Weak Freese-Nation propertyについて

渕野　昌[1]

On the weak Freese-Nation property

Sakaé FUCHINO[1]

Abstract

We give a self-contained short survey on the study of the weak Freese-Nation property of partial orderings and discuss about some open problems in connection with this property.

1. 緒　言

本稿では，[1]，[5]，[6]，[3]，におけるweak Freese-Nation propertyに関する研究結果の概説を与え，この概念に関連した未解決問題について議論する．本稿は1998年10月に大阪府立大学総合科学部数理・情報科学科の博士課程の学生を対象に行なった集中講義の講義録に手を加えたものである．weak Freese-Nation propertyの概念の歴史に関しては[5]または[6]を参照されたい．

2. Weak Freese-Nation property

半順序集合$(P, \leq)$がweak Freese-Nation propertyを持つとは，$f: P \to [P]^{\leq\aleph_0}$で次の性質を満たすものが存在することとする：

$p, q \in P$で$p \leq q$なら，$r \in f(p) \cap f(q)$で$p \leq r \leq q$となるものが常に存在する．

上の性質を持つfをweak Freese-Nation mappingと呼ぶことにする．すぐに分かることの一つは：

命題 1　$|P| \leq \aleph_1$ならPはweak Freese-Nation propertyを持つ．

証明　$P = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$とする．$f: P \to [P]^{\leq\aleph_0}$を，

$f(x_\alpha) = \{x_\beta : \beta \leq \alpha\}$

で定義する．$p, q \in P$で$p \leq q$のとき，たとえば，$p = x_\alpha$，$q = x_\beta$で$\alpha \leq \beta$となっているとすると，$x_\alpha \in f(p) \cap f(q)$で，$p = x_\alpha \leq q$となるから，$f$がweak Freese-Nation mappingであることが分かる．　□（命題 1）

weak Freese-Nation propertyを持たないような半順序集合の例としては，$(\omega_2, \leq)$がある．

もっと一般的には：

命題 2　半順序集合Pが真の単調列$(p_\alpha)_{\alpha<\omega_2}$を持つなら，$P$はweak Freese-Nation propertを持

---

[1] 北見工業大学工学部情報システム工学科

たない．

証明　p_α，$\alpha<\omega_2$ が P での真の上昇列であると仮定してみる．$P'=\{p_\alpha : \alpha<\omega_2\}$ とする．各 $p\in P$ に対し，$\alpha_p=\min\{\alpha<\omega_2 : p\leq p_\alpha\}$ として，$g : P\to P'$ を $g(p)=p_{\alpha_p}$ で定義する．P 上の weak Freese-Nation mapping f が存在するとき，$\bar{f}(p_\alpha)=\{g(q) : q\in f(p_\alpha)\}$ で定義される写像 $\bar{f} : P'\to[P']^{\leq\aleph_0}$ は P' の weak Freese-Nation mapping となる．

以上から，補題の証明には $(\omega_2,\leq)$ が weak Freese-Nation property を持たないことを示せばよいことが分かる．

$f : \omega_2\to[\omega_2]^{\leq\aleph_0}$ が weak Freese-Nation mapping だったとして矛盾を導く．$(\beta_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ を帰納的に，$\beta_\alpha=\sup\bigcup\{f(\beta_\gamma) : \gamma<\alpha\}+1$ で定義して，$\beta^*=\sup_{\alpha<\omega_1}\beta_\alpha$ とおく．すべての $\alpha<\omega_1$ に対し，$\sup f(\beta_\alpha)<\beta^*$ となるが，$(\beta^*)\cap\beta^*$ は可算だから，$\sup f(\beta_\alpha)\cap\beta^*<\beta^*$ となる，今 $\alpha^*<\omega_1$ を $f(\beta^*)\cap\beta^*<\beta_{\alpha^*}$ となるようにとると，$f(\beta_{\alpha^*})\cap f(\beta^*)$ の元で β_{α^*} と β^* の間にあるものは存在しない，しかしこれは f が weak Freese-Nation mapping であるという仮定に矛盾する．

□(命題 2)

系 3　$\mathcal{P}(\omega)/fin$ が weak Freese-Nation property を持つなら，$\mathfrak{b}=\aleph_1$ となる．

証明　もし $\mathfrak{b}\geq\aleph_2$ なら $\mathcal{P}(\omega)/fin$ は長さが $\geq\omega_2$ の真の上昇列を持つから，命題 2 により，$\mathcal{P}(\omega)/fin$ は weak Freese-Nation property を持たない．

□(系 3)

3．$\mathcal{P}(\omega)/fin$, $(\mathcal{P}(\omega_1),\subseteq)$ etc. と weak Freese-Nation property

上の系で $\mathcal{P}(\omega)/fin$ の weak Freese-Nation property が $\mathcal{P}(\omega)/fin$ の代数的及至組合せ論的性質に影響を及ぼすことがわかった．この章では $\mathcal{P}(\omega)/fin$ や他のいくつかの具体的な半順序集合と weak Freese-Nation property との関係について考察する．

補題 4

(1) $(\mathcal{P}(\omega)/fin,\subseteq^*)$ が weak Freese-Nation property を持つのは，$(\mathcal{P}(\omega)/fin,\subseteq)$ が weak Freese-Nation property を持つ，ちょうどそのときである．

(2) $(\mathcal{P}(\omega)/fin,\subseteq^*)$ が weak Freese-Nation property を持つのは，$({}^\omega\omega,\leq)$ が weak Freese-Nation property を持つ，ちょうどそのときである．ただし $u, v\in{}^\omega\omega$ に対し，$u\leq v$ は $\forall n\in\omega\ (u(n)\leq v(n))$ のこととする．

