

球形モデル法による水分特性曲線の推定に関する研究

Estimation of Water Retention Curve by Using Spherical Particle Model Method

北見工業大学 ○正会員 中尾隆志(Takashi Nakao)
北海道大学大学院 フェロー 藤田睦博(Mutsuhiro Fujita)

1. はじめに

一般に不飽和浸透流理論はRichardsの式を用いて、解析的に解かれるが不飽和透水係数(k)は体積含水率(θ)またはサクション(ϕ)の関数として表される。しかし、 θ と ϕ の2つとも未知数であるためRichardsの式を解くには $\theta-\phi$ の関係、あるいは $\theta-k$ の関係式を事前に求めておかなければならない。現在、これらの関係式の多くは実験的に求められているのが現状である。著者らは粒子接合部においてリング水が独立して存在するとの仮定により、2球間のサクションと保水量算定式の誘導を行っている¹⁾。このモデルを一般の土壌に対し適用するには、任意の土粒子が他の粒子と何個接触しているか(配位数)を決定しなければならないが著者らはこの配位数を推定する方法も提案している²⁾。本報告では上で得られた知見をもとに $\theta-\phi$ 関係の推定を試みており、珪砂を用いた吸水実験値との比較検討を行っている。

2. 計算方法

2.1 2球間モデルによる独立したリング水のサクションと保水量の算定¹⁾

図1に示すように2つの異球径 R_1, R_2 からなる土粒子接合部においてリング水が存在する時、水と大気との圧力差($P_w - P_a$)は次式で計算することができる。

$$p_w - p_a = \sigma \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad \dots(1)$$

ここに、 σ は水と空気の表面張力であり、リング水の曲率半径は式(2)で、またリング水の保水量(V_w)は式(3)で表せる。

$$r_1 = R_1 \sin \omega_1 + r_2 (\sin \omega_2 - 1)$$

$$r_2 = \frac{(R_1 + \delta)(R_1 + 2R_2 + \delta) + R_1 \{R_1 - 2(R_1 + R_2 + \delta) \cos \omega_1\}}{2 \{ (R_2 - R_1) + (R_1 + R_2 + \delta) \cos \omega_1 \}} \quad \dots(2)$$

$$V_w = \pi r_2 \left[(A^2 + r_2^2) (\cos \omega_1 + \cos \omega_2) - A r_2 \{ \sin \phi \cos (\omega_1 - \omega_2) + \pi - \phi \} - \frac{\pi}{3} \{ r_2^3 (\cos^3 \omega_1 + \cos^3 \omega_2) + R_1^3 (1 - \cos \omega_1)^2 (2 + \cos \omega_1) + R_2^3 (1 - \cos \omega_2)^2 (2 + \cos \omega_2) \} \right] \quad \dots(3)$$

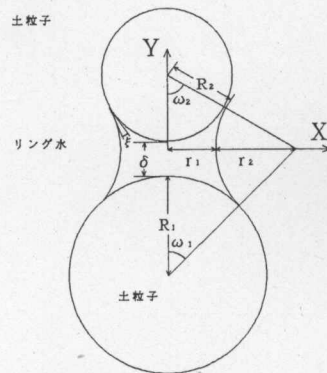


図1 座標系

ここに、

$$A = r_1 + r_2, \phi = \omega_1 + \omega_2, \omega_2 = \sin^{-1} \left(\frac{r_1 + r_2}{R_2 + r_2} \right)$$

したがって、任意の球に他の球が何個接触しているかわかれば独立したリング水のサクションと保水量の関係を推定することが可能となる。

2.2 配位数の推定²⁾

半径 R_0 の土粒子における他の粒子との接合数($N(R_0)$ 以下、配位数と称する)の推定には樋口が紹介している次式を用いた³⁾。

$$N(R_0) = \frac{\{ h^3 \bar{R}^5 + 3h^2 \bar{R}^4 R_0 + 3h \bar{R}^3 R_0^2 \}}{R^2 \bar{R}^3} \quad \dots(4)$$

式(4)の h はパラメータであり、この決定は著者らが提案しているように等球径規則充填体にも本方法が適用できるものとし⁴⁾、間隙率(ε)から仮の配位数を式(5)を用いて求め、その後式(6)に代入することにより求められる。

$$N = 2.872 \varepsilon^{-1.055} \quad \dots(5)$$

$$h = 0.418 + 0.080 N \quad \dots(6)$$

3. 本モデルと実験値の比較

上記で述べた方法により、 $\theta-\phi$ 関係の算定を試みた。

3.1 篩い分け試料を用いた実験値との比較

対象とした試料は山形産7号珪砂であり、これを篩い分けしている。図2に示すように粒径分布は149 μ mが92.7%であり、他に250 μ m粒径が7.3%と2つの粒径より構成されている。間隙率は突き固め試験結果より、

