

## マルチアルゴリズムの可能な改良形 GMDH の構成\*

菊 田 章\*\*

神 谷 祐 二\*\*

(昭和58年4月27日受理)

### Construction of a Revised GMDH with Multi-algorithm

by Akira KIKUTA and Yuji KAMIYA

The GMDH (Group Method of Data Handling) is well known as a modeling method of a complex system. However, the models obtained have generally led to complex expressions because partial polynomials with two variables are used in the method.

In this paper, a revised GMDH is proposed from a point of view of practical use. The revised points are following:

- 1) partial polynomials consist of multi variables and can be selected arbitrarily in each selection layer;
- 2) optimal partial polynomials can be generated automatically;
- 3) the AIC (Akaike's Information Criterion) is used as a criterion for selecting intermediate variables, generating optimal partial polynomials and stopping the multi-layered calculation;
- 4) it is possible to constitute a modeling algorithm according to the intention of a model maker.

Two different algorithms constituted under the concept of this revised GMDH are applied to a simple illustrative example, and these results are compared and discussed.

### 1. ま え が き

複雑で構造を明確に把握できないシステムを、その入出力データをもとにモデル化する手法の一つに GMDH (Group Method of Data Handling)<sup>1)~5)</sup> が知られており、この手法は非線形システムを取り扱う際の有役な方法論である。また、重回帰手法よりもモデリングに必要なデータの数がずっと少なく済み、専門的知識をあまり必要とせずとも容易にモデリングが行なえるという利点がある。従来の GMDH<sup>1)~5)</sup> では、各選択層において部分表現式に最も簡単な2変数の多項式が用いられており、システムが非常に複雑で多変数であっても比較的少ない計算時間でモデル化が行なえるという利点はあるが、比較的簡単なシステム(たかだか3変

\* 計測自動制御学会北海道支部学術講演会(昭和58年2月)で一部発表

\*\* 北見工業大学電気工学科

数や4変数の1次あるいは2次程度で十分に表現されるシステム)に適用するとき、最低2層は通過させなければならないこと、変数選択の評価規準が各層内でのみ有効であること、変数選択法として変数増減法<sup>7)</sup>などの簡便法が用いられている<sup>3)~5)</sup>ことなどにより、得られるモデルは真に最適な変数の組合せからなる可能性が少なく、かえって複雑になることさえある。本稿では、部分表現式を2変数の多項式とするGHDH本来の概念にあえてとらわれず、各選択層において任意の多変数の多項式として指定可能なものとし、変数選択の評価規準に赤池氏の情報量規準AIC(Akaike's Information Criterion)<sup>6)</sup>を用いてAIC最小の意味で最適な変数の組合せからなる最適な部分表現式を発生させる改良形GMDHを実用的見地から構成する。次に、本稿で構成された改良形GMDHの概念に基づいて構成される異なる2通りのアルゴリズムを文献[3],[9]で取り扱われている簡単な同定問題に適用し、それらの結果を比較検討することにより本手法の有効性を確かめる。

## 2. 変数選択の評価規準 AIC

重回帰分析における変数選択の評価規準として、赤池氏の情報量規準AIC<sup>6)</sup>が用いられることは良く知られており<sup>7)</sup>、AICは

$$AIC_k = N \log_e(S_k/N) + 2(k+1) + C \quad (1)$$

$$S_k = \sum_{\alpha=1}^N (y_\alpha - \hat{y}_\alpha)^2 \quad (2)$$

$$\hat{y}_\alpha = \hat{a}_0 + \sum_{i=1}^k \hat{a}_i x_{\alpha i} \quad (\alpha=1, 2, \dots, N) \quad (3)$$

として与えられる。ここで、 $N$ は観測データの個数、 $y_\alpha$ は $\alpha$ 番目の観測データの出力値、 $\hat{y}_\alpha$ は $N$ 組のデータを用いて得られる重回帰式(3)から計算される回帰推定値、 $x$ は入力変数、 $S_k$ は(2)式から計算される残差平方和、 $k$ は $x_i$ の個数、 $C$ は $k$ に無関係な定数でAICを大小の比較だけに用いる場合には零としてよく、以下では零として扱う。AICの定義により、AIC値の最小なモデルが最良のモデル(最小AIC推定)<sup>6)</sup>とされる。この評価規準をGMDHに適用するとき、原データをトレーニング・データとチェックング・データとに分割する必要がなくGMDHのデータの分割に関する正則化のヒューリスティクス<sup>1)</sup>を避けることができ、得られるモデルは分割による差違が生じないという利点がある。

