ応答をそれぞれ示している。

4・4・4 飽和, クーロン摩擦, バックラッシュ特性を含む場合

飽和, クーロン摩擦, バックラッシュ特性を同時に考慮したカーボ系は第4.17図となり, その状態方程式は(4-15)式, (4-19)式, (4-25)式から

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(K_1 + \Delta K_1^1 + \Delta \hat{K}_1^3)K & -T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$



第4.18図 飽和，クーロン摩擦，バックラッシュ特性を考慮したサーボ系

$$\begin{aligned}
& + \begin{bmatrix} 0 \\ (K_1 + \Delta K_1^1)K \end{bmatrix} R + \begin{bmatrix} 0 \\ N_1^1 + N_1^2 + N_1^3 \end{bmatrix} \\
Y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (4-26)
\end{aligned}$$

ここで ΔK_1^1 , N_1^1 は飽和特性, N_1^2 はクーロン
 摩擦特性, $\Delta K_1^3 = -(K_1 + \Delta K_1^1)$, N_1^3 はバックラッ
 シュ特性をそれぞれ表わすパラメータ変動分, 以
 下の外乱

と1で得られ, さらに明らかにモデル追従系の構
 成条件を満足する。(4-26)式からモデルは(4-16)式と同様に

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K_1 K & -T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_1 K \end{bmatrix} R_m \\
W &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (4-27)
\end{aligned}$$

となる。

(4-26)式における外乱項 N_1^1 , N_1^2 , N_1^3 はス
 テップ関数的に変化するので, R_m をステップ関

数とするとき補償器を1形として第4.19図に示されるモデル追従系を構成する。

$$T = 0.4, \quad K = 1, \quad K_1 = 1, \quad K_2 = 0.2, \quad e_0 = 0.5 (\nabla)$$

$$M = 0.1 (\nabla), \quad Y_0 = 0.25 (\nabla), \quad \theta = 45 (\text{度}), \quad R_m = 0.8 (\nabla)$$

として以下の実験結果をアナログ計算機によって得た。

第4.20図におけるAはモデルの出力 W のステップ応答, B及びCは第4.18図の制御対象における Y 及び Y' のステップ応答をそれぞれ示している。

第4.21図におけるAはモデルの出力 W のステップ応答, B, C及びDは第4.19図において

$$[A_0, B_0, B_1, B_2] = [15.6, 16.0, 48.4, 32.8]$$

としてパラメータ変動分 ΔK_1 , $\Delta \hat{K}_1^3$ を無視したとき, 補償系の極を $[-2, -2, -2, -2]$ に設定した場合の Y , Y' 及び F のステップ応答をそれぞれ示している。

第4.22図におけるAはモデルの出力 W のステッ

プ応答, B , C 及び D は第 4.19 図において

$$[A_0, B_0, B_1, B_2] = [23.6, 81.0, 192.4, 79.6]$$

としてパラメータ変動分 ΔK_1 , $\Delta \hat{K}_1^3$ を無視し

とき, 補償系の極を $[-3, -3, -3, -3]$ に設定

した場合の Y , Y' 及び F のステップ応答をそれぞれ示している。

4・4・5 非線形サーボ系の設計

(4-26) 式で表わされる非線形サーボ系の入出力伝達関数を

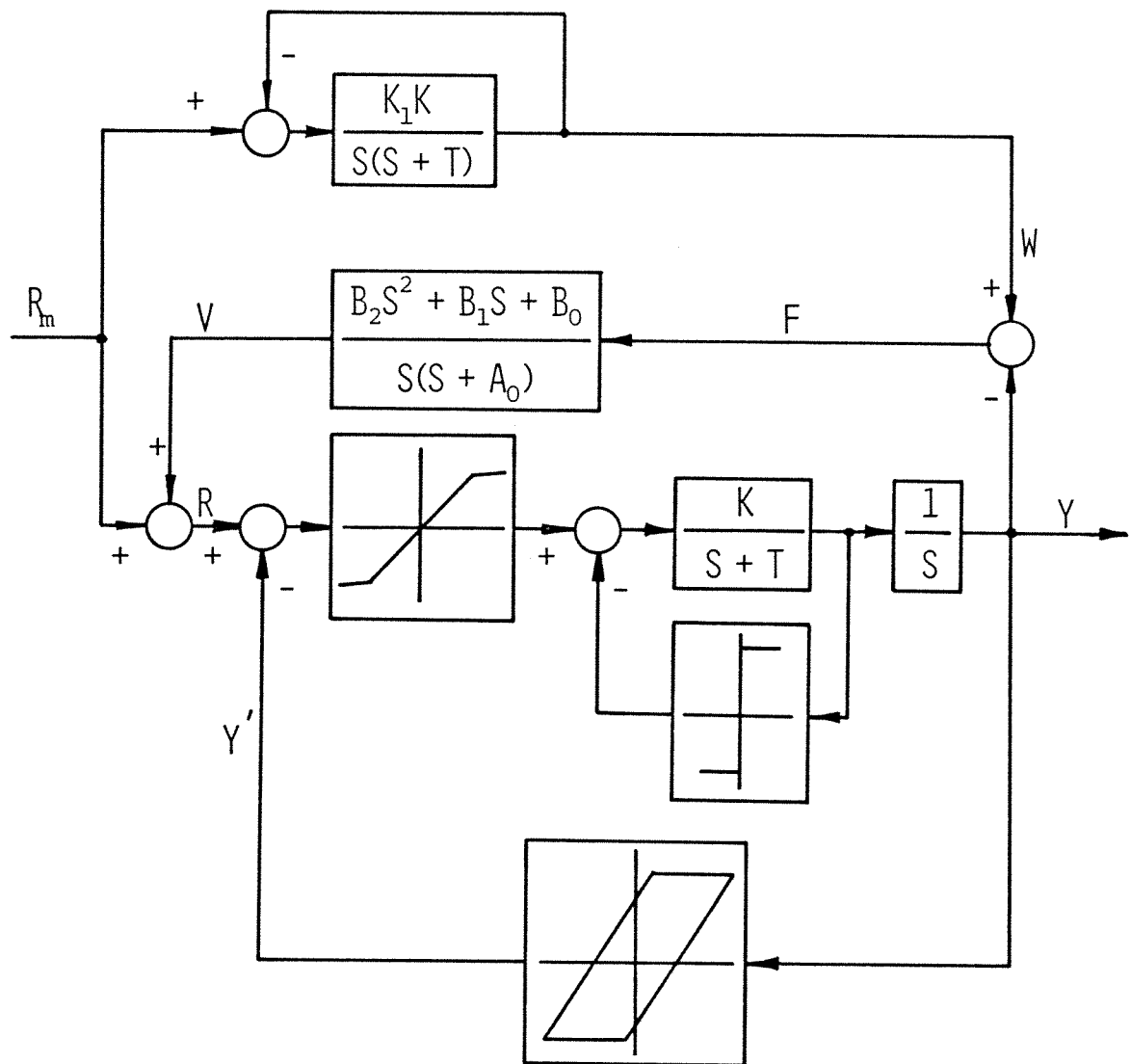
$$G(S) = \frac{1}{S^2 + 0.6S + 1} \quad (4-28)$$

