

## 円柱座標系における平面応力問題の

2, 3 の 解 に つ い て\*

奥 村 勇\*\*

(昭和55年9月26日受理)

### On Some Solutions to Plane Stress Problems in Cylindrical Coordinates

by Isamu A. OKUMURA

Problems of flexure and stress of a thick plate are of interest in view of both the theory of elasticity and the practice of engineering. It is well known that some problems of plane stress such as of circular plates, circular ring plates or circular ring sector plates with small thicknesses can be easily analyzed by using the Airy stress function for the polar coordinates. However, plane stress problems in the case of plates with large thicknesses are very complicated compared with those of plates with small thicknesses, because there is a change in the values of the components of stress and displacement, laterally along the plate.

This report presents some solutions to plane stress problems referring to a thick plate with cylindrical coordinates. As examples, solutions for the state of plane stress, generalized plane stress, and anti-symmetric plane stress to the middle plane of a plate are obtained, and are applied to problems of a thick plate stretched by forces in its plane and a thick plate bent to a state of plane stress or a state of generalized plane stress.

#### 1. 緒 言

円板、円環板あるいは扇形板の板厚が薄く、変位及び応力成分が板厚方向において一定とした場合の平面応力問題のいくつかは、極座標系における Airy の応力関数により容易に解析されることが良く知られているが、板厚が厚い場合の平面応力問題は、変位及び応力成分が板厚方向において変化すると考えられるため、薄板に比較して解析が複雑となる。直交座標系における厚板の平面応力問題は、Love<sup>1)</sup> の著書において述べられており、平面応力状態及び一般化平面応力状態に関する解が求められているが、円柱座標系における平面応力問題の解は、あまり受けられないようである。直交座標系における平面応力問題に関する解が求められてい

\* 土木学会第35回年次学術講演会にて発表 (1980年9月)

\*\* 北見工業大学土木工学科

るので、それを円柱座標系に変換して解を求める方法が考えられるが、本報告は、座標変換の手段によらずに、円柱座標系におけるつり合い方程式及び適合条件式を直接用いて、平面応力状態に関する解、一般化平面応力状態に関する解及び板の中央面に対して反対称の応力状態に関する解を求める目的とする。これらの解は、面内荷重を受けた厚板あるいは曲げを受けた厚板の解析に応用することができる。また、ひずみの適合条件式を応力成分で表わした直交座標系における Beltrami-Michell の関係式に対応した適合条件式を円柱座標系において表示することも目的の一つである。

## 2. つり合い方程式及び適合条件式

円柱座標系  $(r, \theta, z)$ において、 $r$ ,  $\theta$  及び  $z$  方向の垂直応力をそれぞれ  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$  及び  $\sigma_{zz}$  で表わし、せん断応力をそれぞれ  $\sigma_{r\theta}$ ,  $\sigma_{rz}$  及び  $\sigma_{\theta z}$  で表わすと、応力成分で表わされたつり合い方程式は次の通りである<sup>1)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + X_r &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + X_\theta &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + X_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで、 $X_r$ 、 $X_\theta$  及び  $X_z$  はそれぞれ単位体積当りの物体力を表わす。

また、 $r$ ,  $\theta$  及び  $z$  方向の垂直ひずみをそれぞれ  $e_{rr}$ ,  $e_{\theta\theta}$  及び  $e_{zz}$  で表わし、せん断ひずみをそれぞれ  $e_{r\theta}$ ,  $e_{rz}$  及び  $e_{\theta z}$  で表わすと、ひずみの適合条件式は次の通りである<sup>2)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 e_{\theta\theta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 e_{rr}}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial e_{r\theta}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial e_{rr}}{\partial r} &= 2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 e_{r\theta}}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial e_{r\theta}}{\partial \theta} \right) \\ \frac{\partial^2 e_{\theta\theta}}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial e_{zz}}{\partial r} &= 2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 e_{\theta z}}{\partial z \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial e_{zr}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 e_{rr}}{\partial z^2} &= 2 \frac{\partial^2 e_{rz}}{\partial z \partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial e_{zz}}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial e_{rz}}{\partial \theta} + \frac{\partial e_{\theta z}}{\partial r} - \frac{\partial e_{r\theta}}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{e_{\theta z}}{r} \right) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 e_{rr}}{\partial \theta \partial z} &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial e_{rz}}{\partial \theta} - \frac{\partial e_{\theta z}}{\partial r} + \frac{\partial e_{r\theta}}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{e_{\theta z}}{r} \right) + \frac{2}{r} \frac{\partial e_{r\theta}}{\partial z} \\ \frac{\partial^2 e_{\theta\theta}}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial e_{rr}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial e_{\theta\theta}}{\partial z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial e_{rz}}{\partial \theta} + \frac{\partial e_{\theta z}}{\partial r} + \frac{\partial e_{r\theta}}{\partial z} \right) \\ &\quad + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{e_{\theta z}}{r} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