## 3. マルチアルゴリズムの可能な改良形 GMDH

一般に、任意の非線形関数 $\phi$ はVolterra級数展開できることが知られており<sup>1)</sup>、その離散型の多項式表現はKolmogorov-Gavrovの多項式(K-G多項式)と呼ばれ

$$\phi = b_0 + \sum_{i_1} b_{i_1} x_{i_1} + \sum_{i_1} \sum_{i_2} b_{i_1 i_2} x_{i_1} x_{i_2} + \sum_{i_1} \sum_{i_2} \sum_{i_3} b_{i_1 i_2 i_3} x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} + \dots \quad (4)$$

として表わされる<sup>1)</sup>。GMDHでは(4)式をシステムの完全表現式として仮定する。従来の

Basic GMDH では、(4) 式の部分表現式として 2 変数の多項式が用いられているため一般に通過層が多くなり得られるモデルの構造は複雑になる。本稿では、(4) 式の部分表現式として  $m, p$  を任意に指定することができる  $m$  変数  $p$  次多項式

$$y = a_0 + \sum_{i_1=1}^m a_{i_1} x_{t(i_1)} + \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=i_1}^m a_{i_1 i_2} x_{t(i_1)} x_{t(i_2)} + \dots + \sum_{i_1=1}^m \dots \sum_{i_p=i_{p-1}}^m a_{i_1 i_2 \dots i_p} x_{t(i_1)} x_{t(i_2)} \dots x_{t(i_p)} \quad (5)$$

を用い、(1) 式で表わされる AIC を変数選択の評価規準に用いる改良形 GMDH を構成する。その改良形 GMDH は、次節の 3.1 と 3.2 から構成することができる。

### 3.1 最適な部分表現式の自己選択

(5) 式に AIC を用いた変数の選択法を適用して、AIC 最小の意味で最適な部分表現式を自己選択するのであるが、(5) 式の部分表現式に含まれる変数はその項数を  $L$  とすると定数項を除いて  $(L-1)$  個であり、変数の総組合せ数は

$$\sum_{i=1}^{L-1} {}_{L-1}C_i = 2^{L-1} - 1 \text{ 通り} \quad (6)$$

となる。(6) 式の値は  $m, p$  の指定により非常に大きくなることが予想され、實際上計算が不可能になる場合が生じる。そこで、 $k_1, k_2$  を指定する次の組合せ数

$$\sum_{i=k_1}^{k_2} {}_{L-1}C_i \text{ 通り} \quad (1 \leq k_1 \leq k_2 \leq L-1) \quad (7)$$

を考え、この組合せの中で AIC を最小とする最適な部分表現式を自己選択する。 $k_1, k_2$  を指定することは、最適な部分表現式の項数の上下限をあらかじめ設定することを意味している。変数選択には計算時間が比較的短かくて済む変数増減法がよく用いられるが<sup>3)~5)</sup>、必ずしも最良の組合せが得られるという保障がないので(7) 式の可能なすべての組合せを行なう計算法を導入する。以下に、最適な部分表現式を自己選択する計算テクニックを補足を加えながら示す。

まず、(5) 式に対応する正規方程式

$$(X^T X) A = X^T Y \quad (8)$$

ここで、

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_{1t(1)} & x_{1t(2)} & \dots & x_{1t(m)} & x_{1t(1)}^2 & x_{1t(1)} x_{1t(2)} & \dots & x_{1t(1)} x_{1t(m)} & x_{1t(2)}^2 & \dots & x_{1t(m)}^2 \\ 1 & x_{2t(1)} & x_{2t(2)} & \dots & x_{2t(m)} & x_{2t(1)}^2 & x_{2t(1)} x_{2t(2)} & \dots & x_{2t(1)} x_{2t(m)} & x_{2t(2)}^2 & \dots & x_{2t(m)}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{Nt(1)} & x_{Nt(2)} & \dots & x_{Nt(m)} & x_{Nt(1)}^2 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}_{N \times L}$$

$$Y = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_N]^T_{N \times 1}, \quad A = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_m \ a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_m^{p_r} \ \dots \ a_m^p]^T_{L \times 1}$$