に設定する問題を考える。

(4-27) 式のモデルにおいて, R_m を

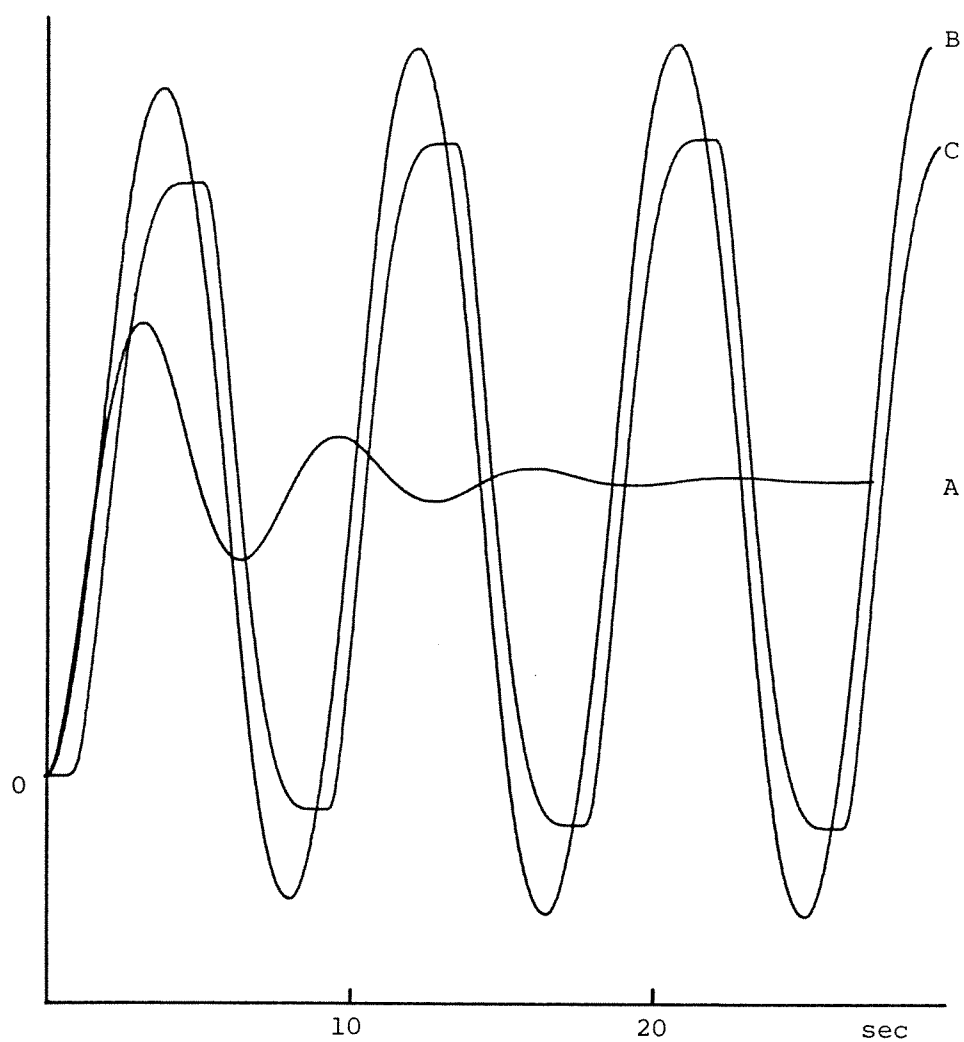
$$R_m = -0.2 Z_2 + \bar{R}_m \quad (4-29)$$