二〇八

$$\left. \begin{aligned} e_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r}, \quad e_{\theta\theta} = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad e_{zz} = -\frac{\partial w}{\partial z} \\ e_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right), \quad e_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \\ e_{\theta z} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3)^{(1)}$$

ただし、式(3)における $u$ ,  $v$ 及び $w$ は、それぞれ $r$ ,  $\theta$ 及び $z$ 方向の変位成分を表わすものとする。式(3)を用いて応力成分を表わすと次の通りである。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2G \left( e_{rr} + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right), \quad \sigma_{\theta\theta} = 2G \left( e_{\theta\theta} + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right) \\ \sigma_{zz} &= 2G \left( e_{zz} + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right) \\ \sigma_{r\theta} &= 2G e_{r\theta}, \quad \sigma_{\theta z} = 2G e_{\theta z}, \quad \sigma_{rz} = 2G e_{rz} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここで、 $G$ ,  $\nu$ および $e$ はそれぞれせん断弾性係数、ポアソン比及び体積ひずみを表わし、

$$e = e_{rr} + e_{\theta\theta} + e_{zz}$$

である。式(4)をひずみ成分について解くと、ひずみ成分が応力成分によって次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} e_{rr} &= \frac{1}{E} \left\{ (1+\nu) \sigma_{rr} - \nu \Theta \right\}, \quad e_{\theta\theta} = -\frac{1}{E} \left\{ (1+\nu) \sigma_{\theta\theta} - \nu \Theta \right\} \\ e_{zz} &= \frac{1}{E} \left\{ (1+\nu) \sigma_{zz} - \nu \Theta \right\} \\ e_{r\theta} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{r\theta}, \quad e_{rz} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{rz}, \quad e_{\theta z} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{\theta z} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここで、 $E$ は綫弾性係数を表わし、 $\Theta$ は応力テンソルの不变量で

$$\Theta = \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz} \quad (6)$$

を表わす。

式(2)のひずみの適合条件式は、弾性論の書物において良く見受けられるところであるが、応力成分で表わされた適合条件式はあまり見受けられないようである。式(1)及び式(5)を用いて式(2)を応力成分で表わす作業は極めて煩雑であるが、結果のみを示すと次の通りである。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \sigma_{zz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{X_r}{r} + \frac{\partial X_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial X_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial X_z}{\partial z} \\ \nabla^2 \sigma_{rr} - \frac{4}{r^2} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{X_r}{r} + \frac{\partial X_r}{\partial r} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial X_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial X_r}{\partial r} \\ \nabla^2 \sigma_{\theta\theta} + \frac{4}{r^2} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \frac{1}{1+\nu} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} \right) & \\ = -\frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{X_r}{r} + \frac{\partial X_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial X_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \right) - 2 \left( \frac{X_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial X_\theta}{\partial \theta} \right) & \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \sigma_{r\theta} - \frac{4}{r^2} \sigma_{r\theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) \\ = - \left( -\frac{X_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial X_r}{\partial \theta} + \frac{\partial X_\theta}{\partial r} \right) \\ \nabla^2 \sigma_{\theta z} - \frac{\sigma_{\theta z}}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial \theta} + \frac{1}{1+\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta \partial z} = - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial X_z}{\partial \theta} + \frac{\partial X_\theta}{\partial z} \right) \\ \nabla^2 \sigma_{rz} - \frac{\sigma_{rz}}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r \partial z} = - \left( \frac{\partial X_z}{\partial r} + \frac{\partial X_r}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

ここで、

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

式(7)の最初の三つの式の両辺を相加えると、次式が得られる。

$$\nabla^2 \Theta = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \operatorname{div} \mathbf{X} = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \left( \frac{X_r}{r} + \frac{\partial X_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial X_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \right) \quad (8)$$

ここで

$$\mathbf{X} = [X_r, X_\theta, X_z]$$

上式より、 $X_r = X_\theta = X_z = 0$  かあるいは  $\operatorname{div} \mathbf{X} = 0$  であるならば、式(8)の右辺は 0 となるので

$$\nabla^2 \Theta = 0 \quad (9)$$

が得られる。すなわち、物体力が存在しない場合あるいは物体力の発散が消失する場合には、 $\Theta$  は 3 次元的調和関数となる。

### 3. 平面応力状態に関する解

物体力がない場合を考え、次の条件

$$\sigma_{zz} = 0, \quad \sigma_{rz} = 0, \quad \sigma_{\theta z} = 0 \quad (10)$$

を設けると、式(1)の最後の式は満足される。式(7)の最初の式及び最後の二つの式より次式が得られる。

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right) = 0 \quad (11)$$

上の三つの式が同時に成立するためには、 $\partial \Theta / \partial z = \beta$  (定数) とならねばならないので

$$\Theta = \Theta_0 + \beta z \quad (12)$$

が得られる。ただし、 $\Theta_0$  は  $r$  及び  $\theta$  の関数とする。上式の両辺に  $\nabla^2$  を作用させると次式が得られる。

$$\nabla^2 \Theta = \nabla^2 \Theta_0 \quad (13)$$

ここで

$$\nabla_1^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

物体力が存在しない場合を考えているので、式(9)より、式(13)の左辺は0となるので

$$\nabla_1^2 \Theta_0 = 0 \quad (14)$$

を得る。上式は、 $\Theta_0$ が平面調和関数にならねばならないことを示している。 $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$ 及び $\sigma_{r\theta}$ を応力関数により