証明　(1)：$(\mathcal{P}(\omega)/fin,\subseteq^*)$ の weak Freese-Nation mapping から $(\mathcal{P}(\omega),\subseteq^*)$ の weak Freese-Nation mapping が容易に得られ，逆も同様である：

$f : \mathcal{P}(\omega)/fin\to[\mathcal{P}(\omega)/fin]^{\leq\aleph_0}$ が $(\mathcal{P}(\omega)/fin,\subseteq^*)$ の weak Freese-Nation mapping であるとき，$f^* : \mathcal{P}(\omega)\to[\mathcal{P}(\omega)]^{\leq\aleph_0}$ を，

$$f^*(x)=\{y\in\mathcal{P}(\omega) : y/fin\in f(x/fin)\}$$

で定義すると，f^* は $(\mathcal{P}(\omega),\subseteq)$ の weak Freese-Nation mapping となる．(ただし y/fin で y の fin に関する同値類をあらわす．)

逆に，$g : \mathcal{P}(\omega)\to[\mathcal{P}(\omega)]^{\leq\aleph_0}$ が $(\mathcal{P}(\omega),\subseteq)$ の weak Freese-Nation mapping であるとき，$\bar{g} : \mathcal{P}(\omega)/fin\to[\mathcal{P}(\omega)/fin]^{\leq\aleph_0}$ を，

$$\bar{g}(x/fin)=\{y/fin : \exists z\,(z=^*x\wedge y\in g(z))\}$$

で定義すれば，$\bar{g}$ は $(\mathcal{P}(\omega)/fin,\subseteq^*)$ の weak Freese-Nation mapping となる．

(2)：(1)により，$(\mathcal{P}(\omega),\subseteq^*)$ が weak Freese-Nation property を持つことと，$({}^\omega\omega,\leq)$ が weak

Freese-Nation property を持つことの同値性を示せばよい，まず$({}^{\omega}\omega,\leq)$が weak Freese-Nation mapping fを持つと仮定してみる．$x\in\mathcal{P}(\omega)$に対し，χ_xで x の特性関数を表すことにして，$g:\mathcal{P}(\omega)\to[\mathcal{P}(\omega)]^{\leq\aleph_0}$を，$g(x)=\{v^{-1}[\{1\}]:v\in f(\chi_x)\}$で定義すれば，$g$ は$\mathcal{P}(\omega)$上の weak Freese-Nation mapping となる．

逆に，$(\mathcal{P}(\omega),\subseteq)$が weak Freese-Nation property を持つと仮定してみる．

gを$(\mathcal{P}(\omega\times\omega),\subseteq)$上の weak Freese-Nation mapping とする．$u\in{}^{\omega}\omega$に対し，$x_u\in\mathcal{P}(\omega\times\omega)$を $x_u=\{(n,m):m\leq u(n)\}$とする．$B=\{x\in\mathcal{P}(\omega\times\omega):\forall n\in\omega\exists m\in\omega(x\cap\{n\}\times\omega\subseteq\{n\}\times m)\}$として，$x\in B$ に対し，$\Phi(x)\in{}^{\omega}\omega$を$\Phi(x)(n)=\max\{m\in\omega:(n,m)\in x\}$により定義する．このとき，$f:{}^{\omega}\omega\to[{}^{\omega}\omega]^{\leq\aleph_0}$を $f(u)=\{\Phi(x):x\in g(x_u)\cap B\}$で定義すれば，$f$ が${}^{\omega}\omega$上の weak Freese-Nation mapping となっていることが容易に示せる． □（補題4）

命題1により，CHのもとでは，$(\mathcal{P}(\omega)/fin,\subseteq^*)$は weak Freese-Nation mapping を持つ．一方系3により $\mathbf{b}\geq\aleph_2$なら，$(\mathcal{P}(\omega)/fin,\subseteq^*)$は weak Freese-Nation property を持たない．実は，“$(\mathcal{P}(\omega)/fin,\subseteq^*)$を持つ”という命題は ZFC＋¬CHからも独立であることが知られている：$V=L$のモデルに Cohen reals を正規基数個付け加えて得られるモデルで（$\mathcal{P}(\omega)/fin,\subseteq^*$)は weak Freese-Nation property を持つ（[6]）．

系3は次の命題の(1)，(2)に拡張することができる．

命題5　$(\mathcal{P}(\omega)/fin,\subseteq^*)$が weak Freese-Nation property を持つとするとき：

(1) $\mathbf{b}^*=\aleph_1$となる．

(2) $non(meager)=\aleph_1$となる．したがって，$\mathbf{s}=\mathbf{e}=\aleph_1$である．(3) $\mathbf{a}=\aleph_1$となる．

証明　(1)：$X\subseteq{}^{\omega}\omega$を$\leq^*$に関して unbounded な任意の集合とする．Xの濃度$\aleph_1$の unbounded な部分集合が存在することを示せばよい．

χを十分に大きな正則基数として，$M\prec\mathcal{H}(\chi)$を，$X\in M$, $|M|=\aleph_1$で，$[M]^{\aleph_0}\cap M$ が $[M]^{\aleph_0}$で$\subseteq$に関し cofinal なものとする（たとえば internally approachable な Mをとればよい）．

