

## 有限要素法によるマイクロストリップ 線路の不連続部の解析\*

林 幸 成\*\*

野原美輝裕\*\*\*

北 沢 敏 秀\*\*

林 義 男\*\*

(昭和56年4月30日受理)

### Finite Element Analysis of Microstrip Line Discontinuities

by Yukinari HAYASHI, Mikihiro NOHARA, Toshihide KITAZAWA  
and Yoshio HAYASHI

The frequency dependent scattering matrix of microstrip corner bends is calculated by applying the higher-order Finite Element Method to a parallel plate model of the microstrip line. The computed results utilizing the higher-order interpolation polynomials are in good agreement with other available data. This approach can be readily extended to order structures.

#### 1. ま え が き

有限要素法は、大型計算機の発達に伴い汎用性が広がり、特に、構造力学において輝かしい成果をあげた。その後、電磁界問題にも応用され導波管、表面弾性波、光導波路などの解析に成果が見られる<sup>1,2)</sup>。この方法は、微分方程式の支配する連続媒体中を有限な要素に分割し、マトリクス計算によって解を求める方法である。有限要素法は、界分布を多項式で近似する仮定のもとに、連続媒体中を有限な三角形要素に分割し、その離散化の過程で変分法を適用するものである。

Silvester<sup>3)</sup>, McDonald<sup>4)</sup>らは、マイクロ波問題を対象としたヘルムホルツ方程式の有限要素解析プログラムの開発を行い、有限要素法と解析解を併用する方法を提案した。

本論文では、この方法を用いてマイクロストリップ線路の不連続問題を取り扱ったものである。ここでは、有限要素法による解と解析解を結合する際に、境界を高次の形状関数で補間

\* 電気四学会北海道支部連合大会にて一部発表 (1980. 9. 札幌)

\*\* 北見工業大学電子工学科

\*\*\* 東亜特殊電機 K.K.

することにより、分割する要素数をふやすことなく高精度の解を求める方法を提案している。本解析法は、複雑な形状を有する領域では有限要素法を適用し、その他の領域では解析解を用い境界面で界の連続性を適用する方法であるので、種々の不連続問題に適用可能である。ここでは、バンドについて反射係数と透過係数の定式化を行い、若干の数値例を示している。

### 2. 解析理論

マイクロストリップ線路を伝搬するモードは、準 TEM 波であるが、周波数が高くなると図 1 に示すように電界と磁界が誘電体基板上に表面波を励起し、伝搬方向に電界及び、磁界成分を持つハイブリッドモードとなる。図 1 (a) に示したマイクロストリップは、図 1 (b) に示されるように、誘電率  $\epsilon$  で装荷された線路は、実効誘電率  $\epsilon_{eff}$  なる誘電体で満たされた等価幅  $W$ 、高さ  $h$  の平行平板線路の TEM モードと一致する。以下、平行平板線路に置き換えて解析を行なう。図 2 に解析モデルの座標系を示す。図 2 において、 $x=0, h$  は電気壁、 $y=0, w$  を磁気壁と置くと、平行平板線路の  $\mathbf{TM}^{(x)}$  モードは  $\mathbf{H}_x = 0$  なるモードであるから、マックスウェルの方程式から  $\mathbf{TM}_{00}^{(x)}$  モードは：

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x &= -j\omega\mu e^{-jkz} \\ \mathbf{H}_x &= -j\beta e^{-jkz} \\ \mathbf{E}_y = \mathbf{E}_z = \mathbf{H}_y = \mathbf{H}_z &= 0 \\ k &= \omega\sqrt{\epsilon\mu} \end{aligned} \quad (1)$$

で与えられ、TEM モードである。また、線路の不連続部より発生する高次モードは  $\mathbf{TM}_{on}$  モードであり、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x &= -j\omega\mu \cos\left(\frac{n\pi y}{W}\right) e^{-jkz} \\ \mathbf{H}_y &= -j\beta \cos\left(\frac{n\pi y}{W}\right) e^{-jkz} \\ \beta &= \sqrt{k^2 - (n\pi/W)^2} \end{aligned} \quad (2)$$