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2}, \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right) \quad (15)$$

と表わすと、上式は、式(10)の条件の下で、式(1)の最初の二つの式を満足する。上式中の最初の二つの式の両辺を相加えて、式(10)の条件を考慮し、式(6)及び式(12)を用いると次式が得られる。

$$\Theta = \Theta_0 + \beta z = \nabla_1^2 \chi \quad (16)$$

式(15)を式(7)の第2式、第3式及び第4式に代入し

$$\nabla_1^2 \chi = \nabla_1^2 \chi + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} = \Theta_0 + \beta z + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2}$$

及び $\beta$ が定数であることを考慮すると

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + \frac{\nu}{1+\nu} \Theta_0 \right) &= 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + \frac{\nu}{1+\nu} \Theta_0 \right) = 0 \\ -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + \frac{\nu}{1+\nu} \Theta_0 \right) &= 0 \end{aligned}$$

が得られる。上の三つの式が同時に成立するためには

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + \frac{\nu}{1+\nu} \Theta_0 = \text{定数}$$

となることが必要であり、いま、右辺の定数を0と置き、 $z$ に関して2回積分すると

$$\chi = \chi_0 + \chi_1 z - \frac{\nu}{2(1+\nu)} \Theta_0 z^2 \quad (17)$$

が得られる。ただし、 $\chi_0$ 及び $\chi_1$ は $r$ 及び $\theta$ の関数とする。上式の両辺に $\nabla_1^2$ を作用させ、式(14)及び式(16)を用いると

$$\nabla_1^2 \chi_0 = \Theta_0, \quad \nabla_1^2 \chi_1 = \beta \quad (18)$$

が得られる。上式の最初の式は、 $\Theta_0$ が平面調和関数であるので、 $\chi_0$ が平面重調和関数にならねばならないことを示している。式(17)において、 $\chi$ として $\chi_0$ の項のみを取り出せば $\chi$ は薄板の平面応力問題におけるAiryの応力関数に一致する。

したがって、式(14), (17)及び式(18)の関数の下で、式(1)のつり合い方程式及び式(7)の適合条件式を満足する平面応力状態の応力成分が式(15)において求められたことになる。次に、

変位成分  $u$ ,  $v$  及び  $w$  を求めることについて簡単に示す。

次のような共役関数  $\xi$  及び  $\eta$  を導入する。

$$(1) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\eta}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\xi}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \int \Theta_0 dr \right), \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\xi}{r} \right) = - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\eta}{r} \right) \quad (19)$$

上式より次の関係が得られる。

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} = - \frac{\xi}{r} + \frac{\partial \xi}{\partial r}, \quad \xi = \int \Theta_0 dr, \quad \frac{\partial \xi}{\partial r} = \Theta_0 \quad (20)$$

式(3)の最初の式、式(6)及び式(10)を用いて、式(5)の最初の式を書き直すと次式が得られる。

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{E} \left\{ -(1+\nu) \sigma_{\theta\theta} + \Theta_0 \right\}$$

上式に式(12)及び式(15)の第2式を代入すると次式が得られる。

$$(21) \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{E} \left\{ -(1+\nu) \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \Theta_0 + \beta z \right\}$$

上式を  $r$  に関して積分して、 $\theta$  及び  $z$  の任意関数を除外し、式(17)及び式(20)の第2式を用いると、変位成分  $u$  は次のように求められる。

$$u = \frac{1}{E} \left( \xi + \beta r z + \frac{\nu}{2} z^2 \frac{\partial \Theta_0}{\partial r} \right) - \frac{1+\nu}{E} \frac{\partial}{\partial r} (\chi_0 + \chi_1 z) \quad (21)$$

式(3)の第2式、式(6)及び式(10)を用いて、式(5)の第2式を書き直すと次式が得られる。

$$\frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{1}{E} \left\{ -(1+\nu) \sigma_{rr} + \Theta_0 \right\}$$

上式を式(12)、式(15)の最初の式及び式(21)を用いて書き直すと次式となる。

$$\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{1}{E} \left\{ -(1+\nu) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} - \frac{\xi}{r} + \Theta_0 \right\}$$

上式を  $\theta$  に関して積分して、 $r$  及び  $z$  の任意関数を除外し、式(20)より得られる

$$\int \left( \Theta_0 - \frac{\xi}{r} \right) d\theta = \int \left( \frac{\partial \xi}{\partial r} - \frac{\xi}{r} \right) d\theta = \frac{\eta}{r}$$