から次の行列  $\Phi$  を作成する。

**Step 1**

$$\Phi = \begin{matrix} & \overset{\sim}{L} & \overset{\sim}{1} \\ L \left( \begin{array}{c|c} X^T X & X^T Y \\ \hline Y^T X & Y^T Y \end{array} \right) \end{matrix} \quad (9)$$

行列  $\Phi$  の最下行 ( $1 \times (L+1)$ ) 個の要素は残差平方和  $S_k$  を計算するために付け加えたものである。実際には、行列  $\Phi$  は  $m$  個の入力変数と出力変数から (8) 式を介さず (5) 式から直接計算することができる。

**Step 2**  $\Phi_{11}$  をピボットにして 1 列目を掃き出し、1 列目には逆行列に対応する 1 列目を入れる。即ち、 $\Phi_{1j} = \Phi_{1j} / \Phi_{11}$  ( $j=2 \sim L+1$ ) を行ない、 $\Phi_{11} = 1 / \Phi_{11}$  とする。次に  $x_0 = \Phi_{i1}$  ( $i=2 \sim L+1$ ) とし、 $\Phi_{i1} = 0$  としてから  $\Phi_{ij} = \Phi_{ij} - x_0 \cdot \Phi_{1j}$  ( $j=1 \sim L+1$ ) を計算する。

この結果 (9) 式の行列  $\Phi$  は

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1/N & \bar{x} & \bar{y} \\ -\bar{x}^T & S & d \\ -\bar{y} & d^T & S_{yy} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$\bar{x}$ ; 行列  $X$  の定数列以外の各列の平均からなる行列 ( $1 \times (L-1)$ )

$\bar{y}$ ; 行列  $Y$  の列の平均

$$\begin{bmatrix} S & d \\ d^T & S_{yy} \end{bmatrix}; \text{ 偏差平方和・積和行列} \quad (11)$$

となる。(10) 式の行列  $\Phi$  に対して変数の組合せ計算を行なってもよいが、各要素は変数  $x, y$  の尺度に依存しており計算途中で生じる丸め誤差の起こる機会が多くなる<sup>8)</sup>。したがって、変数  $x, y$  の尺度依存性を除去するために各変数を平均 0 分散 1 に規準化する。

**Step 3**  $\hat{\Phi} = [S_{11} S_{22} \dots S_{L-1 L-1} S_{yy}]$  (12)

として  $\Phi_{ij} = \Phi_{ij} / \sqrt{\hat{\Phi}_{i-1}}$ ,  $\Phi_{ji} = \Phi_{ji} / \sqrt{\hat{\Phi}_{i-1}}$  ( $i=2 \sim L+1, j=2 \sim L+1$ ) を計算する。ただし、 $\hat{\Phi}_{i-1} = 0$  の場合はパスする。

この結果 (10) 式の行列  $\Phi$  は

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1/N & \bar{x} & \bar{y} \\ -\bar{x}^T & & \\ -\bar{y} & & \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\Phi^* = \begin{matrix} & \overset{\sim}{L-1} & \overset{\sim}{1} \\ L-1 \left( \begin{array}{c|c} R & r_y \\ \hline r_y^T & 1 \end{array} \right) \end{matrix}; \text{ 相関係数行列} \quad (14)$$

となる。行列  $\Phi^*$  を用いて変数の組合せ計算を行なうと精度良く計算が行なえる<sup>8)</sup>。このとき、(1) 式の AIC は残差平方和  $S_k$  が

$$S_k = S_{yy} \cdot S_k^* \tag{15}$$

$S_k^*$ ;  $k$  個の変数を取り入れたとき、即ち行列  $\Phi^*$  を  $k$  個の対角要素で掃き出し  
たときの  $\Phi_{LL}^*$  の要素を表わす。