で与えるとき, モデルの入出力伝達関数は (4-28) 式となる。

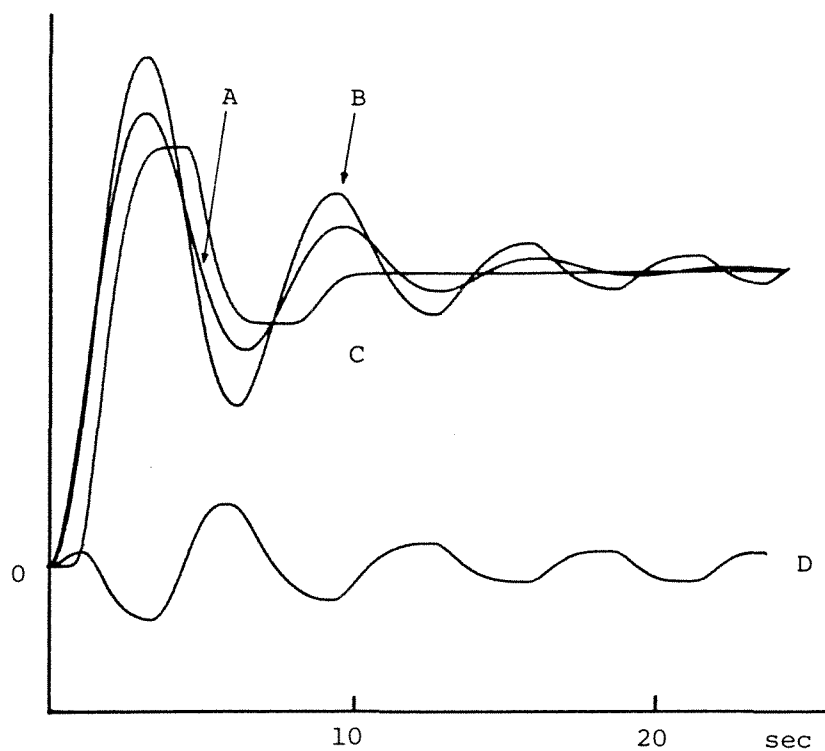


第 4.19 図 第 4.18 図のサーボ系に対する

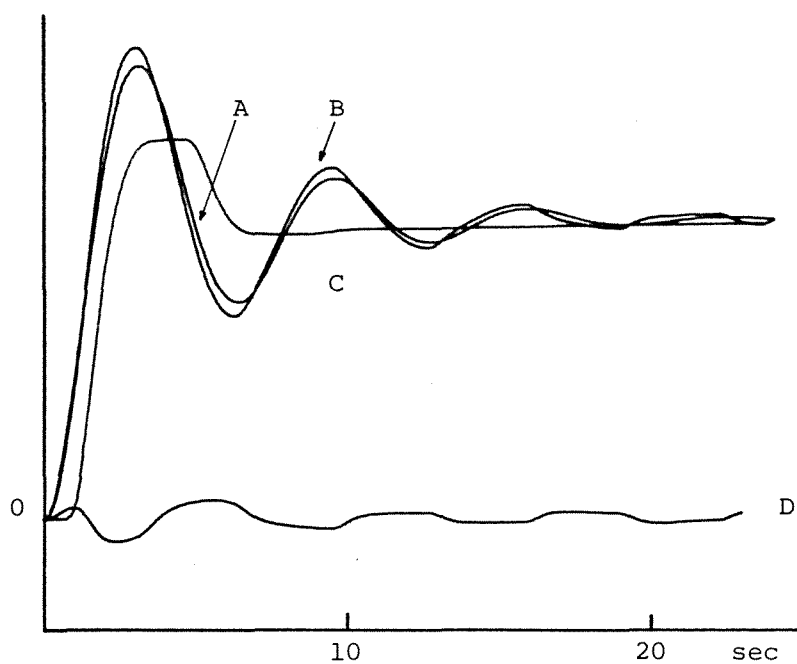
モデル追従系



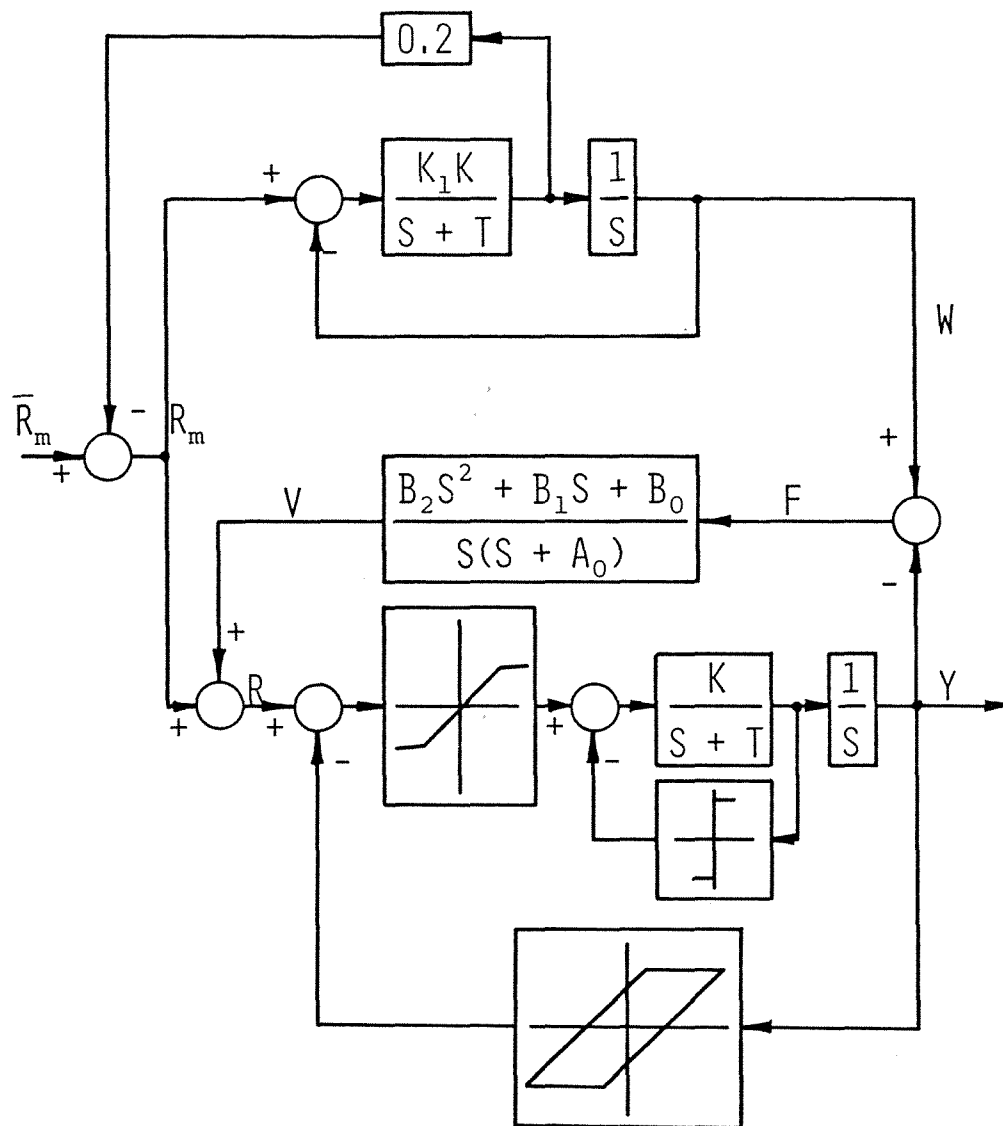
第4.20図 Aはモデルの出力 W のステップ応答, B, Cは第4.18図の系における Y , Y' のステップ応答



第4.21図 Aはモデルの出力 W のステップ応答，B，C及びDは第4.19図のモデル追従系において補償系の極を $[-2, -2, -2, -2]$ に設定した場合の Y ， Y' 及び F のステップ応答。



第4.22図 Aはモデルの出力 W のステップ応答， B， C及びDは第4.19図のモデル追従系において補償系の極を $[-3, -3, -3, -3]$ に設定した場合の Y ， Y' 及び F のステップ応答