の関係と式(17)を用いると、変位成分  $v$  は次のように求められる。

$$v = \frac{1}{E} \left( \eta + \frac{\nu}{2} z^2 \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta_0}{\partial \theta} \right) - \frac{1+\nu}{E} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\chi_0 + z \chi_1) \quad (22)$$

式(3)の第3式、式(6)及び式(10)を用いて、式(5)の第3式を書き直すと次式が得られる。

$$\frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{\nu}{E} \Theta = - \frac{\nu}{E} (\Theta_0 + \beta z)$$

上式を  $z$  に関して積分すると次式となる。

$$w = - \frac{\nu}{E} \left( z \Theta_0 + \frac{1}{2} \beta z^2 \right) + f_1(r) + f_2(\theta) + f_3(r, \theta) \quad (23)$$

式(3)及び式(5)のそれぞれ最後から第2式、式(21)及び式(23)を用いて、式(10)の条件を考慮すると次式が得られる。

$$\frac{\beta r}{E} - \frac{1+\nu}{E} \frac{\partial \chi_1}{\partial r} + \frac{df_1}{dr} + \frac{\partial f_3}{\partial r} = 0$$

上式が成立するためには

$$f_1(r) = -\frac{\beta r^2}{2E}, \quad f_3(r, \theta) = \frac{1+\nu}{E} \chi_1$$

となることが必要である。これを式(23)に代入すると

$$w = -\frac{1}{E} \left\{ \frac{\beta}{2} r^2 + \frac{\nu}{2} \beta z^2 + \nu z \Theta_0 \right\} + \frac{1+\nu}{E} \chi_1 + f_2(\theta)$$

が得られる。上式中の  $f_2(\theta)$  は未定義であるが、式(3)及び式(5)のそれぞれ最後の式、式(22)及び上式を用いて式(10)の条件を課すると、 $f_2(\theta)=0$  となるので、変位成分  $w$  は次のように求められる。

$$(23) \quad w = -\frac{1}{E} \left\{ \frac{\beta}{2} r^2 + \frac{\nu}{2} \beta z^2 + \nu z \Theta_0 \right\} + \frac{1+\nu}{E} \chi_1 \quad (24)$$

以上、三つの変位成分  $u$ ,  $v$  及び  $w$  の導出において、式(5)の第4式は用いていないが、式(21)及び式(22)がそれを満足することは代入して確めてある。

合応力、曲げモーメント及び捩りモーメントを次のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} T_{rr} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{rr} dz, & S_{r\theta} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{r\theta} dz, & Q_r &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{rz} dz \\ T_{\theta\theta} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\theta\theta} dz, & S_{\theta r} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (-\sigma_{r\theta}) dz, & Q_\theta &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\theta z} dz \\ M_r &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{rr} dz, & M_\theta &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{\theta\theta} dz, & M_{r\theta} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (-z \sigma_{r\theta}) dz \\ M_{\theta r} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{r\theta} dz \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

ここで、 $h$  は板厚を表わし、 $z=0$  は板の中央面あるいはその延長面上に置き、 $z$  の正の向きを上向きに取るものとする。

以上求めた平面応力状態に関する解の応用として、次のような平面応力問題が解析できる。

#### 面内荷重を受けた厚板の引張り

$\beta=0$  として、 $\Theta_0$  及び  $\chi_0$  のみを用いると、変位成分は、式(21), (22) 及び式(24) より次のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{E} \left( \xi + \frac{\nu}{2} z^2 \frac{\partial \Theta_0}{\partial r} \right) - \frac{1+\nu}{E} \frac{\partial \chi_0}{\partial r}, & v &= \frac{1}{E} \left( \eta + \frac{\nu}{2} z^2 \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta_0}{\partial \theta} \right) \\ &- \frac{1+\nu}{E} \frac{1}{r} \frac{\partial \chi_0}{\partial \theta}, & w &= -\frac{\nu}{E} z \Theta_0 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

応力成分  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$  及び  $\sigma_{r\theta}$  は式(15)に示したものであり,  $\chi$  は式(17)より

$$\chi = \chi_0 - \frac{\nu}{2(1+\nu)} z^2 \Theta_0 \quad (27)$$

となる。合応力, 曲げモーメント及び捩りモーメントは、式(10), (15), (25)及び式(27)より次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} T_{rr} &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left\{ h\chi_0 - \frac{\nu h^3}{24(1+\nu)} \Theta_0 \right\}, \quad S_{r\theta} = -S_{\theta r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ h\chi_0 - \frac{\nu h^3}{24(1+\nu)} \Theta_0 \right\} \right\} \\ T_{\theta\theta} &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left\{ h\chi_0 - \frac{\nu h^3}{24(1+\nu)} \Theta_0 \right\}, \quad Q_r = 0, \quad Q_\theta = 0, \quad M_r = 0 \\ M_\theta &= 0, \quad M_{r\theta} = -M_{\theta r} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