平行平板線路の不連続部の解析例として、図 3 に示す解析モデルについて考える。以下、解析の便宜上、電界に比例するスカラ関数を導入して入射電界  $\mathbf{E}_x^{(i)}$  を

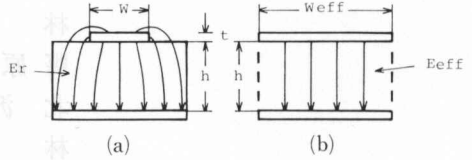


図 1 (a) マイクロストリップ線路の断面 (b) 平行平板線路の断面

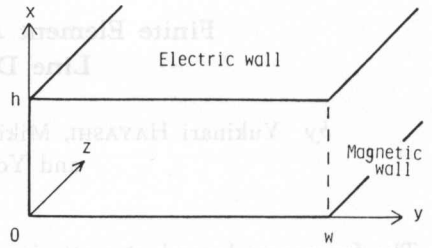


図 2 解析モデルの座標系

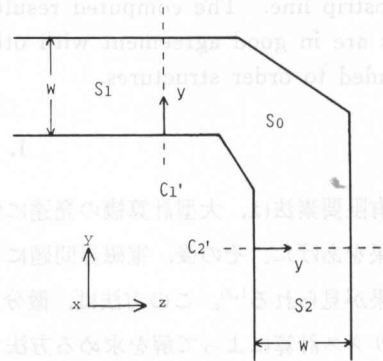


図 3 解析モデル

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x^{(i)} &= -j\omega\mu_0\psi^{(i)} \\ \psi^{(i)} &= e^{-jkz} \\ k &= \omega\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_{eff}\mu_0} \end{aligned} \quad (3)$$

とおき、不連続部で発生する電界を次式で表示する。

$$\mathbf{E}_x = -j\omega\mu_0\psi \quad (4)$$

図3において、境界面  $c'_1$ ,  $c'_2$  により不連続部分を含む閉領域  $S_0$  と、その他の開領域を  $S_1$ ,  $S_2$  とに分割する。領域  $S_0$  内では有限要素法を適用し、領域  $S_1$ ,  $S_2$  ではグリーン関数による解析解を用いる。全体の汎関数  $\mathbf{J}(\psi)$  は、内部領域  $S_0$  と外部領域  $S_1$ ,  $S_2$  の和として表わすことができる。

$$\mathbf{J}(\psi) = J_I + J_{1E} + J_{2E} \quad (5)$$

内部領域  $S_0$  の  $J_I$  は次式で与えられる。

$$J_I(\psi) = \int_{S_0} \left[ |\nabla t\psi|^2 - k^2|\psi|^2 \right] ds \quad (6)$$

$S_0$  内を  $N_0$  個の三角形要素に分割すると

$$J_I = \sum_{n=1}^{N_0} \int_{s_n} \left[ |\nabla t\psi_n|^2 - k^2|\psi|^2 \right] ds_n \quad (7)$$

ここで、形状関数  $\alpha_i(y, z)$  を導入し次式を仮定する。

$$\psi^{(n)}(y, z) = \sum_{i=1}^{I_0} \alpha_i^{(n)}(y, z) \phi_i^{(n)} \quad (8)$$

式(8)を式(7)に代入すると次式を得る。

$$J_I = \sum_{n=1}^{N_0} \left[ \sum_{i=1}^{I_0} \sum_{i'=1}^{I_0} (S_{ii'}^{(n)} - k^2 T_{ii'}^{(n)}) \phi_i^{(n)*} \phi_{i'}^{(n)} \right]$$

ここで

$$S_{ii'} = \iint_{s_n} \nabla t\alpha_i^{(n)} \nabla t\alpha_{i'}^{(n)} dy dz \quad (9)$$

$$T_{ii'} = \iint_{s_n} \alpha_i^{(n)} \alpha_{i'}^{(n)} dy dz$$

\*: 複素共役

外部領域  $S_1$ ,  $S_2$  の汎関数  $J_{lE}$  は、式(6)と同様に与えられ展開すると次式を得る。

$$J_{lE} = \int_{S_l} \left[ \nabla t\psi \nabla t^* + \psi^* \nabla t^2 \psi \right] ds \quad l = 1, 2 \quad (10)$$