仮定と補題4により${}^{\omega}\omega$ の weak Freese-Nation mapping fが M の元としてとれる．このとき $X\cap M$ が unbounded であることを示す：そうでなかったとすると，$d\in{}^{\omega}\omega$で $X\cap M\leq^*d$ となるものがある．$f(d)\cap M$ は可算だから，$F\in M\cap[{}^{\omega}\omega]^{\leq\aleph_0}$で$f(d)\cap M\subseteq F$ となるものがある．今，$d'\in M$ を $F\leq^*d'$となるようにとると，f が weak Freese-Nation mapping であることから，$X\cap M\leq^*d'$となり，これから$M\models$“$X\leq^*d'$”がわかる．したがって，$M\prec\mathcal{H}(\chi)$により，$X\leq^*d'$ が帰結できる．しかしこれはX が$\leq^*$に関して unbounded であることに矛盾である．

(2)：ふたたびχを十分に大きくとり，$M\prec\mathcal{H}(\chi)$を$|M|=\aleph_1$で，$[M]^{\aleph_0}\cap M$が$[M]^{\aleph_0}$で$\subseteq$に関し cofinal なものとする．fを$\mathcal{P}(\omega)$の weak Freese-Nation mapping とする．$M\cap\mathbb{R}$が meager でないことを示す．

$Q=\{(q,r)\in\mathbb{Q}:q<r\}$として，$f\in M$を$(\mathcal{P}(Q),\subseteq)$の weak Freese-Nation mapping とする．各$x\in\mathcal{P}(Q)$に対し，$o(x)$でxの各元(q,r)に対応する開区間の和集合をあらわすことにする．

$D\in[\mathcal{P}(Q)]^{\aleph_0}$を，各 $d\in D$ に対し $o(d)$が$\mathbb{R}$で dense になるようなものとする．$\bigcap\{o(d):d\in D\}\cap M\neq\emptyset$が示せれば，このことから$\mathbb{R}\cap M$ が non-meager であることが示せるが，$|\mathbb{R}\cap M|=\aleph_1$だから，これにより証明が完了する．

各$d\in D$に対し，$C(d)=f(d)\cap M\cap\{x\in\mathcal{P}(Q):d\subseteq x\}$とおく，このとき，$o(d)=\bigcap\{o(x):x\in C(d)\}$となる．さらに$\tilde{C}(d)\in[M]^{\aleph_0}\cap M$を$C(d)\subseteq\tilde{C}(d)$で，$x\in\tilde{C}(d)$なら $o(x)$が dense となるようなものとする．$\tilde{o}(d)=\bigcap\{o(x):x\in\tilde{C}(d)\}\subseteq M$；$\tilde{o}(d)$は comeager で$\tilde{o}(d)\subseteq o(d)$となる．$\mathcal{F}\in[M]^{\aleph_0}\cap M$を$\{\tilde{o}(d):d\in D\}\subseteq\mathcal{F}$で，すべての$X\in\mathcal{F}$は$\mathbb{R}$の co-meager set となるよ

うなものとする．このとき，$\bigcap\mathcal{F}\in M$はco-meagerだから，$r\in M\cap\bigcap\mathcal{F}$となるものが存在する．ところが，$r\in\bigcap\mathcal{F}\subseteq\bigcap\{o(d):d\in D\}$だから，これによって，$\{o(d):d\in D\}\cap M\neq\emptyset$が示せた．

(3)：χ, $M\prec\mathcal{H}(\chi)$, $f\in M$を(2)でのようにとり，$F:\mathcal{P}(\omega)\rightarrow[\mathcal{P}(\omega)]^{\leq\aleph_0}$を，$F(x)=\bigcup\{f(y):y=^*x$または$y=^*\omega\setminus x\}$で定義する．$F\in M$である．$S_\alpha$, $\alpha<\omega_1$を$[[\omega]^{\aleph_0}]^{\aleph_0}\cap M$の枚挙として，pairwise almost disjoint な$[\omega]^{\aleph_0}\cap M$の元の例$a_\alpha$, $\alpha<\omega_1$をすべての$\alpha<\omega_1$に対し次を満たすようにとる：

(∗) どの$x=S_\alpha$についても，すべての$u\in[\alpha]^{\leq\aleph_0}$に対し$|x\setminus\bigcup_{\beta\in u}a_\beta|=\aleph_0$となるなら，$|x\cap a_\alpha|=\aleph_0$となる．

$\{a_\alpha:\alpha<\omega_1\}$が maximal almost disjoint であることを示す．そうでなかったとして，$b\in[\omega]^{\aleph_0}$でどのa_α, $\alpha<\omega_1$とも almost disjointとなるものをとる．$\alpha^*<\omega_1$を$F(b)\cap M\subseteq S_{\alpha^*}$となるものとする．このとき，$b$と$a_{\alpha^*}$はalmost disjointだから，$x\in F(b)\cap F\subseteq(a_{\alpha^*})$で$(i)\ b\subseteq^*x$；$(ii)\ |x\cap a_{\alpha^*}|<\aleph_0$となるものがある．$x\in F(b)\cap M\subseteq S_{\alpha^*}$だから，$(i)$により，$x$は$\alpha^*$に対する(∗)でのようなものとなっている．ところが，(ii)により，これはa_{α^*}のとり方に矛盾である．　□(命題５)

次に，$\mathcal{P}(\omega)$がweak Freese-Nation propertyを持てば，$cov(meager)$は大きな値をとることを示す．

$$cov(meager)=\min\{|F|:F\subseteq{}^\omega\omega,\ \forall h\in{}^\omega\omega\,\exists f\in F\ |\{n\in\omega:h(n)=f(n)\}|<\aleph_0\}$$