$\varepsilon=0.4424$ を用いた。

表 1 は式(4), (5), (6)により求められた配位数の推定値を示している。粒子径が大きな $250\mu\text{m}$ の粒子に接触する粒子の数は粒径 $149\mu\text{m}$ の粒子が 12.7 個, $250\mu\text{m}$ の粒子は 0.8 個であり平均配位数は 13.5 個となり, 粒径 $149\mu\text{m}$ を中心とする平均配位数のほぼ倍の個数となっている。表中の第 3, 4 列は計算された平均配位数に対し, 各粒径が何個接触しているかを示している。この個数は平均配位数に粒径分布の頻度割合を掛けて求めたものである。

図 3 は $250\mu\text{m}$ の粒径に接触する粒径毎のサクションと保水量の関係(図中の破線)および全保水量(実線)を示している。計算方法の概略は以下によった。

式(1), (3)はいずれも ω_1 の関数となっておりこのままでは $\phi - V_w$ の関係は直接求められない。そこで, はじめに ω_1 を 0.01° づつ変化させ, 中心となる球とそれに接するある粒径を持つ球において ϕ が 0 になるまで式(1), (3)を用い, ϕ, V_w を計算する。この際, 水と空気の表面張力 σ は温度により変化するが 20°C として計算を行った。次に, 中心となる球と残りの他方の球に関しては, 上記で得られた ϕ になるよう式(1)を繰り返し計算し, ω_1 を決定した後, 式(3)に代入して V_w を求めた。このとき, V_w は表 1 を参照し, 配位数の個数倍している。最後に $149, 250\mu\text{m}$ の保水量を加えあわせた結果が全保水量(実線)となる。

著者ら⁴⁾は本計算条件と全く同一の粒径分布と間隙率を持つ砂試料において, 室内で土柱法による吸水実験を行っている。本研究では粒子表面のリング水のみを取り扱っているので実験終了後, 別に吸水率試験を行い体積含水率の補正を行っている。実験結果の $\theta - \phi$ 関係を図 4 に●印で示す。含水量の増加にともない粒子間の保水形態は粒子接合部でリング水が独立して存在する状態からリング水が互いに連結しあう“懸垂水”へと遷移する。このためリング水が独立して存在するための条件を新たに考えなければならない。この関係は以下の方法により行った。

まず, 構成する粒子の中で最も粒径の大きな 2 個の粒子 (R_{\max}) に構成される粒子の中で最も小さな粒子 (R_{\min}) が接触したときに形成されるリング水の最大曲率半径 r_2 を求める。3 球間の幾何学的関係から r_2 は

$$r_2 = \frac{R_{\max} R_{\min} + 2R_{\min}^2 - 2R_{\min}^2 \sqrt{2R_{\max} + R_{\min}}}{R_{\max} - 4R_{\min}} \quad \dots (7)$$

となる。この時の等球径 R_{\max} で形成されるリング水の $\omega_{1,\max}$ は同様に幾何学的条件より

$$\omega_{1,\max} = \text{ArcCos} \left(\frac{R_{\max}}{R_{\max} + r_2} \right) \quad \dots (8)$$

となる。リング水が独立して存在する条件として上記のように考えたのは以下の理由による。完全接触時にリング水が負圧を形成する ω_1 の範囲が一番大きいのは等球径の $0 < \omega_1 \leq 53.13^\circ$ の場合であり¹⁾, 構成される粒子

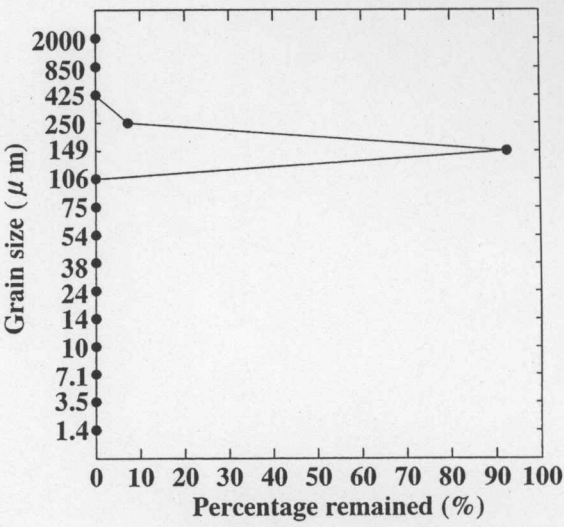


図 2 粒径分布 (篩い分け試料)