式(10)にグリーン関数の第1恒等式を適用し、 $\psi$  がヘルムホルツ方程式を満足することに留意すると次式を得る。

$$J_{lE} = \oint_C \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial n} dC_l \quad (11)$$

ここで、 $n$  は境界面での外向きの法線ベクトルである。壁面は完全磁気壁であるから

$$J_{lE} = \int_0^W \phi^*(y, 0) \frac{\partial \phi(y, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} \quad (12)$$

となる。ここで境界面上の形状関数  $\beta_i$  を導入する。 $\beta_i(y) = \alpha_i(y, z)|_{z=0}$  なる条件を満たすように  $\beta_i$  を次式のようにおく。

$$\begin{aligned} \beta_{ij} &= P_i(\xi_1) P_j(\xi_2) \\ P_i(\xi) &= \prod_{l=1}^i \left( \frac{N\xi - l + 1}{l} \right) \quad i+j = N \end{aligned} \quad (13)$$

この形状関数を用いて、 $\phi^{(n)}|_{z=0}$  及び、 $\partial \phi^{(n)} / \partial z|_{z=0} = \Phi$  を次のように表わす。

$$\begin{aligned} \phi^{(n)}|_{z=0} &= \sum_{i=1}^{I_0} \beta_i^{(n)} \phi_i^{(n)} \\ \frac{\partial \phi^{(n)}}{\partial z} \Big|_{z=0} &= \sum_{i=1}^{I_0} \beta_i^{(n)} \Phi_i^{(n)} \quad n = n_1, n_2 \end{aligned} \quad (14)$$

式(14)を式(12)に代入すると外部領域の汎関数、 $J_{1E}$ 、 $J_{2E}$  が次のように求まる。

$$J_{lE} = \sum_n \left[ \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{i'=1}^{N+1} U_{ii'}^{(n)} \phi_i^{(n)*} \Phi_{i'}^{(n)} \right] \quad l = 1, 2$$

ただし

$$U_{ii'}^{(n)} = \int_{C_n} \beta_i^{(n)} \beta_{i'}^{(n)} dy \quad n = n_1, n_2$$

境界面の電界  $\mathbf{E}$  は、境界  $C'$  上に完全導体を置くとイメージ理論より、その導体を取り去って  $2Ms$  の磁流を置くのと等価である<sup>5)</sup>。また、境界面 ( $z=0$ ) に沿って単位長の矩形断面をとりストークスの定理を適用すると、電界  $\mathbf{E}$  は次のように求まる。

$$\mathbf{E}_l = \int_{C_l} G(y|y') \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} dy$$

ここで

$$\begin{aligned} G(y|y') &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta_n}{jW\beta_n} \cos\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \cos\left(\frac{n\pi y'}{W}\right) \\ \eta_n &= \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 2 & n \geq 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

式(16)を外部境界上の補関数で近似すると

$$\sum_i \beta_i^{(n)}(y) \phi_i^{(n)} = \sum_n \int_{C_n} G(y|y') \sum_i \beta_i^{(n)}(y) \Phi_i^{(n)} dy' \quad (17)$$

を得る。式(5)から式(17)までの諸式を離散化し、これを行列表示すると次式を得る。

$$[\mathbf{T}_l] [\phi_l] = [\mathbf{Z}_l] [\phi_l] \quad (18)$$

よって

$$[\Phi_l] = [\mathbf{Z}_l]^{-1} [\mathbf{T}_l] [\phi_l] \quad l = 1, 2 \quad (19)$$

ここで、変分原理により汎関数を最小化する条件：

$$\frac{\partial J}{\partial \psi_{im}} = 0 \quad (i = 0, 1, 2)$$

を導入する。式(19)を式(5)に代入し行列表示すると次式を得る。

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{Y}_{00}] & [\mathbf{Y}_{01}] & & [\mathbf{Y}_{02}] \\ [\mathbf{Y}_{10}] & [\mathbf{Y}_{11}] + [\mathbf{T}_1] [\mathbf{Z}]^{-1} [\mathbf{T}] & & [\mathbf{Y}_{12}] \\ & & & \\ [\mathbf{Y}_{20}] & [\mathbf{Y}_{21}] & & [\mathbf{Y}_{22}] + [\mathbf{T}_2] [\mathbf{Z}_2]^{-1} [\mathbf{T}_2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\psi_0] \\ [\psi_1] \\ \\ [\psi_2] \end{bmatrix} = 0 \quad (20)$$