だったことを思い出す．この特徴付けと以下の補題と定理16を組み合せると，たとえば$2^{\aleph_0}\leq\aleph_{\omega+1}$のときには，$\mathcal{P}(\omega)$がweak Freese-Nation propertyを持てば，$cov(meager)=2^{\aleph_0}$となることが分かる（たとえば$cf(cov(meager))\geq add(meager)$だから$cov(meager)$は uncountable な cofinalityを持つことに注意する）．あるいは，$\neg 0^\#$からのいくつかの帰結が成り立つときには$2^{\aleph_0}$の値によらず上の等式が成り立つ．以下の補題で用いられている用語のうち“σ-部分順序”については，系11の後を参照．

命題6　χを十分に大きな正則基数として，$M\prec\mathcal{H}(\chi)$を$[M]^{\aleph_0}\cap M$が$[M]^{\aleph_0}$で$\subseteq$に関しcofinalで，すべての$h\in{}^\omega\omega$に対し，$f\in{}^\omega\omega\cap M$で$h(n)\neq f(n)$がすべての$n\in\omega$に対し成り立つようなものが存在するものとする．$\mathbb{R}\setminus M$が空でなければ，$\mathcal{P}(\omega)\cap M$は$\mathcal{P}(\omega)$の$\sigma$-部分順序ではない．

証明　$x\in\mathbb{R}\setminus M$とする．

$\mathcal{P}(\omega)\cap M\leq_\sigma\mathcal{P}(\omega)$だったとして矛盾を導く．

このときには，$\mathbb{R}$の無限閉集合の可算族$C\in M$で次の性質を持つものがとれる：閉集合$c\in M$がxを含むなら，$c'\in C$で$x\in c'\in c$となるようなものが存在する：Qを命題５,(2)の証明でのようにとる．$s=\{(q,r)\in Q:x\leq q\vee x\geq r\}$とすれば，仮定から，可算集合$D\subseteq\mathcal{P}(Q)\cap M$で，$\{y\in\mathcal{P}(Q):y\subseteq s\}$の$\subseteq$に関するcofinal subsetとなるものが存在する．$D'\in[\mathcal{P}(Q)]^{\aleph_0}\cap M$を$D\subseteq D'$となるようにとり，$C=\{\mathbb{R}\setminus o(d):d\in D',\ \mathbb{R}\setminus o(d)$は無限集合$\}$とすればよい，ここに$o(d)$は命題５,(2)の証明で定義されたものである．

$(c_n:n\in\omega)$をCのMでの枚挙とする．$\{u^m_n:m\in\omega,n\in\omega\}\in M$を，開集合の族で，各$n\in\omega$に対し，$(u^m_n:m\in\omega)$は pairewise disjointで，すべての$m\in\omega$に対し，$u^m_n\cap c_n\neq\emptyset$となるようなものとする．$f\in{}^\omega\omega$を$x\in u^m_n$なら$f(n)=m$がすべての$n\in\omega$に対し成り立つようなものとする．$M$に対する仮定により，$g\in{}^\omega\omega\cap M$で，すべての$n\in\omega$に対し，$f(n)\neq g(n)$となるものが存在する．$c^*=\bigcap_{n\in\omega}\mathbb{R}\setminus u^{g(n)}_n$とすれば，$x\in c^*$だが，$c^*$の構成から，すべての$c\in C$に対し，$c\not\subseteq c^*$となる．これは$C$のとり方に矛盾である．　□(命題６)

上でのような議論により，Chichoń's diagram に現れる基数普遍量は，$(\mathcal{P}(\omega),\subseteq)$の weak Freese-Nation property を仮定すると，対応するCohen model でと同じように決定されることがわかる．[3] では，$(\mathcal{P}(\omega),\subseteq)$の weak Freese-Nation property が Cohen models で成立する無限組合せ論を非常に良く反映する公理となっていることが示されている．

補題４,(1)と同様の命題は $\mathcal{P}(\omega_1)$と $\mathcal{P}(\omega_1)/[\omega_1]^{\leq\aleph_0}$の間でも成り立つ．しかし，これは次で見るように，この２つの半順序集合が両方ともweak Freese-Nation property を持たないことが ZFC で示せる，という理由による．

ここに，$\mathcal{P}(\omega_1)/[\omega_1]^{\leq\aleph_0}$ は$(\mathcal{P}(\omega_1),\subseteq)$のイデアル$[\omega_1]^{\leq\aleph_0}$に関する同値類の全体で，対応する半順序集合 $\subseteq_{[\omega_1]^{\leq\aleph_0}}$は，$x\subseteq_{[\omega_1]^{\leq\aleph_0}}y\Leftrightarrow|x\setminus y|\leq\aleph_0$ で定義されるものである．$(\mathcal{P}(\omega_1),\subseteq_{[\omega_1]^{\leq\aleph_0}})$を$[\omega_1]^{\leq\aleph_0}$で割ることで得られる商構造を$(P(\omega_1)/[\omega_1]^{\leq\aleph_0},\subseteq_{[\omega_1]^{\leq\aleph_0}})$であらわすことにする．

補題７　$(\mathcal{P}(\omega_1)/[\omega_1]^{\leq\aleph_0},\subseteq_{[\omega_1]^{\leq\aleph_0}})$は weak Freese-Nation property を持たない．