として表わされるので

$$AIC_k = (N \log_e S_{yy}/N+2) + N \log_e S_k^* + 2k \tag{16}$$

となる。また、推定パラメータ値に関しては次の関係式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} A_{i+1} &= \sqrt{S_{yy}/S_{ii}} \Phi_{iL}^* \quad (i=1 \sim L-1) \\ A_1 &= \bar{y} + \sum_{i=1}^{L-1} A_{i+1} \bar{x}_i \end{aligned} \right\} \tag{17}$$

$\Phi_{iL}^*$ ; 行列  $\Phi^*$  を  $R_{ii}$  で掃き出したとき、 $L$  列目の  $i$  番目に得られる標準偏帰帰  
推定値。

(14) 式の行列  $\Phi^*$  を用いて、(7) 式の可能なすべての組合せの中から AIC を最小とする最適な変数の組合せを求める。 $k$  個の変数を取り入れた場合の残差平方和  $S_k$  は、行列  $\Phi^*$  を  $(k-1)$  個の変数に対応する対角要素をピボットにして掃き出し計算を行なえば、残りの 1 変数分に対しては掃き出し計算を行なうことなく知ることができる。次の Step 4.1~Step 4.12 の計算アルゴリズムに従うと  $(k-1)$  個の変数に対して掃き出し計算を行なう際、行列  $\Phi^*$  のすべての要素に対して計算を行なう必要がなく、かつこのとき  $k$  個の変数を含む残差平方和  $S_k$  を複数個即座に計算できるので計算時間を短縮させることができる。

**Step 4.1**  $AIC_{opt} = (16)$  式の第一項、 $k_{opt} = 0$

**Step 4.2**  $k = k_1$

**Step 4.3**  $m_1 = 1, IX(1) = 1$

**Step 4.4**  $m_2 = 1$

**Step 4.5**  $IX(i+1) = IX(i) + 1 \quad (i = m_1 \sim k-1)$

**Step 4.6** 行列  $\Phi^*$  の  $IX(i)$  ( $i = m_1 \sim k-1$ ) 番目の変数を取り入れる。即ち、 $\Phi_{IX(i) IX(i)}^*$  をピボットにして  $IX(i)$  行  $IX(i)$  列以下の要素に対して掃き出し計算を Step 2 の要領で行なう。

ただし、 $\Phi_{IX(i) IX(i)}^* < \varepsilon$  ( $\varepsilon$ ; 十分に小さな正数) の場合、あるいは  $\Phi_{IX(i) IX(i)}^* \geq \varepsilon$  を満足していても  $\Phi_{IX(i) IX(i)}^*$  で掃き出したとき  $j$  行  $j$  列 ( $j = IX(i) + 1 \sim L-1$ ) の要素すべてが負になる場合には  $m_2 = k - i, m_1 = i$  として Step 4.10 へ進む。

**Step 4.7** さらに  $i$  番目 ( $i = IX(k) \sim L-1$ ) の 1 変数を取り入れたときの  $S_k^*$  は

$$S_k^* = \Phi_{LL}^* - \Phi_{Li}^* \cdot \Phi_{iL}^* / \Phi_{ii}^* \tag{18}$$



として計算できるので (16) 式の  $AIC_k$  が  $AIC_{opt}$  よりも小さければ  $AIC_{opt} = AIC_k$ ,  $k_{opt} = k$ ,  $IX_{opt} = [IX(1) IX(2) \cdots IX(k-1) i]$  として保持し, そうでなければ  $i$  を更新する。

**Step 4. 8**  $k=1$  のとき Step 4.12 へ進む

**Step 4. 9**  $m_1 = k - m_2$  として  $IX(m_1)$  番目の変数を削除する。即ち,  $\Phi_{IX(m_1) IX(m_1)}^*$  をピボットに  $IX(m_1)$  行  $IX(m_1)$  列以下の要素に対して掃き出し計算を Step 2 の要領で行なう。

**Step 4.10**  $IX(m_1) = IX(m_1) + 1$  として,  $IX(m_1) \leq (L - m_2 - 1)$  ならば Step 4.4 へ戻る。

**Step 4.11**  $m_2 = m_2 + 1$  として,  $m_2 \leq (k - 1)$  ならば Step 4.9 へ戻る。

**Step 4.12**  $k = k + 1$  として,  $k \leq k_2$  ならば Step 4.3 へ戻る。  $k > k_2$  ならば Step 5 へ進む。

上記の Step が終了したとき, 行列  $\Phi^*$  は (14) 式の状態に戻っている。  $AIC_{opt} = AIC_k$  の場合, 先に決定した組合せを優先としている。 Step 4 では先の組合せほど変数の組が少ないアルゴリズムになっており, より簡単なモデルを選択している。次に, 最適な変数の組合せに対応する推定パラメータを求める。