### 平面応力状態になる場合の厚板の曲げ

$\Theta_0 = \chi_0 = 0$  として,  $\beta$  の項のみを取り出すと

$$\chi = \chi_1 z, \quad \nabla^2 \chi_1 = \beta \quad (29)$$

となり, 変位成分は、式(21), (22)及び式(24)より次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\beta}{E} r z - \frac{1+\nu}{E} z \frac{\partial \chi_1}{\partial r}, \quad v = -\frac{1+\nu}{E} z \frac{1}{r} \frac{\partial \chi_1}{\partial \theta}, \\ w &= -\frac{\beta}{2E} (r^2 + \nu z^2) + \frac{1+\nu}{E} \chi_1 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

また、応力成分は、式(15)及び式(29)より

$$\sigma_{rr} = z \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \chi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial \theta^2} \right), \quad \sigma_{\theta\theta} = z \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial r^2}, \quad \sigma_{r\theta} = -z \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \chi_1}{\partial \theta} \right) \quad (31)$$

と表わされる。合応力, 曲げモーメント及び捩りモーメントは、式(10), (25)及び式(31)より次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} M_r &= \frac{h^3}{12} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \chi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial \theta^2} \right), \quad M_\theta = \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial r^2}, \quad M_{r\theta} = -M_{\theta r} \\ &= \frac{h^3}{12} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \chi_1}{\partial \theta} \right), \quad T_{rr} = 0, \quad T_{\theta\theta} = 0, \quad S_{r\theta} = -S_{\theta r} = 0 \\ &\quad Q_r = 0, \quad Q_\theta = 0 \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

板の中央面 ( $z=0$ ) における  $z$  方向の変位成分  $w(r, \theta, 0)$  を  $w_0$  で表わし、板の中央面における曲率及び捩率をそれぞれ  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  及び  $\tau$  で表わすと次式となる。

$$w_0 = -\frac{\beta}{2E} r^2 + \frac{1+\nu}{E} \chi_1 \quad (33)$$

$$\tau = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right), \quad \kappa_1 = \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2}, \quad \kappa_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} \quad (34)$$

式(33)を式(34)に代入すると次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1 &= -\frac{\beta}{E} + \frac{1+\nu}{E} \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial r^2}, \quad \kappa_2 = -\frac{\beta}{E} + \frac{1+\nu}{E} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \chi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial \theta^2} \right) \\ \tau &= \frac{1+\nu}{E} \left( -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \chi_1}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial r \partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

上式と式(29)の最後の式を用いて

$$\kappa_1 + \nu \kappa_2 = -\frac{1-\nu^2}{E} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \chi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial \theta^2} \right), \quad \kappa_2 + \nu \kappa_1 = -\frac{1-\nu^2}{E} \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial r^2} \quad (36)$$

が得られる。式(32)の最初の三つの式に上式及び式(34)の最後の式を代入すると曲げモーメント及び捩りモーメントが曲率及び捩率で次のように表わされる。

$$M_r = -D(\kappa_1 + \nu \kappa_2), \quad M_\theta = -D(\kappa_2 + \nu \kappa_1), \quad M_{r\theta} = -M_{\theta r} = D(1-\nu) \tau \quad (37)$$

ここで、 $D$ は板の曲げ剛性であり、次式で表わされる。

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (38)$$

#### 4. 一般化平面応力状態に関する解

物体力がない場合を考え、次の条件を設ける。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zz} &= 0 \\ z = \pm h/2 \text{において} \quad \sigma_{rz} &= 0, \quad \sigma_{\theta z} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

式(7)の最初の式より、 $\partial^2 \Theta / \partial z^2 = 0$ となるので、これを $z$ に関して2回積分すると

$$\Theta = \Theta_0 + z\Theta_1 \quad (40)$$

が得られる。ただし、 $\Theta_0$ 及び $\Theta_1$ はそれぞれ $r$ 及び $\theta$ の関数とする。上式の両辺に $\nabla^2$ を作用させて、式(9)を用いると

$$\nabla_1^2 \Theta_0 = 0, \quad \nabla_1^2 \Theta_1 = 0 \quad (41)$$

が得られる。すなわち、 $\Theta_0$ 及び $\Theta_1$ はそれぞれ平面調和関数となる。式(40)の右辺の最初の項は、平面応力状態に関する解を表わし、前章においてすでに述べたので除外し、 $\Theta$ として

$$\Theta = z\Theta_1 \quad (42)$$

を考える。

$$\sigma_{rz} = \frac{1}{8(1+\nu)} (h^2 - 4z^2) \frac{\partial \Theta_1}{\partial r}, \quad \sigma_{\theta z} = \frac{1}{8(1+\nu)} (h^2 - 4z^2) \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta_1}{\partial \theta} \quad (43)$$

とすると、上式は式(39)の最後の二つの条件を満足し、かつ、最初の条件が課せられたとき、式(1)の最後の式及び式(7)の最後の二つの式を満足する。応力成分 $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$ 及び $\sigma_{r\theta}$ を