証明　命題２によりω_1の部分集合の$\subseteq_{[\omega_1]^{\leq\aleph_0}}$に関する長さが$\omega_2$の上昇列が存在することが言えれば十分である．これは，次の補題から直ちに導ける：

補題８　$\gamma<\omega_2$として，$(x_\alpha)_{\alpha<\gamma}$を$\omega_1$の non-stationary subsets の族とするとき，non-stationaryな$x\subseteq\omega_1$で$x_\alpha\subseteq_{[\omega_1]^{\leq\aleph_0}}x$がすべての$\alpha<\gamma$に対し成り立つようなものが存在する．

証明　明らか．　□（補題８）□（補題７）

補題９　$(\mathcal{P}(\omega_1),\subseteq)$は weak Freese-Nation property を持たない．

証明　補題８と，$\mathcal{H}(\chi)$の elementary submodels の手法を組み合せることで証明が得られる．$(\mathcal{P}(\omega_1),\subseteq)$の weak Freese-Nation mapping f が存在したとして矛盾を導く．χを十分に大きくとり，$(\mathcal{H}(\chi),\subseteq)$の濃度が$\aleph_1$の elementary submodels の上昇例$(M_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$と$\omega_1$の non-stationary subsets の$\subseteq_{[\omega_1]^{\leq\aleph_0}}$に関する上昇例$(x_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$を次を満たすようにとる：

(a)　$f\in M_0,\ \omega_1\in M_0$；

(b)　$x_\alpha\in M_{\alpha+1}$

(c)　すべてのnon-stationaryな$x\in M_\alpha\cap\mathcal{P}(\omega_1)$ に対し，$x\subseteq_{[\omega_1]^{\leq\aleph_0}}x_\alpha$

このようなものがとれることは補題８によりよい．

$M=\bigcup_{\alpha<\omega_1}M_\alpha$とする．このとき，補題８により，non-stationaryな$x^*\subseteq\omega_1$で，$x_\alpha\subseteq_{[\omega_1]^{\leq\aleph_0}}x^*$がすべての$\alpha<\omega_1$に対し成り立つようなものが存在する．$\alpha^*<\omega_1$を，$f(x^*)\cap(M\setminus M_{\alpha^*})\neq\emptyset$となるようなものとする．$\beta<\omega_1$を$x_\alpha\setminus\beta\subseteq x^*$となるようにとり，$y^*=x_\alpha\setminus\beta$とする．(a)と(b)により$y^*\in M_{\alpha^*+1}$だから，$f(y^*)\subseteq M_{\alpha^*+1}$となるが，(c)により，$z\in f(y^*)$で$y^*\subseteq z\subseteq x^*$なら，$z\in M_{\alpha^*+1}\setminus M_{\alpha^*}$となる．したがって，$\alpha^*$のとりかたから，このような$z$に対し，$z$は$f(x^*)$の元ではあり得ない．しかしこれは$f$が $\mathcal{P}(\omega_1)$のweak Freese-Nation mappingであることに矛盾である．　□（補題９）

次の補題と補題７を組み合せると幾つかの興味深い応用が得られる．

補題10　P，Q 順序集合として，$f:P\to Q$，$g:Q\to P$ は順序を保存する写像で，$g\circ f=\mathrm{id}_P$ を満たすものとする．このとき，Q がweak Freese-Nation propertyを持てば，P もweak Freese-Nation propertyを持つ．

証明　$h:Q\to[Q]^{\leq\aleph_0}$を weak Freese-Nation mapping とする．このとき，$h':P\to[P]^{\leq\aleph_0}$を$h'(p)=g[h(f(p))]$で定義すると，これは$P$上の weak Freese-Nation mapping となる．　□（補題10）

系11　(a) nonstat でω_1上の non-stationary ideal を表し，$x,y\subseteq\omega_1$に対し，$x\subseteq_{\mathrm{nonstat}}y$ を$x\setminus y$

が non-stationaryとなることとして定義する．$(\mathcal{P}(\omega_1), \subseteq_{\mathrm{nonstat}})$の nonstat に関する商構造を$(\mathcal{P}(\omega_1)/\mathrm{nonstat}, \subseteq_{\mathrm{nonstat}})$で表す．

このとき，$(\mathcal{P}(\omega_1)/\mathrm{nonstat}, \subseteq_{\mathrm{nonstat}})$は weak Freese-Nation property を持たない．

(b) $\mathcal{P}(\omega)/\mathit{fin}$ が weak Freese-Nation property を持つなら，$\mathcal{P}(\omega_1)$を$\mathcal{P}(\omega)/\mathit{fin}$ に順序を保存して埋め込むことはできない．

証明 (a)：補題7により$(\mathcal{P}(\omega_1), \subseteq)$は weak Freese-Nation property を持たないから，補題10により，順序を保存する$f : \mathcal{P}(\omega_1) \to \mathcal{P}(\omega_1)/\mathrm{nonstat}$ と $g : \mathcal{P}(\omega_1) \to \mathcal{P}(\omega_1)/\mathrm{nonstat} \to \mathcal{P}(\omega_1)$で$g \circ f = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(\omega_1)}$となるものの存在が示せればよい．$(a_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$を$\omega_1$の$\omega_1$個の stationary sets への分割とする．

このとき，$f : \mathcal{P}(\omega_1) \to \mathcal{P}(\omega_1)/\mathrm{nonstat}$と$g : \mathcal{P}(\omega_1)/\mathrm{nonstat} \to \mathcal{P}(\omega_1)$を，

$$f(X) = (\textstyle\bigcup_{\alpha \in X} a_\alpha)/\mathrm{nonstat},$$

$$g(Y/\mathrm{nonstat}) = \{\alpha \in \omega_1 : Y \cap a_\alpha \text{ は stationary}\}$$