**Step 5**  $\Phi_{ii}^*$  ( $i = IX_{opt}(1) \sim IX_{opt}(k_{opt})$ ) をピボットにして Step 2 の要領で掃き出し計算を行なう。その結果,  $\Phi_{iL}^*$  に標準偏帰帰推定値が得られるので (17) 式の関係から最適な部分表現式の推定パラメータを決定する。

このとき, 行列  $\Phi^*$  の  $i$  行  $j$  列 ( $i, j = IX_{opt}(1) \sim IX_{opt}(k_{opt})$ ) の要素から成る行列は, (14) 式の行列  $\Phi^*$  の  $i$  行  $j$  列から成る行列の逆行列となっているので推定したパラメータの信頼区間<sup>7)</sup>を計算する際に利用することができる。入力変数の総数を  $l_1$  とするとき, 上記の Step 1 ~ Step 5 は  $l_1 C_m$  回繰り返され最適な部分表現式は  $l_1 C_m$  個構成される。

### 3.2 中間変数の自己選択と層の打ち切り

構成された  $l_1 C_m$  個の最適な部分表現式の中から AIC 値の小さい順に  $l_2$  個自己選択し中間変数とする。ただし, AIC 値の等しい中間変数は 1 個で代用する。ここでは, 各選択層で AIC 値の減少する中間変数を選択するため  $l_2$  は大きい程望ましい。また, 数層通過すると中間変数は出力変数に対して説明能力をもつようになり, 類似した構造の中間変数が発生するようになるのでその個数はだいに減少してくる。したがって, 変数の組合せが行なわれなくなり AIC 値が減少しなくなった場合あるいは前層と同一の中間変数が発生するようになった場合に層の積み重ねを終了する。これは, さらに層を通過させても新たな中間変数が得られないからである。システムの完全表現式は, 最終層に残った中間変数の個数だけ構成される。

以上により構成される改良形 GMDH のブロック図を Fig. 1 に示す。 Fig. 1 の構成により, モデル作成者は専門的知識を生かし, 先験的情報, 計算機の記憶容量, 計算時間及び前層の結果などを考慮して

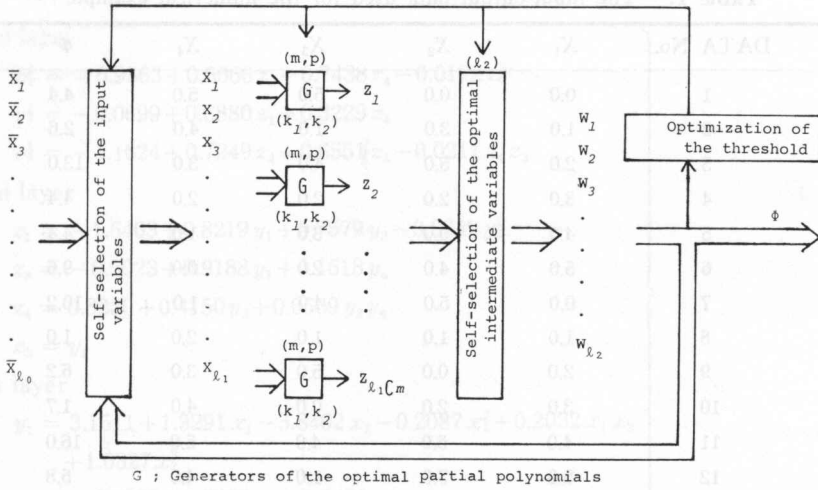


Fig. 1. Block diagram of the revised GMDH with multi-algorithm using AIC.