表 1 計算された配位数 (篩い分け試料)

粒子の直径 D (μm)	平均配位数	D=149 μm の 個数	D=250 μm の 個数
149	6.6	6.2	0.4
250	13.5	12.7	0.8

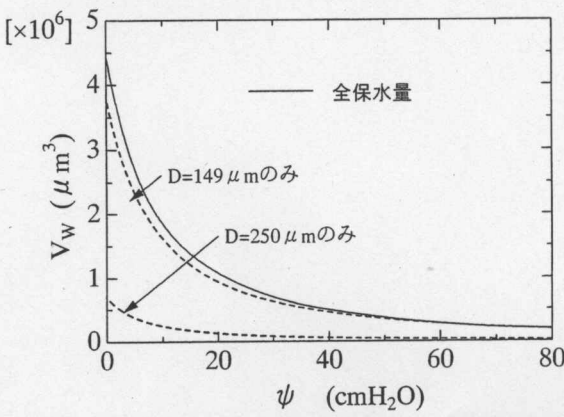


図 3 直径 $250\mu\text{m}$ の粒子に接触する球の保水量

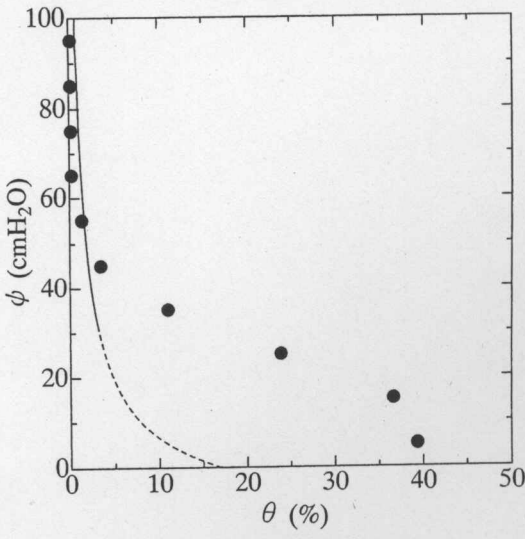


図 4 $\theta - \psi$ の計算値と実験値の比較

の中で最大の等球径に構成する粒子の中で最も小さな粒子が接触して形成されるリング水を求めていることになり、リング水が独立して存在する条件としては最も厳しい条件となっている。

本例では粒径分布より $R_{max}=250/2\mu m$, $R_{min}=149/2$ となり、そのときの $\omega_{1,max}=27.50^\circ$ (サクシオン値 31.56cm 水頭換算) となる。図 4 中の実線は上記の方法によりリング水が独立して存在する領域を破線はリング水が独立して存在しない領域を示している。

3.2 篩い分けしない試料の実験値との比較

前節と同様の方法で篩い分けしない試料の吸水実験値との比較も行った。粒径範囲は 3.5~250 の範囲であり、その粒径分布を図 5 に示す。この場合の間隙率は突き固め試験結果より、 $\varepsilon=0.4653$ となる。表 2 に式(4),(5),(6)により計算された、各粒子の配位数を示す。表中配位数が 0.0 個となっているのは小数点第 1 位でまとめたためであり、僅かに小さな値を持っている。しかし、前節と同様にサクシオンと保水量の関係を求めたところ、全保水量には殆ど影響を与えないので以降の計算を容易にするため、配位数が 0.5 個以下の粒子は 0 個として取り扱った。篩い分けしない試料のリング水が独立して存在する条件を求めると表 2 および式(7),(8)から、 $R_{max}=250/2\mu m$, $R_{min}=54/2\mu m$, $\omega_{1,max}=21.76^\circ$ (サク

シオン値 59.06cm 水頭換算) となる。図 6 に吸水実験で得られた $\theta-\phi$ 結果を●印で、計算値としてリング水が独立して存在すると考えられる領域を実線で、リング水が互いに連結しあっている領域を破線で示す。