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{z}{1+\nu} \Theta_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi'}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi'}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{z}{1+\nu} \Theta_1 + \frac{\partial^2 \chi'}{\partial r^2} \\ \sigma_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \chi'}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

と置くと、上式及び式(43)は式(1)の最初の二つの式を満足する。上式の最初の二つの式の両辺を相加えて、式(39)及び式(42)を用いると

$$\nabla_i^2 \chi' = -\frac{1-\nu}{1+\nu} z \Theta_1 \quad (45)$$

が得られる。式(44)を式(7)の第2式から第4式に代入すると次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} & \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \chi'}{\partial z^2} - \frac{2-\nu}{1+\nu} z \Theta_1 \right) = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( \frac{\partial^2 \chi'}{\partial z^2} \right) \\ & - \frac{2-\nu}{1+\nu} z \Theta_1 = 0, \quad -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\partial^2 \chi'}{\partial z^2} - \frac{2-\nu}{1+\nu} z \Theta_1 \right) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

上の三つの式が同時に成立するためには

$$\frac{\partial^2 \chi'}{\partial z^2} - \frac{2-\nu}{1+\nu} z \Theta_1 = \text{定数}$$

となることが必要であり、いま、右辺の定数を0と置いて $z$ に関して2回積分すると

$$\chi' = z \chi'_1 + \frac{2-\nu}{6(1+\nu)} z^3 \Theta_1 + \chi_0$$

が得られる。ただし、 $\chi'_1$ 及び $\chi_0$ はそれぞれ $r$ 及び $\theta$ の関数とする。上式の右辺の最後の項は平面応力状態に関する解であり、前章において述べたので除外すると

$$\chi' = z \chi'_1 + \frac{2-\nu}{6(1+\nu)} z^3 \Theta_1 \quad (47)$$

が得られる。上式に $\nabla_i^2$ を作用させ、式(45)を用いると

$$\nabla_i^2 \chi'_1 = -\frac{1-\nu}{1+\nu} \Theta_1 \quad (48)$$

が得られる。したがって、式(41)の最後の式、式(47)及び式(48)の関係の下で、つり合い方程式(1)及び適合条件式(7)を満足する応力成分が式(39)の最初の式、式(43)及び式(44)により求められたことになる。変位成分は、前章において述べたと同様にして求めることができ、結果のみを示すと次の通りである。

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{1}{E} \left\{ (1+\nu) z \frac{\partial \chi'_1}{\partial r} + \frac{2-\nu}{6} z^3 \frac{\partial \Theta_1}{\partial r} \right\} \\ v &= -\frac{1}{E} \left\{ (1+\nu) z \frac{1}{r} \frac{\partial \chi'_1}{\partial \theta} + \frac{2-\nu}{6} z^3 \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta_1}{\partial \theta} \right\} \\ w &= \frac{1}{E} \left\{ (1+\nu) \chi'_1 + \frac{1}{4} (h^2 - 2\nu z^2) \Theta_1 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

合応力、曲げモーメント及び捩りモーメントは、式(25)、(47)及び上で求めた応力成分により次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} Q_r &= \frac{h^3}{12(1+\nu)} \frac{\partial \Theta_1}{\partial r}, \quad Q_\theta = \frac{h^3}{12(1+\nu)} \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta_1}{\partial \theta}, \quad T_{rr} = 0, \quad T_{\theta\theta} = 0 \\ S_{r\theta} &= -S_{\theta r} = 0 \\ M_r &= \frac{h^3}{12(1+\nu)} \Theta_1 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left\{ \frac{h^3}{12} \chi'_1 + \frac{2-\nu}{15(1+\nu)} \left( \frac{h}{2} \right)^5 \Theta_1 \right\} \\ M_\theta &= \frac{h^3}{12(1+\nu)} \Theta_1 + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left\{ \frac{h^3}{12} \chi'_1 + \frac{2-\nu}{15(1+\nu)} \left( \frac{h}{2} \right)^5 \Theta_1 \right\} \\ M_{r\theta} &= -M_{\theta r} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left\{ \frac{h^3}{12} \chi'_1 + \frac{2-\nu}{15(1+\nu)} \left( \frac{h}{2} \right)^5 \Theta_1 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

## 一般化平面応力状態になる場合の厚板の曲げ

板の中央面における $z$ 方向の変位成分 $w(r, \theta, 0)$ を $w_0$ と表わすと、式(49)の最後の式から

$$w_0 = \frac{1}{E} \left\{ \frac{h^2}{4} \Theta_1 + (1+\nu) \chi'_1 \right\} \quad (51)$$

となる。上式の両辺に $\nabla_1^2$ を作用させ、式(41)の最後の式及び式(48)を用いると

$$\nabla_1^2 w_0 = \frac{1+\nu}{E} \nabla_1^2 \chi'_1 = -\frac{1-\nu}{E} \Theta_1 \quad (52)$$