(i) 発生器 G への入力の対象となる変数  $x_1 \sim x_{l_1}$  を入力変数  $\bar{x}_1 \sim \bar{x}_{l_0}$  と前層の中間変数  $w_1 \sim w_{l_2}$  から選択する。

(ii) 発生器 G の  $m, p, k_1, k_2$  及び中間変数の選択個数  $l_2$  を指定する。

その結果、新たな中間変数が得られるので Fig. 1 の太線のフィードバックを通じて (i), (ii) を繰り返し行い層を積み重ねることによりモデリングの実行が可能となる。したがって、モデリングアルゴリズムはモデル作成者が上記 (i), (ii) をどのように決定するかによって自由に構成される。このような意味で、構成された改良形 GMDH はマルチアルゴリズムが可能であると言うことができる。

#### 4. 簡単な同定問題への適用

入出力関係は

$$\phi = (0.1 + 0.2x_1 + 0.3x_2 + 0.4x_3)^2 \tag{19}$$

として表わされるものとする。入力変数は  $x_1 \sim x_4$  の 4 変数とし、モデリングに用いる入力データを Table 1 に示す。まず、計算時間と与えられるデータ数を考慮して case 1 と case 2 の 2 通りのアルゴリズムでモデリングを行なう。このときモデリングに用いるデータは 1~13 番目までの 13 個とする。更に、その結果得られた予測式の評価を行なうために 14~23 番目までの 10 個の予測点のデータを用い

$$J = \left( \frac{1}{10} \sum_{i=14}^{23} \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right| \right) \times 100 (\%) \quad (\hat{y}_i; \text{予測値}) \tag{20}$$

で表わされる予測精度を評価する。次に、case 1 と case 2 のうち予測精度の良い方のアルゴリズムを適用し、データ数を増加してモデリングを行なう。まず、case 1 と case 2 の数値実験結

Table 1. The input-output data used for the numerical example

DATA No.	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$\phi$
1	0.0	0.0	5.0	5.0	4.4
2	1.0	3.0	1.0	4.0	2.6
3	2.0	5.0	4.0	3.0	13.0
4	3.0	2.0	2.0	2.0	4.4
5	4.0	0.0	3.0	1.0	4.4
6	5.0	4.0	2.0	0.0	9.6
7	0.0	5.0	4.0	1.0	10.2
8	1.0	1.0	1.0	2.0	1.0
9	2.0	0.0	5.0	3.0	6.2
10	3.0	2.0	0.0	4.0	1.7
11	4.0	5.0	4.0	5.0	16.0
12	5.0	3.0	1.0	4.0	5.8
13	0.0	0.0	3.0	3.0	1.7
14	1.0	1.0	2.0	2.0	2.0
15	2.0	5.0	3.0	1.0	10.2
16	3.0	4.0	1.0	0.0	5.3
17	4.0	0.0	4.0	1.0	6.2
18	5.0	3.0	0.0	2.0	4.0
19	0.0	5.0	5.0	3.0	13.0
20	1.0	2.0	1.0	4.0	1.7
21	2.0	0.0	4.0	5.0	4.4
22	3.0	4.0	2.0	4.0	7.3
23	4.0	5.0	3.0	3.0	13.0

The input-output relation;  $\phi = (0.1 + 0.2 X_1 + 0.3 X_2 + 0.4 X_3)^2$

果を示す。

case 1: case 1 は次のアルゴリズムに従う。

〈各層〉

部分表現式; 2 変数 2 次多項式 ( $(m, p) = (2, 2)$ ) とする。

部分表現式の変数の組合せ; 可能なすべての組合せ ( $(k_1, k_2) = (1, 5)$ ) とする。

中間変数; AIC 値の小さい変数を 5 個 ( $l_2 = 5$ ) 選択する。

次層への入力変数; 前層の中間変数のみをすべて ( $l_1 = 5$ ) 選択する。ただし, 1 層目はもとの入力変数 4 個 ( $l_1 = 4$ ) を選択する。

○ 同定された予測式

計算は 5 層まで行ない最終層に残った中間変数は 3 個 ( $v_1, v_2, v_3$ ) である。



予測式;

3-rd layer

$$\begin{aligned} v_1^3 &= -0.9363 + 0.5666 z_3 + 0.7438 z_4 - 0.0172 z_4^2 \\ v_2^3 &= -0.0699 + 0.6880 z_1 + 0.3229 z_4 \\ v_3^3 &= -1.1624 + 0.7249 z_4 + 0.6551 z_5 - 0.0211 z_4 z_5 \end{aligned}$$