ここでは  $c'_1$  上に金属壁を仮定しているので、入射磁界と反射磁界が重畳され  $c'_1$  上の磁界は、式(19)で与えられる壁面磁流によって生じる磁界に入射磁界の2倍が重畳される。従って式(20)に代入し整理すると次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{Y}_{00}] & [\mathbf{Y}_{01}] & & [\mathbf{Y}_{02}] \\ [\mathbf{Y}_{10}] & [\mathbf{Y}_{11}] + [\mathbf{T}_1] [\mathbf{Z}]^{-1} [\mathbf{T}] & & [\mathbf{Y}_{12}] \\ & & & \\ [\mathbf{Y}_{20}] & [\mathbf{Y}_{21}] & & [\mathbf{Y}_{22}] + [\mathbf{T}_2] [\mathbf{Z}_2]^{-1} [\mathbf{T}_2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \\ \psi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \mathbf{T}_1 \psi^{in} \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (21)$$

ここで、境界  $c'_1$  上の電界  $\psi_{(y)}$  は入射波  $\psi_{(y)}^{(i)}$ 、反射波  $\psi_{(y)}^{(r)}$  及び、高次モード  $\psi_{(y)}^{(0)}$  の和である。

$$\psi_{(y)} = \psi_{(y)}^{(i)} + \psi_{(y)}^{(r)} + \psi_{(y)}^{(0)} \quad (22)$$

$c'_1$  上は完全導体であるから、 $\psi_{(y)}^{(r)} = -\psi_{(y)}^{(i)}$  であり、式は(22)  $\psi_{(y)} = \psi_{(y)}^{(0)}$  となり  $\psi_{(y)}^{(0)}$  は式(16)の最初の項で与えられるから次式を得る。

$$\psi_{(y)}^{(0)} = \iint G_0(y, z|y', z') dy' dz'$$

ただし

$$G_0(y, z|y', z') = \frac{1}{jW\beta_0} e^{j\beta(z-z')} \quad (23)$$

ここで、入射電界を単位振幅にとり  $z'$  について部分積分すると、反射係数  $R$  は次式で与えられることがわかる。

$$R = -1 - \frac{1}{W} \int_0^W \psi_1 dy' \quad (25)$$

式(14)を式(24)に代入し、透過係数も同様にして求め行列表示すると次式を得る。

$$\begin{aligned} R &= -1 - \frac{1}{W} [\psi_1]^T [\mathbf{B}_1] \\ T &= -\frac{1}{W} [\psi_2]^T [\mathbf{B}_2] \end{aligned} \quad (25)$$

反射係数と透過係数が式(25)によって定式化された。ここでは境界面  $c'_1$  上で反射係数、 $c'_2$  上で透過係数を、それぞれ独立に算出している。

### 3. 数値計算

ここでは有限要素法による不連続部の解析例として、直角ベント、任意に折れ曲った線路、及び、コーナの切り落しの影響について、反射係数と透過係数の数値計算を示している。最初に、本解析において使用した有限要素法の計算精度について評価をする。評価の例として、真直なマイクロストリップ線路を用いる。要素分割数は1次形から3次形まで、すべて同じで6個である。次数を1次から3次まで変化させた結果を表1に示す。この場合、正確な値は $R=0$ 、 $T=1$ であるので表1からわかるように高次の方が精度が増すことがわかる。また、1次形で要素分割数を多くとる方法もあるが、経験上、前者の方がすぐれているので、以下、すべて3次形で計算を行なう<sup>6)</sup>。