第 4.23 図 第 4.19 図のモデル追従系に
対する設計

従って、第2・3図から第4・23図で示される系をアナログ計算機にさして構成し、以下の実験結果を得た。

第4・24図におけるAは第4・23図のWのステップ応答，B，C及びDは第4・23図において

$$[A_0, B_0, B_1, B_2] = [15.6, 16.0, 48.4, 32.8]$$

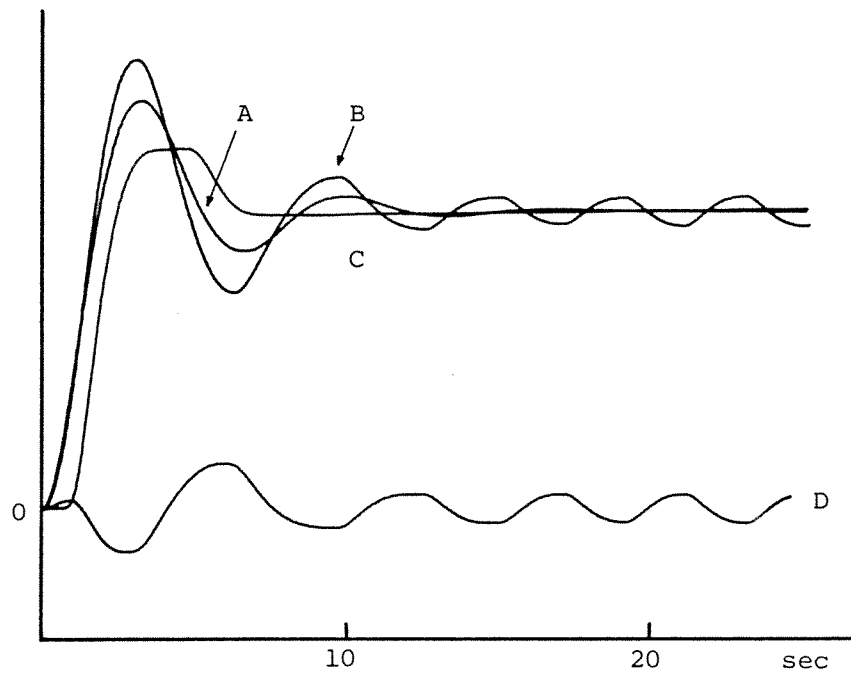
としてパラメータ変動分 ΔK_1^1 ， $\Delta \hat{K}_1^3$ を無視し、とき、補償系の極を $[-2, -2, -2, -2]$ に設定した場合の Y ， Y' 及びFのステップ応答をそれぞれ示している。

第4・25図におけるAは第4・23図のWのステップ応答，B，C及びDは第4・23図において

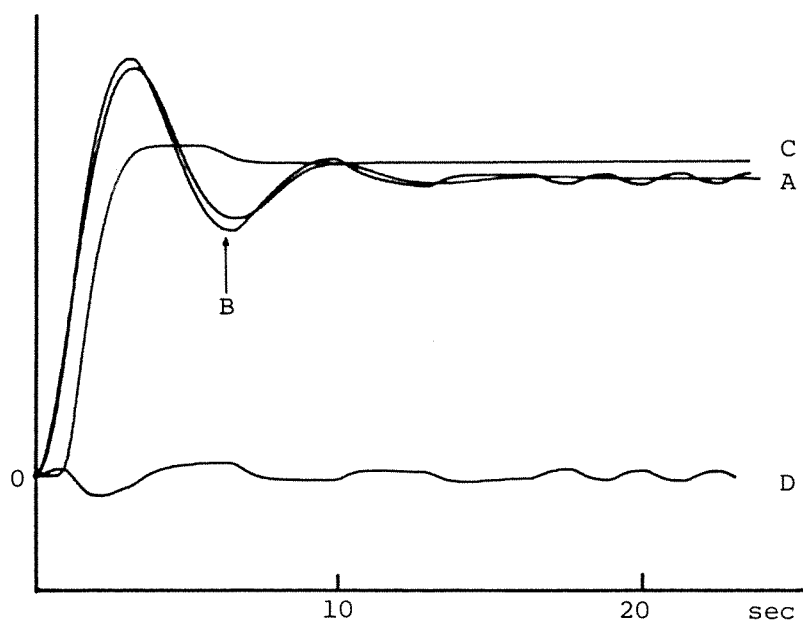
$$[A_0, B_0, B_1, B_2] = [23.6, 81.0, 192.4, 79.6]$$

としてパラメータ変動分 ΔK_1^1 ， $\Delta \hat{K}_1^3$ を無視し、とき、補償系の極を $[-3, -3, -3, -3]$ に設定した場合の Y ， Y' 及びFのステップ応答をそれぞれ示している。

第4・24図及び第4・25図の実験結果は、非線形



第 4.24 図 A は第 4.23 図の系に於ける
 W のステップ応答, B, C 及び D は
 補償系の極を $[-2, -2, -2, -2]$ に設
 定した場合の Y , Y' 及び F のステッ
 プ応答



第 4.25 図 A は第 4.23 図の系における W のステップ応答，B，C 及び D は補償系の極を $[-3, -3, -3, -3]$ に設定した場合の Y ， Y' 及び F のステップ応答

制御対象に対してモデル追従系を構成するとき疑似線形系化が可能であり，線形系に対するS-領域の設計を直接適用できることを示している。

§ 4・5 結 言

非線形要素を含む制御対象がその非線形特性とパラメータ変動や外乱として表わすことのできる静的非線形系の場合，モデル追従系を構成して疑似線形系化することが可能であり，この結果線形系に対する設計法を非線形制御対象に対しても適用できることを示した。

具体的な例題として飽和，クーロン摩擦，バックラッシュ特性を含むサーボ系を取り上げ，アナログ計算機による実験結果を示した。

7), 34), 35)

第5章 準最適制御系の構成

§ 5・1 序 論

最適制御理論は制御対象の厳密な数式モデルが与えられることを前提として構成されており，制御対象におけるパラメータ変動や外乱は考慮されていない。最適制御問題の中でも終端値が指定されているものは，終端の条件を満足させることが本来の目的であって，制御対象におけるパラメータ変動や外乱を無視することはできない。