で定義すると，これらは順序を保存し，$g \circ f = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(\omega_1)}$が成り立つことが示せる．

(b) $\mathcal{P}(\omega)/\mathit{fin}$が weak Freese-Nation property を持つとして，$\mathcal{P}(\omega_1)$の $\mathcal{P}(\omega)/\mathit{fin}$ への順序を保存する埋め込み$f : \mathcal{P}(\omega_1) \to \mathcal{P}(\omega)/\mathit{fin}$ があったとしてみる．このとき，$g : \mathcal{P}(\omega)/\mathit{fin} \to \mathcal{P}(\omega_1)$を

$$g(a/[\omega_1]^{\leq\aleph_0}) = \bigcup\{x \in \mathcal{P}(\omega_1) : f(x) \subseteq_{[\omega_1]^{\leq\aleph_0}} a/[\omega_1]^{\leq\aleph_0}\}$$

で定義すると，g は順序を保存し，$g \circ f = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(\omega_1)}$となる．したがって，補題10から$\mathcal{P}(\omega_1)$が weak Freese-Nation propertyを持つことが帰結できてしまうが，これは，補題9に矛盾する．

□(系11)

4． weak Freese-Nation property の特徴付け定理

weak Freese-Nation property のいくつかの特徴付けを与える．このために，まずいくつかの概念を導入する：Pを半順序集合として，QをPの部分順序とする．このときQがPの**σ-部分順序**である（これを$Q \leq_\sigma P$であらわす）とは，すべての$p \in P$に対し，$Q \restriction p = \{q \in Q : q \leq p\}$は可算な cofinal subset を持ち，$Q \uparrow p = \{q \in Q : q \geq p\}$は可算な coinitial subset を持つこととする．ここに$X \subseteq Q \restriction p$が$Q \restriction p$で cofinal とは，すべての$q \in Q \restriction p$に対し，$x \in X$で$q \leq x$となるものが存在することで，$X$が$Q \uparrow p$で coinitial とは，すべての$q \in Q \uparrow p$に対し，$x \in X$で$q \geq x$となるものが存在することである．

補題12 fをP上の weak Freese-Nation mapping として，$Q \subseteq P$がfに関し閉じている（つまり$\bigcup f[Q] \subseteq Q$が成り立つ）とする．このとき$Q \leq_\sigma P$が成り立つ．

証明 $p \in Q$に対し，

$$C(p) = f(p) \cap Q \restriction p$$

とする．$C(p)$は可算だが，$C(p)$は$Q \restriction p$で cofinalである：$q \in Q \restriction p$とすると，$r \in f(q) \cap f(p)$で$q \leq r \leq p$となるものがあるが，$r \in C(p)$である．$Q \uparrow p$についても同様にして可算な coinitial subset が与えられる．

□(補題12)

以下では，Pが yet weaker Freese-Nation property を持つというのを，$f : P \to [P]^{\leq\aleph_0}$で次の性質を満たすものが存在することとする：

$p, q \in P$で$p \leq q$なら，$r_p \in f(p)$と$r_q \in f(q)$で$p \leq r_q \leq r_p \leq q$となるものが常に存在する．

上のfをPの yet weaker Freese-Nation mapping と呼ぶことにする．Pが weak Freese-Nation property を持てば，P のweak Freese-Nation mappingにより，P は yet weaker Freese-Nation property を持つことが分かる．実はこの逆も成り立つことを以下で示す．

補題13 （補題12の拡張）f を P 上の yet weaker Freese-Nation mapping として，$Q \subseteq P$ が f に関し閉じている（つまり $\bigcup f[Q] \subseteq Q$ が成り立つ）とする．このとき $Q \leq_\sigma P$ が成り立つ．

証明 補題12と同様に示せる． □（補題13）

補題14 P が yet weaker Freese-Nation property を持つとする．このとき $Q \leq_\sigma P$ なら，Q も yet weaker Freese-Nation property を持つ．

証明 $f: P \rightarrow [P]^{\leq \aleph_0}$ を yet weaker Freese-Nation mapping とする．各 $p \in P$ に対し，$I(p)$ を $Q \upharpoonright p$ の可算な cofinal subset とし，$F(p)$ を $Q \uparrow p$ の可算な coinitial subset とする．このとき，$f': Q \rightarrow [Q]^{\leq \aleph_0}$ を

$$f'(q) : \bigcup \{I(p) : p \in f(q)\}$$

で定義すると，f' は Q の yet weaker Freese-Nation mapping となる：$q, q' \in Q$ で $q \leq q'$ とすると．$r_q \in f(q)$ と $r_{q'} \in f(q')$ で，$q \leq r_{q'} \leq r_q \leq q'$ となるものがとれる．$r'_{q'} \in I(r_{q'})$ で $q \leq r_{q'}$ となるものがとれるから，$r'_q \in I(r_q)$ で $r'_{q'} \leq r'_q$ となるものがとれるが，f' の定義から，$r'_q \in f(q)$ かつ $r'_{q'} \in f(q')$ である． □（補題14）

補題14の証明から，P が yet weaker Freese-Nation property を持ち，$Q \leq P$ が，各 $p \in P$ に対し，$Q \upharpoonright p$ の可算な cofinal subset を持つ，または，各 $p \in P$ に対し，$Q \uparrow p$ の可算な coinitial subset を持つなら，Q も yet weaker Freese-Nation property を持つことが分かる．