2-nd layer

$$\begin{aligned} z_1 &= -1.6403 + 0.8219 y_1 + 0.7579 y_2 - 0.0349 y_2^2 \\ z_3 &= -0.5023 + 0.9188 y_1 + 0.1618 y_4 \\ z_4 &= 0.8250 + 0.4150 y_2 + 0.0609 y_2 y_4 \\ z_5 &= y_1 \end{aligned}$$

1-st layer

$$\begin{aligned} y_1 &= 3.1511 + 1.3291 x_1 - 3.8402 x_2 - 0.2087 x_1^2 + 0.2032 x_1 x_2 \\ &\quad + 1.0327 x_2^2 \\ y_2 &= -2.1225 + 1.8169 x_2 + 1.5450 x_3 \\ y_4 &= 1.2218 + 0.9514 x_3 + 0.4611 x_1 x_3 \end{aligned}$$

(21)

○計算時間

約 4 M 48 S (NOVA 3/12, RDOS, 32 kW)

○(20) 式の予測精度

$$\left. \begin{aligned} J_{v_1^3} &= 15.34 (\%) \\ J_{v_2^3} &= 16.13 (\%) \\ J_{v_3^3} &= 15.10 (\%) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

case 2: case 2 は次のアルゴリズムに従う。

〈1層〉

部分表現式; 3変数 2次多項式  $((m, p)=(3, 2))$  とする。

部分表現式の変数の組合せ; 可能なすべての組合せ  $((k_1, k_2)=(1, 9))$  とする。

中間変数; AIC 値の小さい変数を 4 個  $(l_2=4)$  選択する。

層への入力変数; もとの入力変数 4 個  $(l_1=4)$  を選択する。

〈2層以降〉

部分表現式; 2変数 2次多項式  $((m, p)=(2, 2))$  とする。

部分表現式の変数の組合せ; 可能なすべての組合せ  $((k_1, k_2)=(1, 5))$  とする。

中間変数; AIC 値の小さい変数を 4 個  $(l_2=4)$  選択する。

次層への入力変数; もとの入力変数 4 個と前層の中間変数 4 個のうち AIC 値を考慮して 1 個以上  $(l_1 \geq 5)$  を選択する。

○同定された予測式

計算は 4 層まで行ない最終層に残った中間変数は 3 個  $(v_1^3, v_2^3, v_3^3)$  である。

予 測 式;

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{3-rd layer} \\
 v_1^2 = 0.0036 + 0.9976 z_1 + 0.0013 x_2^2 \\
 v_2^2 = z_1 \\
 v_3^2 = z_2 \\
 \text{2-nd layer} \\
 z_1 = -0.0160 + 1.0038 y_1 + 0.0012 x_4 y_1 - 0.0005 y_1^2 \\
 z_2 = y_1 \\
 \text{1-st layer} \\
 y_1 = -0.0112 + 0.0969 x_1 + 0.1179 x_3 + 0.0292 x_1^2 + 0.1245 x_1 x_2 \\
 \quad + 0.1521 x_1 x_3 + 0.1082 x_2^2 + 0.2307 x_2 x_3 + 0.1522 x_3^2
 \end{array} \right\} \quad (23)$$

○ 計 算 時 間

約 11 M 11 S

○ (20) 式 の 予 測 精 度

$$\left. \begin{array}{l}
 J_{v_1^2}^2 = 1.23 (\%) \\
 J_{v_2^2}^2 = 1.21 (\%) \\
 J_{v_3^2}^2 = 1.12 (\%)
 \end{array} \right\} \quad (24)$$