この意味から，本章においては終端値指定の最適制御問題を取り上げる。

制御対象のパラメータ変動を考慮してこの種の問題の解法として，感度方程式を導入するものが知られている。⁶⁾

しかしながら，感度方程式は変動パラメータの数だけ必要となるので，感度方程式をも含めた合

成系は通常かなり高次となること，合成系の可制御性が保証されず，可制御性が失われる場合には適用できない，等の難点がある。

さらに制御対象に外乱が加わるとした場合，これを解決する方法は知られていない。

終端値指定の最適制御問題は多くの場合，評価関数を厳密に最小にすることは必ずしも必要とせず，また終端値が一点でなく，指定される点の周りにあるεがりが許される。

従って，モデル追従系を構成し，モデルに対して最適制御を行なうならば，制御対象に対して評価関数に関しては準最適となるが，追従精度の設定によって，本来の目的である終端条件を満足させることができる。

§ 5・2 終端値指定の準最適制御

5・2・1 問題の設定

(5-1) 式で与えられる問題を考える。

$$\text{制御対象} \quad \dot{X} = (P + \Delta P)X + (Q + \Delta Q)R + N$$

(5-1-1)

$$\text{初期値} \quad X(0) = X_0 + \Delta X_0$$

$$\text{終端条件} \quad |X_i(T)| \leq \varepsilon_i \quad i = 1, \dots, n$$

(5-1-2)

$$\text{評価関数} \quad J = \int_0^T (X' L X + R' M R) dt$$

(5-1-3)

(5-1-1) 式の制御対象においては，すべての状態変数が直接観測できるものとする。

この問題はパラメータ変動 ΔP ， ΔQ ，外乱 N ，初期値測定誤差 ΔX_0 が存在するので，直接最適解を求めることはできない。

5・2・2 準最適制御系の構成

(5-1) 式の問題に対し，(5-2) 式の問

題を考える。

$$\text{モデル} \quad \dot{Z} = PZ + QR_m \quad (5-2-1)$$

$$\text{初期値} \quad Z(0) = X_0$$

$$\text{終端条件} \quad Z(T) = 0$$

$$\text{評価関数} \quad J = \int_0^T (Z' L Z + R_m' M R_m) dt \quad (5-2-2)$$

(5-2) 式のモデルに対する最適問題は容易に解くことができ、最適解を $(R_m)_{opt}$ とする。

第5.1図で示されるモデル追従系を構成して

$$R_m = (R_m)_{opt} \quad \text{とすると}$$

$$|E_i(T)| \leq \varepsilon_i \quad (i=1, \dots, n) \quad (5-3)$$

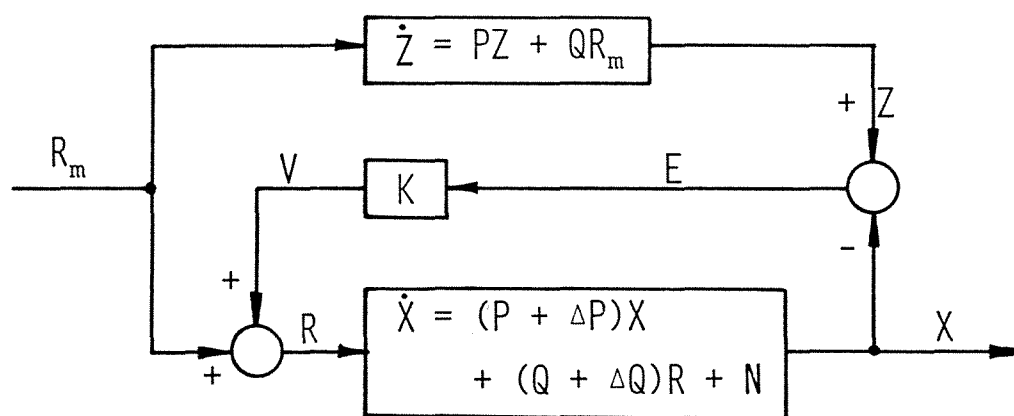
を満足させる K が存在する。このとき $X(T)$ は

(5-1-2) 式の終端条件を満足する。

通常 (5-3) 式を満足させる K は一意には定まらない。従ってこの場合においては

$$J_x = \int_0^T [\{ (R_m)_{opt} + V \}' M \{ (R_m)_{opt} + V \}] dt$$

$$(5-4)$$



第 5.1 図 モデル追従系

を評価関数, (5-3) 式を拘束条件としてこれを一意に定めるのが妥当であろう。

5・2・3 例題

簡単のために制御対象に対して外乱は加わらないとして (5-5) 式の問題を考える。

$$\text{制御対象} \quad \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -(1 + \Delta P_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 + \Delta Q \end{bmatrix} R$$

$$\text{初期値} \quad \begin{bmatrix} X_1(0) \\ X_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{終端条件} \quad |X_1(1)| \leq 0.1, \quad |X_2(1)| \leq 0.1$$

$$\text{評価関数} \quad J = \int_0^1 R^2 dt$$

(5-5)

この例題は感度方程式を含めた合成系が非可制御となり、感度方程式を導入する方法⁶⁾によって解くことができない。

(5-5) 式の問題に対し (5-6) 式の問題を考へる。

$$\text{モデル} \quad \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} R_m$$

$$\text{初期値} \quad \begin{bmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{終端条件} \quad \begin{bmatrix} z_1(1) \\ z_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{評価関数} \quad J = \int_0^1 R_m^2 dt$$

(5-6)