が得られる。上式の両辺に再び $\nabla_1^2$ を作用させ、式(41)の最後の式を考慮すると

$$\nabla_1^2 \nabla_1^2 w_0 = 0 \quad (53)$$

が得られる。すなわち、 $w_0$ は平面重調和関数となる。式(51)及び式(52)を用いて式(47)を書き直すと次式が得られる。

$$\chi' = \frac{Ez}{1+\nu} w_0 + \frac{Ez}{12(1-\nu^2)} \left\{ 3h^2 - 2(2-\nu) z^2 \right\} \nabla_1^2 w_0 \quad (54)$$

上式と式(52)を用いると応力成分は $w_0$ によって次のように表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \nabla_1^2 w_0 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left[ \frac{Ez}{1+\nu} w_0 + \frac{Ez}{12(1-\nu^2)} \right. \\ &\quad \times \left. \left\{ 3h^2 - 2(2-\nu) z^2 \right\} \nabla_1^2 w_0 \right] \\ \sigma_{\theta\theta} &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \nabla_1^2 w_0 + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[ \frac{Ez}{1+\nu} w_0 + \frac{Ez}{12(1-\nu^2)} \right. \\ &\quad \times \left. \left\{ 3h^2 - 2(2-\nu) z^2 \right\} \nabla_1^2 w_0 \right] \\ \sigma_{zz} &= 0 \\ \sigma_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left[ \frac{Ez}{1+\nu} w_0 + \frac{Ez}{12(1-\nu^2)} \left\{ 3h^2 - 2(2-\nu) z^2 \right\} \nabla_1^2 w_0 \right] \\ \sigma_{rz} &= -\frac{E}{8(1-\nu^2)} (h^2 - 4z^2) \frac{\partial}{\partial r} (\nabla_1^2 w_0) \\ \sigma_{\theta z} &= -\frac{E}{8(1-\nu^2)} (h^2 - 4z^2) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla_1^2 w_0) \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

また、合応力、曲げモーメント及び捩りモーメントは次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} Q_r &= -D \frac{\partial}{\partial r} (\nabla_1^2 w_0), \quad Q_\theta = -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla_1^2 w_0), \quad T_{rr} = 0, \quad T_{\theta\theta} = 0 \\ S_{r\theta} &= -S_{\theta r} = 0 \\ M_r &= -D \left\{ \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} \right) \right\} + \frac{8+\nu}{40} Dh^2 \\ &\quad \times \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) (\nabla_1^2 w_0) \\ M_\theta &= -D \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} \right) + \frac{8+\nu}{40} Dh^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\nabla_1^2 w_0) \\ M_{r\theta} &= -M_{\theta r} = D(1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right) + \frac{8+\nu}{40} Dh^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (\nabla_1^2 w_0) \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

上式中の  $D$  は板の曲げ剛性であり、式(38)に示したものである。

### 5. 板の中央面に対して反対称の応力状態に関する解

この応力状態に関する解は、直交座標系  $(x, y, z)$  において Kromm<sup>3)</sup> によって求められているが、それを円柱座標系において求めるこにする。物体力は存在しない場合を考え

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zz} &= 0, \quad \sigma_{rr} = -\sigma_{\theta\theta}, \quad w = 0 \\ z = \pm h/2 \text{ において} \quad \sigma_{rz} &= 0, \quad \sigma_{\theta z} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

の条件を設ける。したがって、式(6)より  $\Theta=0$  が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rz} &= A_n \cos \beta_n z \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_n}{\partial \theta}, \quad \sigma_{\theta z} = -A_n \cos \beta_n z \cdot \frac{\partial \Phi_n}{\partial r}, \quad \beta_n = \frac{n\pi}{h} \\ (n &= 1, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

と置くと、上式は式(57)の最後の二つの条件を満足し、最初の二つの条件を考慮すると式(1)の最後の式をも満足する。上式中の  $A_n$  は任意定数である。式(58)を式(7)の最後の二つの式に代入し、 $\Theta=0$  に留意すると

$$\nabla_1^2 \Phi_n - \beta_n^2 \Phi_n = 0 \quad (59)$$

が得られる。応力成分  $\sigma_{rr}$  及び  $\sigma_{\theta\theta}$  を

$$\sigma_{rr} = -\sigma_{\theta\theta} = B_n \sin \beta_n z \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_n}{\partial \theta} \right) \quad (60)$$

と置いて、式(1)の最初の式に代入すると次式が得られる。

$$\sigma_{r\theta} = -\sin \beta_n z \left( B_n \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial r^2} - \beta_n A_n \Phi_n \right) \quad (61)$$

式(58)、(60)及び上式を式(1)の第2式に代入すると

$$\nabla_1^2 \Phi_n - 2\beta_n \frac{A_n}{B_n} \Phi_n = 0$$

が得られる。したがって、上式と式(59)より

$$B_n = \frac{2A_n}{\beta_n}$$

となることが必要である。上式を式(60)及び式(61)に代入して

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= -\sigma_{\theta\theta} = \frac{2A_n}{\beta_n} \sin \beta_n z \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_n}{\partial \theta} \right), \quad \sigma_{r\theta} = \frac{A_n}{\beta_n} \sin \beta_n z \\ &\times \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_n}{\partial r} - \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial r^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