case 1 も case 2 もそれぞれ得られた 3 個の予測式の予測精度には、大きな差がなく同程度と解釈できる。しかも予測精度はいずれの場合も満足のいく結果が得られていると思われる。したがって、それぞれの場合において予測精度の良さを最終的なモデル選択の判断基準にすることはできないが、構造の最も簡単な予測式を最終的なものとして選択することにすれば明らかに case 1 の場合は (21) 式から  $v_1^2(x_1, x_2, x_3, x_1^2, x_1 x_2, x_1 x_3, x_2^2, x_2 x_3, x_3^2, x_1 x_2 x_3, x_1 x_3^2$ : アンダーラインを付した変数は (19) 式の真のモデルに含まれる変数を表わしている。), case 2 の場合は (23) 式から  $v_3^2(x_1, x_3, x_1^2, x_1 x_2, x_1 x_3, x_2^2, x_2 x_3, x_3^2)$  となり、モデリングに用いたデータ数が少ないわりにはどちらもかなり真のモデルの構造をとらえていることがわかる。しかし、case 1 と case 2 を比較した場合、case 2 は予測精度が非常に改善されており、予測式  $v_3^2$  の構造は簡単で真のモデルにほとんど一致している。予測式  $v_3^2$  は文献 [3], [9] で得られている結果よりも良い。したがって次に、case 2 のアルゴリズムを適用して、モデリングに用いるデータを 1~23 番目までの 23 個に増加してモデリングを行なった数値実験結果を case 3 に示す。

**case 3:** case 3 は case 2 のアルゴリズムに従う。

○ 同定された予測式

計算は 3 層まで行ない最終層に残った中間変数は 2 個 ( $z_1, z_2$ ) である。

予 測 式;

2-nd layer

$$z_1 = -0.0120 + y_1 + 0.0043 x_4$$

$$z_2 = y_1$$

1-st layer

$$y_1 = 0.0362 + 0.0400 x_1 + 0.0581 x_2 + 0.0773 x_3 + 0.0392 x_1^2$$

$$(0.01) \quad (0.04) \quad (0.06) \quad (0.08) \quad (0.04)$$

$$+ 0.1233 x_1 x_2 + 0.158 x_1 x_3 + 0.0860 x_2^2 + 0.245 x_2 x_3 + 0.1591 x_3^2$$

$$(0.12) \quad (0.16) \quad (0.09) \quad (0.24) \quad (0.16)$$

(25)

ここで、カッコで示した数値は (19) 式の真のモデルの係数である。

○計算時間

約 10 M 6 S

予測式  $z_1$  は、変数  $x_4$  の係数が非常に小さくほとんど予測式  $z_2$  に等しい。予測式  $z_2$  は (19) 式の真のモデルのすべての変数を含みかつそれらの係数はほとんど一致しており、モデリングに用いるデータ数が多い程良い結果が得られることがわかる。

## 5. 結 言

本稿では、部分表現式に各選択層で任意に指定可能な多変数の多項式を用い、最適な部分表現式を発生させる改良形 GMDH の構成を実用的観点から具体的に示した。その結果、モデル作成者の意志により自由にモデリングアルゴリズムを構成することが可能となった。本手法は、田村らが提案している改良形 GMDH のアルゴリズム<sup>5)</sup>も行なうことができ、田村らの方法の拡張となっている。次に、提案した改良形 GMDH から構成されるアルゴリズムの中の 2 通りを例題に適用し、それぞれの結果の有効性を示すとともに、システムの複雑さに応じて、計算時間、計算機の記憶容量の許される範囲で多変数の多項式からなる部分表現式を用いたほうが少ない通過層でより良い結果が得られ、その際モデリングに用いられるデータ数が多い程良い結果が得られることを確認した。終わりに、本論文作成にあたり御助言くださいました本学吉田公策助教授に深く感謝の意を表します。

## 参 考 文 献

- 1) 池田・井原： GMDH (変数組合せ計算法) の基礎と応用 I~VII, システムと制御, Vol. 23, No. 12~ Vol. 24, No. 6 (1979~1980).
- 2) 池田・樫木： GMDH (発見的自己組織化法) と複雑な系の同定・予測, 計測と制御, Vol. 14, No. 2, p. 185-195 (1975).
- 3) 田村・近藤： モデル選択の評価規準に予測平方和 (PSS) を用いる改良形 GMDH, 計測自動制御学会論文集, Vol. 14, No. 5, p. 519-524 (1978).
- 4) 近藤・田村： 情報量規準 AIC を用いて中間表現式を自己選択する改良形 GMDH, 計測自動制御学会論文集, Vol. 15, No. 4, p. 466-471 (1979).
- 5) 田村・近藤： 改良形 GMDH による大気汚染のモデリングと短期予測, 計測自動制御学会論文集, Vol.