命題15 $(P_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ を半順序集合の（$\subseteq$ に関する）continuously increasing chain として，各 $\alpha < \kappa$ に対し P_α はweak Freese-Nation property を持ち，$P_\alpha \leq_\sigma P_{\alpha+1}$ となっているとする．このとき P_κ も weak Freese-Nation property を持つ．

証明 各 $\alpha < \kappa$ に対し，$f_\alpha: P_\alpha \rightarrow [P]^{\leq \aleph_0}$ を weak Freese-Nation mapping とする．このとき，weak Freese-Nation mapping の（$\subseteq$ に関する）上昇列 $(f'_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ を次のように帰納的に定義できる：$f'_0 = f_0$；Limit $\gamma < \kappa$ に対し f'_α, $\alpha < \gamma$ がすでに構成されているときには $f'_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} f'_\alpha$ とする．$\alpha < \kappa$ に対し，f'_α が構成できたとき，各 $p \in P_{\alpha+1}$ に対し，$I_\alpha(p)$ を $P_\alpha \upharpoonright p$ の可算なcofinal subsetとし，$F_\alpha(p)$ を $P_\alpha \uparrow p$ の可算なcoinitial subsetとする．$p \in P_{\alpha+1}$ に対し，

$$f'_{\alpha+1}(p) \begin{cases} f'_\alpha(p), & p \in P_\alpha \text{ のとき} \\ \bigcup \{f'_\alpha(q) : q \in I_\alpha(p) \cup F_\alpha(p)\} \cup f_{\alpha+1}(p), & p \notin P_\alpha \text{ のとき} \end{cases}$$

として $f'_{\alpha+1}: P_{\alpha+1} \rightarrow [P_{\alpha+1}]^{\leq \aleph_0}$ を定義すると，$f'_\alpha \subseteq f'_{\alpha+1}$ で $f'_{\alpha+1}$ は $P_{\alpha+1}$ の weak Freese-Nation mapping となっていることが容易に確かめられる． □（命題15）

定理16 任意の半順序集合 P に対し，次は同値である：

(1) P は weak Freese-Nation property を持つ；

(2) P は yet weaker Freese-Nation property を持つ；

(3) $\{Q \in [P]^{\aleph_1} : Q \leq_\sigma P\}$ は $[P]^{\aleph_1}$ の閉非有界集合を含む．

(4) χ を十分に大きくとるとき，任意の $M \prec \mathcal{H}(\chi)$ で $P \in M$ かつ $\omega_1 \subseteq M$ となるものに対し，$P \cap M \leq_\sigma P$ が成り立つ．

証明 (1)⇒(2) は明らか．

(2)⇒(3)：$f: P \rightarrow [P]^{\aleph_0}$ を yet weaker Freese-Nation mapping とする．このとき，補題13により，f に関して閉じた $Q \in [P]^{\aleph_1}$ は P の σ-部分順序となるが，このような Q の全体は $[P]^{\aleph_1}$ で閉非有界となる．

(3) ⇒ (1)：$\mathcal{C} \subseteq \{Q \in [P]^{\aleph_1} : Q \leq_\sigma P\}$ を $[P]^{\aleph_1}$ の閉非有界集合とする．

Claim 16.1 $R \subseteq P$ で $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C} \cap [R]^{\aleph_1}$ が $\subseteq$ に関し上に有向で，$\bigcup \mathcal{C}' = R$ なら，$R \leq_\sigma P$ となる．

$\vdash$ $R \leq_\sigma P$ でなかったとして矛盾を導く，このときには例えば $p \in P$ で，$R \upharpoonright p$ が可算なcofinal subset を持たないようなものが存在する．このときには，$\mathcal{C}'$ の元の上昇列 $(Q_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ で，$Q \upharpoonright p$ は $Q_{\alpha+1} \upharpoonright p$ で cofinal でないようなものがとれる．このとき $Q = \bigcup_{\alpha<\omega_1} Q_\alpha$ とすれば，$\mathcal{C}$ の閉鎖性から $Q \in \mathcal{C}$ だが，$Q \upharpoonright p$ は可算な cofinal subset を持ちえないから矛盾である． $\dashv$ (Claim 16.1)

χ を十分に大きくとる．このとき次を $|M|$ に関する帰納法で示すが，これの $M \supseteq P$ となっている場合から P の weak Freese-Nation property が帰納できる．

Claim 16.2 $M \prec \mathcal{H}(\chi)$ で P，$\mathcal{C} \in M$ かつ $\omega_1 \subseteq M$ なら，$P \cap M$ は weak Freese-Nation property を持つ．

$\vdash$ $|M| = \aleph_1$ のときには，命題1によりよい．$\kappa > \aleph_1$ で，上のような M で $|M| < \kappa$ となるものに対してはClaim が成り立つと仮定して，$|M| = \kappa$ のときを示す．M の continuous な elementary submodels の上昇例 $(M_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ を，P，$\mathcal{C} \in M_0$；すべての $\alpha < \kappa$ に対し $|M_\alpha| < \kappa$；$M = \bigcup_{\alpha<\kappa} M_\alpha$ となるようにとると，$\alpha < \kappa$ に対し $P_\alpha = P \cap M_\alpha$ として，帰納法の仮定と，Claim16.1から $(P_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ は命題15の仮定を満たすから，$P \cap M = \bigcup_{\alpha<\kappa} P_\alpha$ もweak Freese-Nation property を持つ．