図4に直角ベントの計算結果を示す。この時の分割数は10個で節点数は64である。ここでは図1に示すように、等価幅 $W$ と実効誘電率 $\epsilon_{eff}$ の値は周波数依存性を考慮して求めている<sup>7,8)</sup>。直角コーナーに関しては、N. Marcuvitz<sup>9)</sup>により等価回路が示されているので、それと

表1 次数による固有値の変化と比較

| 次数<br>$f(\text{GHz})$ | 反 射 係 数 $ R $           |                       |                       | $ R ^2+ T ^2=1$ との差   |                       |                       |
|-----------------------|-------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
|                       | 1 N (8)                 | 2 N (21)              | 3 N (40)              | 1 N (8)               | 2 N (21)              | 3 N (40)              |
| 8                     | $0.3176 \times 10^{-2}$ | $0.43 \times 10^{-5}$ | $0.13 \times 10^{-6}$ | $0.22 \times 10^{-7}$ | $0.24 \times 10^{-7}$ | $0.50 \times 10^{-7}$ |
| 16                    | $0.1548 \times 10^{-1}$ | $0.81 \times 10^{-4}$ | $0.32 \times 10^{-6}$ | $0.32 \times 10^{-7}$ | $0.24 \times 10^{-7}$ | $0.20 \times 10^{-7}$ |
| 32                    | $0.1930 \times 10^{-1}$ | $0.91 \times 10^{-3}$ | $0.96 \times 10^{-5}$ | $0.17 \times 10^{-7}$ | $0.37 \times 10^{-7}$ | $0.20 \times 10^{-7}$ |

( ) は節点数

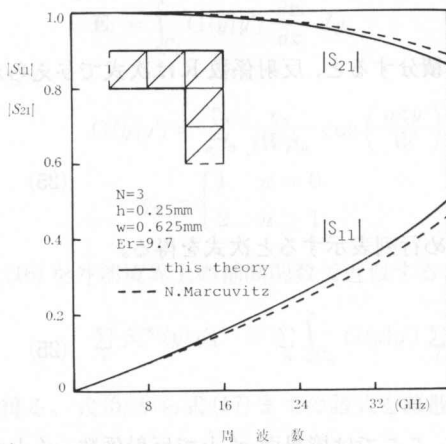


図4 直角ベントの反射係数と透過係数の計算結果

- a) 反射係数  $|S_{11}|$
- b) 透過係数  $|S_{21}|$

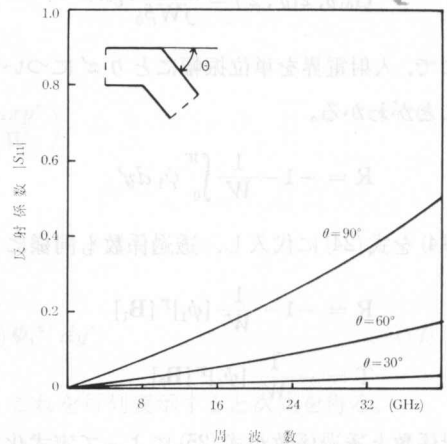


図5 コーナの角度を変えたときの反射係数の変化

比較参照した。なお、計算は次式による。

$$(S) = \left[ \frac{(Z)}{Z_0} + (I) \right]^{-1} \left[ \frac{(Z)}{Z_0} - (I) \right] \quad (26)$$

図4より、N. Marcuvitz の理論と良く一致し、また、文献(10)の結果とも合致している。なお、等価幅と実効誘電率の値に周波数依存性を考慮しない場合は、非常に良く一致していることを確認している。しかし、文献(7)のベントの数値例については、かなりの相違が見られた。図5に線路の折れ曲りによる反射係数の影響について示している。図5よりコーナの折れ曲り度角が大きくなるに従って、反射係数が大きくなる当然な結果があらわれている。図6にコーナを切り落したときの効果について示している。図6からも明らかなように  $c=1.0$  付近にしたときに反射係数が最小となり広帯域に整合がとれることがわかる。コーナの不連続部の解析として若干の数値例を示した。