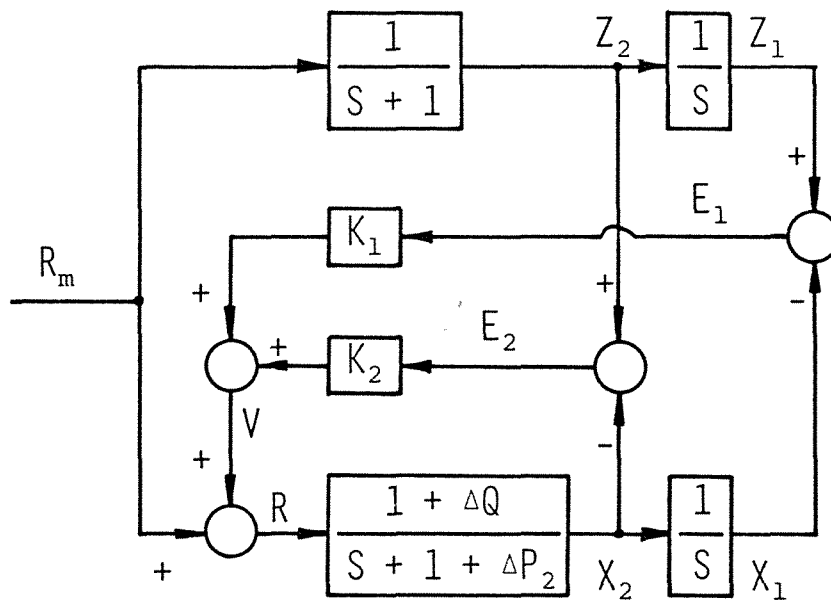
(5-6) 式の問題は容易に解くことができ、最適解 $(R_m)_{\text{opt}}$ は

$$(R_m)_{\text{opt}} = 7.1 e^t - 13.2 \quad (5-7)$$

と 1 で得られ

$$J = \int_0^1 (R_m)_{\text{opt}}^2 dt = 13.2 \quad (5-8)$$

と なる。



第5.2図 (5-5)式の制御対象に
対するモデル追従系

第5.2図のモデル追従系を構成し, $R_m = (R_m)_{opt}$ としとき

$$J_x = \int_0^1 R^2 dt = \int_0^1 [(R_m)_{opt} + V]^2 dt$$

(5-9)

を評価関数,

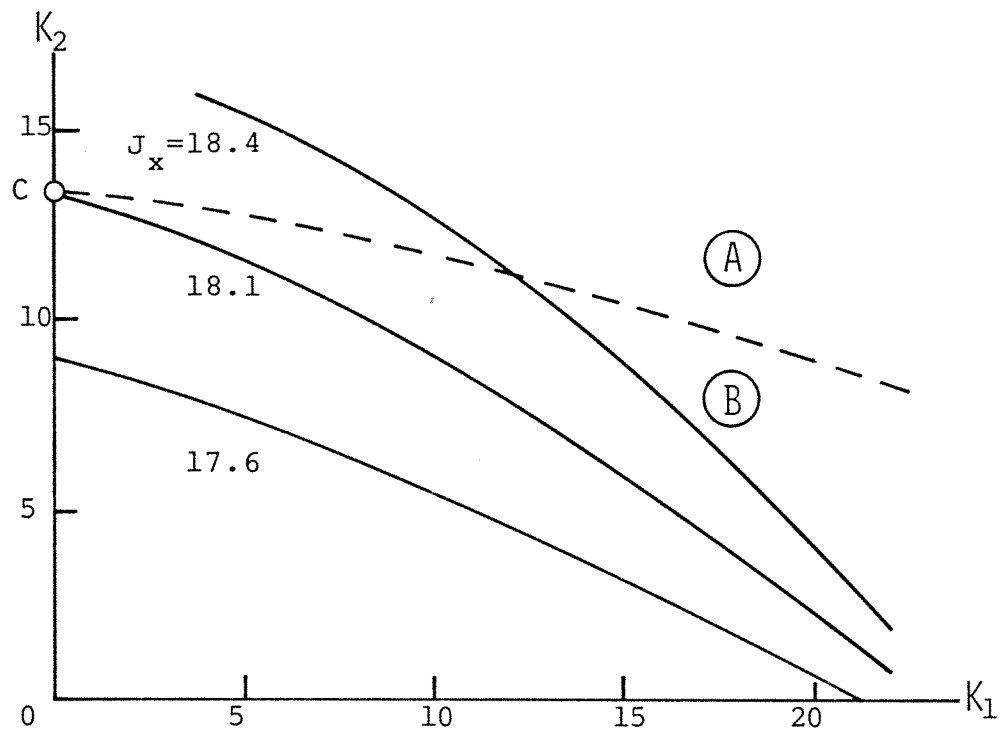
$$\begin{cases} |E_1(1)| \leq 0.1 \\ |E_2(1)| \leq 0.1 \end{cases} \quad (5-10)$$

を拘束条件として K_1, K_2 を求める。

第5.3図はパラメータ変動を $\Delta P_2 = -0.5$,

$\Delta Q_2 = -0.2$ として $(K_1 - K_2)$ 平面に J_x の等高線を描いたもので, 点線で区分された領域Aは点線を含めて (5-10) 式を満足し, 一方Bは満足しない領域である。第5.3図から (5-10) 式を満足し, (5-9) 式の評価関数を最小にする K_1, K_2 としてC点が定まり, $K_1 = 0, K_2 = 13.5$ を得る。