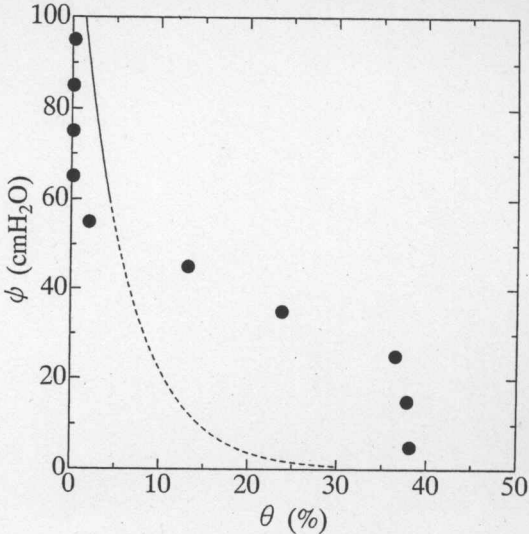


図 6 $\theta-\phi$ の計算値と実験値の比較

表 2 計算された配位数 (山形産 7 号硅砂)

粒子の直径 $D(\mu m)$	平均 配位数	各粒径に対する個数								
		3.5	10	14	38	54	75	106	149	250
3.5	3.7	0.0	0.0	0.1	0.0	0.1	0.4	0.9	2.0	0.2
10	4.0	0.0	0.0	0.1	0.0	0.1	0.4	1.0	2.2	0.2
14	4.3	0.0	0.0	0.1	0.1	0.1	0.5	1.0	2.3	0.2
38	5.7	0.0	0.0	0.1	0.1	0.1	0.6	1.4	3.1	0.3
54	6.9	0.0	0.1	0.1	0.1	0.2	0.7	1.6	3.8	0.3
75	8.5	0.0	0.1	0.1	0.1	0.2	0.9	2.0	4.7	0.4
106	11.4	0.1	0.1	0.2	0.1	0.2	1.2	2.7	6.3	0.5
149	16.1	0.1	0.2	0.2	0.1	0.4	1.8	3.8	8.8	0.7
250	30.5	0.2	0.3	0.3	0.3	0.7	3.3	7.2	16.8	1.4

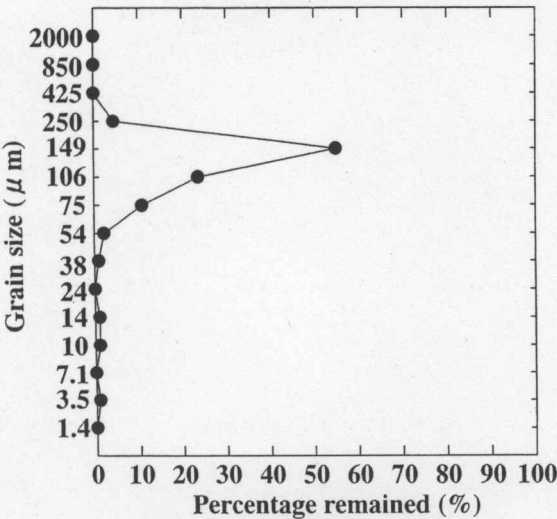


図 5 粒径分布 (山形産 7 号硅砂)

3.3 全保水域による $\theta-\phi$ の関係の推定

前節まで 2 球間モデルを用いてリング水が独立して存在する領域について $\theta-\phi$ 関係の推定を試みた。本節では上記の結果をもとに全領域まで $\theta-\phi$ 関係を推定する方法を試みる。 $\theta-\phi$ 関係を示す実験式や経験式は種々提案されている⁵⁾。ここでは砂質土に適応可能な Brooks & Corey 式を用いる。

$$S_E = \left(\frac{\phi_\sigma}{\phi} \right)^\lambda \quad \dots (9)$$

ここに、 $S_E = (\theta - \theta_r) / (\theta_s - \theta_r)$, θ_r : 残留土壌水分, θ_s : 飽和水分量, ϕ_σ : 限界毛管水頭であり、土柱内での圧力水頭が平衡状態に達した時の自由水面から飽和領域までの限界高さである。

間隙率 ε は既知としているので、 $\theta_s = \varepsilon$ となるが本研究のように水を湿潤させて飽和させる場合、エントラップト・エアが間隙中に残り間隙率の 80~90% になる⁶⁾。このため、 $\theta_s = 0.85\varepsilon$ とした。 θ_r は本研究では土粒子表面のリング水のみを取り扱っているので気乾状態となり、 $\theta_r = 0$ である。 ϕ_σ および λ の推定は以下の方法により、