$\dashv$ (Claim 16.2)

(1) ⇒ (4)：P が weak Freese-Nation property を持つとする．M を(4)でのようなものとすると，$M \models$ "P は weak Freese-Nation property を持つ" により，P の weak Freese-Nation mapping f で M の元となるものが存在する．$f \in M$ により $P \cap M$ は f で閉じているから，補題12により，$P \cap M \leq_\sigma P$ が分かる．

(4) ⇒ (3)：χ を十分に大きくとり，$\mathcal{H}(\chi)$ の Skolem 関数の族を固定して，h をこの Skolem 関数の族に関する閉包演算子とする．$\mathcal{C} = \{P \cap M : M \prec \mathcal{H}(\chi),\ |M| = \aleph_1,\ h(P \cap M) = M\}$ とすれば，$\mathcal{C}$ は $[P_\alpha]^{\aleph_1}$ の閉非有界部分集合となり，仮定により $Q \leq_\sigma P$ がすべての $Q \in C$ に対し成り立つ． □(定理16)

系17 P が weak Freese-Nation property を持つとする．このとき $Q \leq_\sigma P$ なら Q も weak Freese-Nation property を持つ．

証明 補題14と定理16によりよい． □(系 17)

5．[6]で提起された問題の解決と未解決問題

[6]で PROBLEMS 1～5として提起された問題は，最近までにその殆どの解が得られているが，これについての短い記述を与えておく．最後に我々が "Kitami List of Open Problems" と呼んでいる未解決問題のリストの中から weak Freese-Nation property に関連する問題について述べる．

Problem 1 ([6])．$(\mathcal{P}(\omega))$ が $\subseteq^*$ に関する長さが ω_2 以上の上昇列を持たず，$\aleph_2$-Lusin gap も存在しないなら，$\mathcal{P}(\omega)$ は weak Freese-Nation property を持つか [2]により，CHのモデルから出発して，$\aleph_2$ 個の random reals を side-by-side に加えて得られるモデルでは $\mathcal{P}(\omega)$ は $\subseteq^*$ に関する長さが ω_2 以上の上昇列を持たず，$\aleph_2$-Lusin gap も存在しない．一方[7]ではこのようなモデルでは $\mathcal{P}(\omega)$ は weak Freese-Nation property を持たないことが証明されている．

Problem 2 ([6])．ZFC＋GCH のモデルで ccc complete Boolean algetra で weak Freese-Nation property を持たないものが存在するか？

この問題の解答は肯定的である．[4]で，ZFC＋GCH のモデルで，weak Freese-Nation propertyを持たないccc complete Boolean algebraを持つようなものが存在することが示されている．この証明には高いconsistency strengthが必要となるが，この命題のequi-consistencyが何になるのかはまだ知られていない．

Problem 3([6])．$V[G]$をCohen realsを付加して得られるモデルとするとき，$V[G]$で常に$\mathcal{P}(\omega)$はweak Freese-Nation propertyを持つか？

この問題はまだ未解決である．ただし，[6]では$V=L$のモデルから出発したときにはこの問題の解決は肯定的であることが示されている．

Problem 4, 5([6])．$\mathcal{P}(\omega)$がweak Freese-Nation propertyを持つこととすべてのccc complete Boolean algebraがweak Freese-Nation propertyを持つことは同値か？

この問題の解は否定的である．特にCohen modelsでは$\mathcal{P}(\omega)$はweak Freese-Nation propertyを持つが，ccc complete algebraでweak Freese-Nation propertyを持たないものが存在することが示せる([4])．

逆に上の結果から：

Problem A：$\neg$CHなら，あるccc complete Boolean algebrasでweak Freese-Nation propertyを満たさないものが常に存在するか？

という問題は自然のものに思える．

[3]では，W. Justによるある種のsuperatomic Boolean algebarsのコーエン・モデルの非存在がすでに$\mathcal{P}(\omega)$のweak Freese-Nation propertyから導けることを示している．

S. Shelahはコーエン・モデルで，次の問題でのようなsuperatomicなBoolean algebraの非存在を示している．これが$\mathcal{P}(\omega)$のweak Freese-Nation propertyから導かれるかどうかは未解決である：

Problem B：$\mathcal{P}(\omega)$がweak Freese-Nation propertyを持つものとする．このとき，superatomicなブール代数Bで，$\{\alpha < ht(B) : wd_\alpha(B) = \aleph_0\}$が濃度$\geq \aleph_1$を持つものは存在するか？

参考文献

[1] S. Fuchino, Habilitationsschrift, Berlin (1995), 1-86.

[2] J.Brendle, S. Fuchino and L. Soukup, Coloring ordinals by reals, preprint.

[3] S. Fuchino, S. Geschke and L. Soukup, On the weak Freese-Nation property of $\mathcal{P}(\omega)$, submitted.

[4] S. Fuchino, S. Geschke, S. Shelah and L. Soukup, On the weak Freese-Nation property of complete Boolean algebras, preprint.

[5] S. Fuchino, S. Koppelberg and S. Shelah, Partial orderings with the weak Freese-Nation property, Annals of Pure and Applied Logic, 80 (1996), 35-54.

[6] S. Fuchino and L. Soukup, More set-theory around the weak Freese-Nation property, Fundamenta Mathematicae 154 (1997), 159-176.

[7] S. Geschke, On σ-filtered Boolean algebras, Disssertation, Berlin (1999) 1-97.

Added in Proof：上のProblem 3は最近になって否定的な解が得られている．この結果は，[4]におさめられている．