第5.4図において, Aはモデルの最適軌道, B

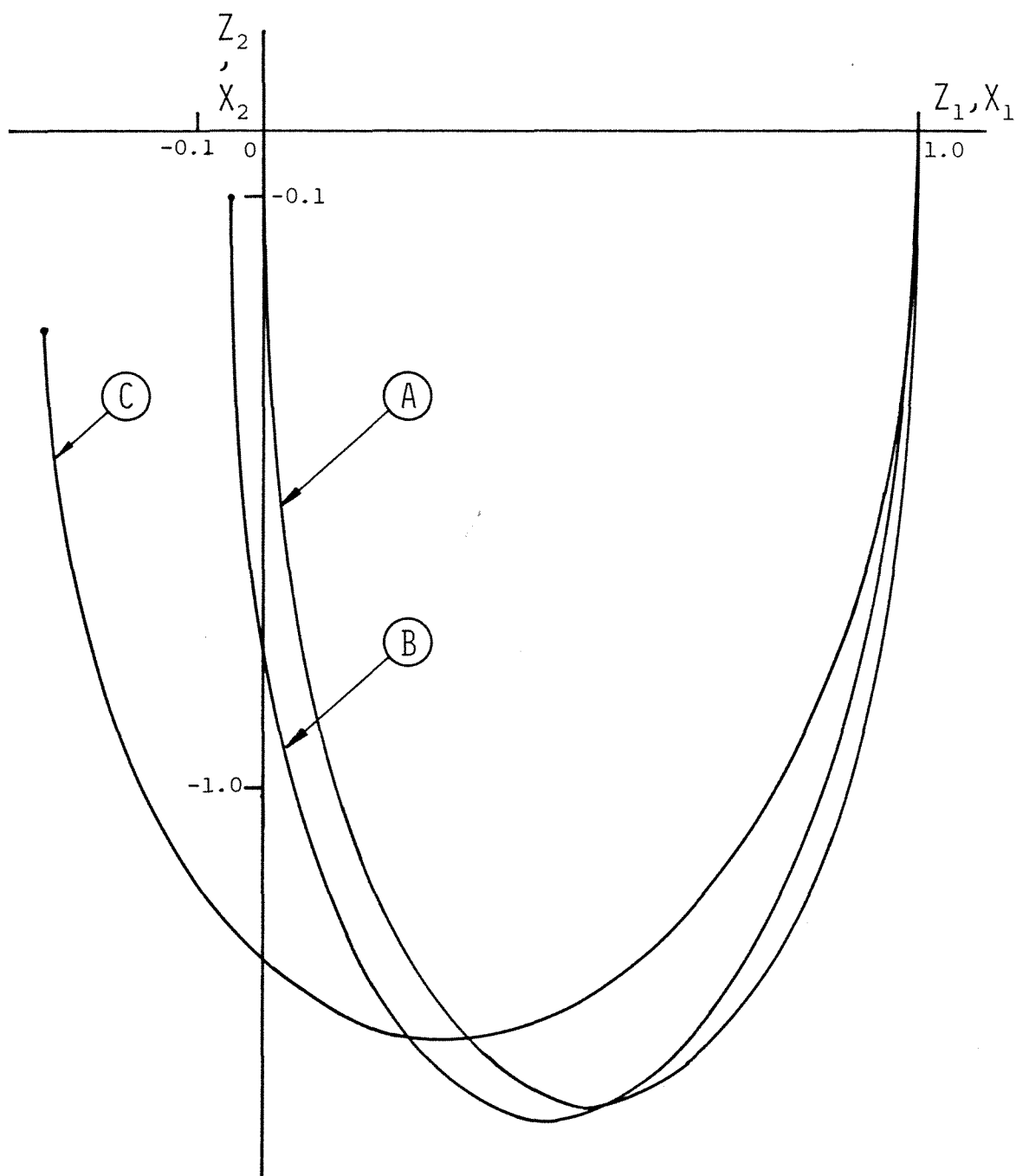


第 5.3 図 (5-9) 式で与えられる

J_x の等高線。点線で区分された領域 A

は点線を含めて (5-10) 式の終端条

件を満足し, B は満足しない領域。



第5.4図 Aはモデルの最適軌道, B
 は $R_m = (R_m)_{opt}$ に対する第5.2図のモ
 デル追従系における軌道, Cは $R_m = (R_m)_{opt}$
 に対する(5-5)式の制御対象の軌道

は第 5.2 図のモデル追従系における準最適軌道，
 C は (5-5) 式の制御対象において $R = (R_m)_{opt}$
 と 1 分時の軌道をそれぞれ示している。

§ 5.3 結 言

モデル追従系の応用の 1 つとして終端条件のある最適制御問題を取り上げた。最適制御問題において終端条件が与えられぬ場合，終端条件を満足させることが本来の目的であって制御対象のパラメータ変動及び外乱を無視して論ずることはできない。

本章で取り上げた例題においては最適操作量を時間関数として求めたが，最適操作量を状態変数の関数として，いわゆる最適制御則として求める問題においても，モデル追従系を構成するならばモデルの状態変数から最適制御則を得て，容易に解決することができる。

第6章 結 章

本論文では低パラメータ感度，低外乱感度を得ることを目的としたモデル追従系の構成及びその応用について述べた。

即ち，第2章においては制御対象と数学的構造の等しいモデルを用いた多入力多出力モデル追従系の構成を，第3章においては制御対象と次数の異なるモデルを用いた1入力1出力モデル追従系の構成を示した。

制御系の設計法に要求されることは，第1に動特性，定常特性を指定された特性に設定できることであり，第2に設計された系の動特性，定常特性が制御対象のパラメータ変動や外乱の影響を受けないことである。

第2章，第3章で示したモデル追従系はこれらの要求をほぼ満足させているということができよう。

第4章，第5章においてはモデル追従系の応用としてそれぞれ非線形系の擬似線形系化，終端値指定の準最適制御問題が取り上げられた。第4章，第5章で示された具体的な例題はいずれもその解決手段が知られていないもので，モデル追従系の有効性及び汎用性が示されている。

モデル追従系に関して今後検討を要する点は補償器次数の低減である。

補償器は定常追従特性を決定する部分と過渡追従特性を決定する部分とから構成されている。入力，外乱が $(p-1)$ 次多項関数で与えられるとき，定常追従特性を満足させるためには補償器を p 形とする必要があり，定常追従特性を決定する部分の次数を減ずることはできない。

過渡追従特性は， m 入力 m 出力モデル追従系においては $(n \times m)$ 個，1入力1出力モデル追従系においては $(n-1)$ 個の積分器を用いて補償系のすべての極を任意に設定することによって任

意に定めることができる。

しかしながら追従精度が(3-7)式, あるいは(3-14)式で定義されるとき, かならずしも「補償系のすべての極を任意に設定可能」の条件を必要とせず, 補償系の極の実数部を σ_i として正の実数 γ_0 に対し

$$\sigma_i \leq -\gamma_0.$$

を満足させることができれば十分である。

この観点に立って, 制御対象及び γ_0 が与えられた段階で必要な補償器の次数を求めることにより低次の補償器を得ることが予想される。

この問題は今後の課題としたい。

謝 辞

モデル追従系の構想は修士課程在学中に関心を
持った最適制御理論を、実際の制御対象に対し
かに適用するかという問題を考察中に生まれた
ものである。その間、北海道大学工学部 三浦良一
教授、田川遼三郎教授、小山昭一助教授には、制
御系に対する基本的な考え方を教授戴き、また田
川遼三郎教授には定理2.3の証明を直接御教示戴
きました。ここに衷心より厚く御礼申し上げます。