行った。計算により求められる土壌水分特性曲線はリング水が独立したと思われる範囲までしかないので両対数紙上に S_E と ϕ をプロットし、計算結果の直線を $S_E=1$ の点まで外挿し ϕ_σ をまた、この直線の傾きより λ の推定を行った。表3に土柱法による実験結果から得られた各パラメータ値と本手法により推定されたパラメータ値を示し、図6、7に計算で得られた $\theta-\phi$ 関係(実線)と実験値により決定された $\theta-\phi$ 曲線(破線)を実験値(●)とともに示す。両試料の計算値とも実験値とほぼ同様の傾向を示しているが体積含水率の増大に伴い実験値との差異が顕著になってくる。特に、篩い分けした試料でこの傾向が強い。この原因として各パラメータを推定する際、間隙率とリング水が独立して存在する領域のみで各パラメータを決定していることにも起因しているが、篩い分け試料では粒子が149、250 μm の2種類のみから構成されているとしているため $\omega_{1,\text{max}}$ が過大に評価されたことが大きな原因の1つと考えられる。

4. 結論

本研究では構成する土粒子が球形と仮定しかつ、粒径分布と間隙率が既知であるとの条件より、リング水が粒子接合部において単独で保水するとしてサクションとその保水量の算定手法を示した。計算値および実験結果の比較検討より、両者はほぼ同様の傾向を示すが体積含水率の増加とともにその差が大きくなる。特に、構成する粒子を2種類のみとした計算結果と実験結果では顕著であった。この原因の1つとして $\theta-\phi$ 関係を算定するとき、リング水が独立して存在する領域が過大に評価されたと思われる。

参考文献

- 1) Nakao T. et al.: *Retained Water in Soil Based on Probabilistic Pore Structure, Environment International*, Vol.21, No. 5, pp.711-716, 1995.
- 2) 中尾隆志, 藤田睦博: 異球径ランダム充填の配位数と間隙率の関係について, 土木学会北海道支部論文報告集, 第54号(B), pp.54-57, 1998.
- 3) 樋口伊佐夫: 粒子充填に関する統計的研究, 東京工業大学博士論文, 1971.
- 4) 中尾隆志, 藤田睦博: 土壌水分特性曲線に及ぼす土壌構造の影響, 土木学会北海道支部論文報告集, 第50号, pp.54-57, 1995.
- 5) 日野幹雄他: 洪水の数値予報, 森北出版, pp.73-74, 1989.
- 6) 西垣 誠: 不飽和領域内の土中水の浸透特性に関する2, 3の考察, 土質工学会論文報告集, Vol.23, No.3, pp.165-177, 1983

表 3 パラメータ値

		実験値	計算値
篩い 分け 試料	θ_r (%)	0.00	0.00
	θ_s (%)	38.90	37.60
	ϕ_σ (cm)	14.30	4.88
	λ	1.80	1.31
山形産 7号 硅砂	θ_r (%)	0.00	0.00
	θ_s (%)	37.90	39.55
	ϕ_σ (cm)	20.70	35.68
	λ	2.30	4.72

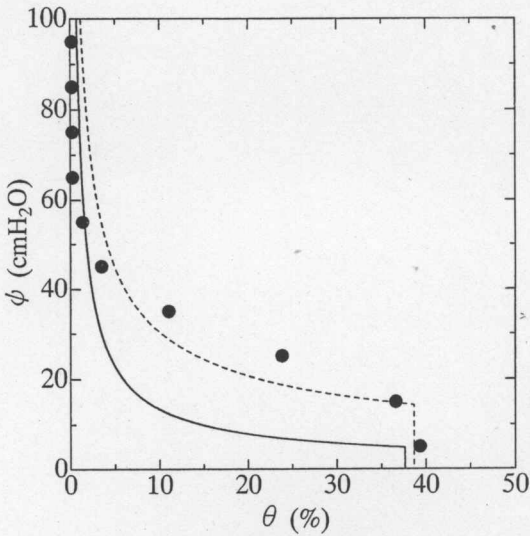


図 6 $\theta-\phi$ の関係(篩い分け試料)

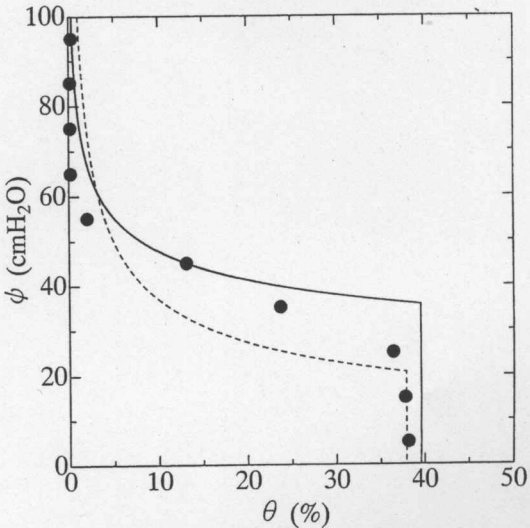


図 7 $\theta-\phi$ の関係(山形産7号硅砂)