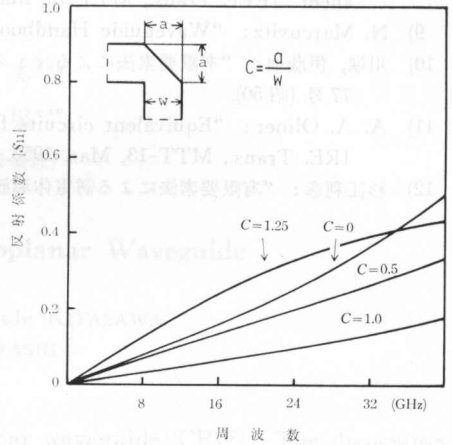


図6 コーナを切り落したときの反射係数の変化

#### 4. あとがき

マイクロストリップ線路の不連続部の解析として、直角ベント、及び、コーナの種々の不連続部の数値計算例を示した。直角ベントの数値例は、N. Marcuvitz と比較し本解析法の妥当性を示した。また、本解析法は、等価幅、実効誘電率の周波数依存性を考慮している。ここでは境界面での補間関数に界の連続性を持たせているので、少ない分割数で計算精度を向上させることが可能である。本計算では3次形を用いたが、十分な精度が得られている。有限要素法は複雑な形状の数値解析について、特に有効である。本理論は、T分岐、方形導波管にそのまま適用可能である。なお、数値計算は北海道大学大型計算機センターを使用した。

#### 文 献

- 1) P. Silvester: "High-order polynomial triangular finite element for potential problems" Int. J. Eng. Sci. 7, Aug. 1969.
- 2) P. Daly: "Hybrid-model analysis of microstrip by finite element methods" IEEE Trans., MTT-19, Jan. 1971.
- 3) P. Silvester et al: "Finite-element solution of 2-dimensional exterior field problems" Proc. IEEE, Dec. 1971.
- 4) B. H. McDonald et al: "Finite-element solution of unbounded field problems" IEEE Trans., MTT-20, Dec. 1972.
- 5) 小西良弘: 電磁波回路, オーム社.
- 6) 小柴, 鈴木: "異方性方形断面弾性波導波路の伝搬特性", 電子通信学会論文誌, Vol. J 59-B, No. 11,

1976.

- 7) R. Mehran: "The frequency-dependent scattering matrix of microstrip right-angle bends, T-junctions and crossings" AEU, Band 29 Heft II, 1975.
- 8) H. A. Wheeler: "Transmission-line properties of parallel strip separated by a dielectric sheet" IEEE Trans., MTT-13, Mar. 1965.
- 9) N. Marcuvitz: "Waveguide Handbook" McGraw-Hill, N. Y. (1951).
- 10) 川端, 伊藤他: "有限要素法によるマイクロ波平面回路の計算機解析", 北海道大学工学部研究報告第77号(昭50).
- 11) A. A. Oliner: "Equivalent circuits for discontinuities in balanced strip transmission line" IRE. Trans., MTT-13, Mar. 1955.
- 12) 杉江利彦: "有限要素法による誘電体導波路の解析", 北海道大学工学部電子工学科修士論文(昭54).



図 10. 誘電体導波路の伝達係数の計算結果を示す。この図は、異なる幾何学的パラメータを持つ導波路の伝達係数を比較するために用いられている。横軸は周波数（GHz）を示し、縦軸は伝達係数の絶対値を示している。複数の曲線が描かれており、それぞれ異なる導波路設計に対応している。伝達係数は一般的に周波数が増えるにつれて減少する傾向を示している。

文 献

1) P. Silvester: "High-order polynomial triangular finite element for potential problems", *J. Eng. Sci.*, Aug. 1968.

2) P. Daly: "Hybrid-model analysis of microstrip by finite element methods", *IEEE Trans.*, MTT-19, Jan. 1971.

3) P. Silvester et al.: "Finite-element solution of two-dimensional exterior field problems", *Proc. IEEE*, Dec. 1975.

4) J. H. McDonald et al.: "Finite-element solution of unbounded field problems", *IEEE Trans.*, MTT-30, Dec. 1974.

5) 小川良雄: 電磁気学, 第 4 巻, 丸井出版, 1974.

6) 小川良雄: "誘電体導波路の伝達係数の計算", 北海道大学工学部研究報告第 77 号, 昭 50.