また本論文作製にあたり御鞭撻を賜わった北見
工業大学 松本秋男学長、激励を戴いた北見工業
大学 武田郁夫教授に深く感謝いたします。

参考文献

- (1) J. S. TYLER ; THE CHARACTERISTICS OF MODEL-FOLLOWING SYSTEM AS SYNTHESIZED BY OPTIMAL CONTROL, IEEE TRANSACTION ON AUTOMATIC CONTROL, AC-9, No.4, (1964)
- (2) C. A. WINSOR AND R. J. ROY ; THE APPLICATION OF SPECIFIC OPTIMAL CONTROL TO THE DESIGN OF DESENSITIZED MODEL FOLLOWING CONTROL SYSTEMS, IEEE TRANSACTION ON AUTOMATIC CONTROL, AC-15, No.3, (1970)
- (3) 須賀 一郎 ; モデルのステップ応答に最適に追従する線形制御系, 計測自動制御学会論文集, 第6巻, 第2号, (1970)
- (4) I. M. HOROWITZ ; FUNDAMENTAL THEORY OF AUTOMATIC LINEAR FEEDBACK CONTROL SYSTEM, IRE TRANSACTION ON AUTOMATIC CONTROL, AC-4, No.3, (1959)
- (5) G. LANG AND J. M. HAM ; CONDITIONAL FEEDBACK SYSTEMS - A NEW APPROACH TO FEEDBACK CONTROL, AIEE TRANSACTION, VOL.74, No.7, (1955)

- (6) 須田信英, 川辺寿彦; 感度を考慮した最適制御系, 制御工学, 第13巻, 第3号, (1969)
- (7) 神谷祐二; モデル追従について, 北見工業大学研究報告, 第5巻, 第1号, (1973)
- (8) 神谷祐二; モデル追従による低パラメータ感度系の構成, 電気学会論文誌, 第94巻, C分冊, 第3号, (1974)
- (9) 神谷祐二; モデル追従による多変数低パラメータ感度系の構成, 計測自動制御学会論文集, 第12巻, 第1号, (1976)
- (10) Y. KAMIYA ; CONSTRUCTION OF A LOW PARAMETER AND DISTURBANCE SENSITIVITY SYSTEM BY A MODEL-FOLLOWING METHOD, INTERNATIONAL JOURNAL OF CONTROL, Vol.23, No.4, (1976)
- (11) J. B. PEARSON AND C. Y. DING ; COMPENSATOR DESIGN FOR MULTIVARIABLE LINEAR SYSTEMS, IEEE TRANSACTION ON AUTOMATIC CONTROL, AC-9, No.2, (1969)

- (12) 田川遼三郎；私信，(1975)
- (13) W. M. WONHAM ; ON POLE ASSIGNMENT IN MULTI-INPUT CONTROLLABLE LINEAR SYSTEMS, IEEE TRANSACTION ON AUTOMATIC CONTROL, AC-12, NO.6, (1967)
- (14) 神谷祐二；モデル追従による状態の観測，第12回計測自動制御学会学術講演会予稿集(3302)，(1973)
- (15) 高木貞治；代数学講義
- (16) 神谷祐二；連続値形モデル追従系について(Ⅱ)，電気四学会北海道支部連合大会講演論文集(134)，(1973)
- (17) 神谷祐二；モデル追従による零点の設定について，第16回自動制御連合講演会前刷(1059)，(1973)
- (18) 田川遼三郎，樋口幸治，尾田政匡；可制御性可観測性とフィードバック制御，システムシンポジウム講演論文集，(1975)
- (19) 神谷祐二；モデル追従系について，

電気四学会北海道支部連合大会講演論文集(122), (1971)

- (20) 神谷祐二; モデルのステップ応答に追従する系の構成, 第6回計測・制御に関する北海道研究集会(5), (1973)

- (21) 神谷祐二; モデルの99項関数応答に追従する線形制御系の構成, 電気学会論文誌, 第96巻, C分冊, 第9号, (1976)

- (22) E. KREINDLER ; ON THE LINEAR OPTIMAL SERVO PROBLEM, INTERNATIONAL JOURNAL OF CONTROL, VOL.9, No.4, (1969)

- (23) S. P. BHATTACHARYYA AND J. B. PEARSON ; ON THE LINEAR SERVOMECHANISM PROBLEM, INTERNATIONAL JOURNAL OF CONTROL, VOL.12, No.5, (1970)

- (24) S. P. BHATTACHARYYA AND J. B. PEARSON ; ON ERROR SYSTEMS AND THE SERVOMECHANISM PROBLEM, INTERNATIONAL JOURNAL OF CONTROL, VOL.15, No.6, (1972)

- (25) 細江繁幸, 伊藤正美; 線形サーボ問題におけるエラ-システムについて, 電気学会論文誌, 第92巻, C分冊, 第10号, (1972)
- (26) 田川遼三郎; 状態と制御量の Feed-back にある線形連続値制御系の構成について, 第11回計測自動制御学会学術講演会予稿集(3116), (1972)
- (27) 細江繁幸; 線形99変数フィードバック制御系の設計, 電気学会論文誌, 第93巻, C分冊, 第7号, (1973)
- (28) 神谷祐二; モデル追従にある非線形系の擬似線形系化, 第15回計測自動制御学会学術講演会予稿集(3102), (1976)
- (29) 西川禎一, 三宮信夫, 板倉秀清; 非線形系の準最適フィードバック制御, 計測自動制御学会論文集, 第7巻, 第1号, (1971)

- (30) 桑原道義, 平井一正, 並木玄洞; クーロン摩擦のあるリレーサーボ機構における振動現象, 電気学会雑誌, 81巻, 878号, (1961)
- (31) 平井一正, 桑原道義; クーロン摩擦のあるサーボ機構における強制振動, 電気学会雑誌, 81巻, 878号, (1961)
- (32) 桑原道義, 平井一正, 井上幸美; バックラッシュと非線形摩擦のあるサーボ機構の自励振動, 電気学会雑誌, 82巻, 881号, (1962)
- (33) 伊藤正美, 乗松立木; 飽和, 止り摩擦特性をもつサーボ機構の線形フィードバック補償について, 電気学会雑誌, 81巻, 873号, (1961)
- (34) 神谷祐二; 連続値形モデル追従系について(I), 電気四学会北海道支部連合大会講演論文集(32), (1972)

- (35) 神谷祐二；パラメータ誤差に与る影響の
低減に対するモデル追従系の適用，
第14回自動制御連合講演会前刷(1026)，
(1971)