が得られる。式(57)の最初の二つの条件及び式(59)を用いると、式(58)及び式(62)の応力成分は、式(7)の最初の四つの式を満足する。

以上により、式(1)のつり合い方程式及び式(7)の適合条件式をすべて満足する応力成分が求められたことになる。変位成分は、式(58)及び式(62)の応力成分を用いて、第3章に述べた方法により求めることができ、結果を示すと次の通りである。

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1+\nu}{E} \frac{2A_n}{\beta_n} \sin \beta_n z \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_n}{\partial \theta}, \quad v = -\frac{1+\nu}{E} \frac{2A_n}{\beta_n} \sin \beta_n z \cdot \frac{\partial \Phi_n}{\partial r} \\ w &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

合応力、曲げモーメント及び捩りモーメントは、式(25)、(58)及び式(62)を用いて次のように表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} Q_r &= \frac{2A_n}{\beta_n} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_n}{\partial \theta}, \quad Q_\theta = -\frac{2A_n}{\beta_n} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\partial \Phi_n}{\partial r}, \quad T_{rr} = 0 \\ T_{\theta\theta} &= 0, \quad S_{r\theta} = -S_{\theta r} = 0 \\ M_r &= -M_\theta = \frac{4A_n}{\beta_n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_n}{\partial \theta} \right), \quad M_{r\theta} = -M_{\theta r} \\ &= -\frac{2A_n}{\beta_n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_n}{\partial r} - \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial r^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

以上の諸式に現われた任意定数  $A_n$  は、式(59)より得られる  $\Phi_n$  の任意定数に含めることができるので除去しても差し支えないものであるが

$$A_n = \frac{\beta_n}{2} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \quad (65)$$

と置いて、式の簡単化を計ると、応力成分、変位成分、合応力、曲げモーメント及び捩りモーメントは次のように書くことができる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rz} &= \frac{\beta_n (-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2} \cos \beta_n z \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_n}{\partial \theta}, \quad \sigma_{\theta z} = -\frac{\beta_n (-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2} \cos \beta_n z \cdot \frac{\partial \Phi_n}{\partial r} \\ \sigma_{rr} &= -\sigma_{\theta\theta} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin \beta_n z \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_n}{\partial \theta} \right), \quad \sigma_{zz} = 0 \\ \sigma_{r\theta} &= -\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2} \sin \beta_n z \left( \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_n}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \theta^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1+\nu}{E} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin \beta_n z \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_n}{\partial \theta}, \quad v = -\frac{1+\nu}{E} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin \beta_n z \\ w &= \times \frac{\partial \Phi_n}{\partial r}, \quad w = 0 \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_n}{\partial \theta}, \quad Q_\theta = -\frac{\partial \Phi_n}{\partial r}, \quad T_{rr} = 0, \quad T_{\theta\theta} = 0, \quad S_{r\theta} = -S_{\theta r} = 0 \\ M_r &= -M_\theta = \frac{2}{\beta_n^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_n}{\partial \theta} \right), \quad M_{r\theta} = -M_{\theta r} = \frac{1}{\beta_n^2} \\ &\times \left( \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_n}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \theta^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

## 6. 結 語

面内荷重を受けた厚板あるいは曲げを受けた厚板の解の一つとして、平面応力状態に関する解、一般化平面応力状態に関する解及び板の中央面に対して反対称の応力状態に関する解を円柱座標系において求めた。これらの解は、共に垂直応力成分の一つ  $\sigma_{zz}$  が恒等的に 0 であり、二つのせん断応力成分  $\sigma_{rz}$  及び  $\sigma_{\theta z}$  が 0 かあるいは板の上、下面 ( $z = \pm h/2$ ) において 0 となる条件の下で導出されているので、比較的厚い円板、円環板あるいは扇形板の上、下面における荷重条件を満足する特殊解、例えば、垂直荷重が作用する場合には  $\sigma_{zz}$  に関する解、せん断荷重が作用する場合には  $\sigma_{rz}$  及び  $\sigma_{\theta z}$  に関する解が求められれば、これらの解とその特殊解とを重ね合わせて曲げの問題を解析することができる、厚板の一つの有用な解と考えられる。また、ひずみ成分により表わされた適合条件式(2)は、一意的な表現であるが、応力成分によって表わした式(7)の適合条件式は、直交座標系における Beltrami-Michell の関係式との対応も良く取れており、一つの有用な表現式と思われる。

## 参 考 文 献

- 1) Love, A. E. H.: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, 4th ed., p. 90, p. 56 and chap. XXII (1944), Dover Pub.
- 2) Saada, A. S.: Elasticity, Theory and Applications, p. 142 (1974), Pergamon.
- 3) Kromm, A.: Verallgemeinerte Theorie der Plattenstatik, Ing.-Arch., Band 21, S. 266–286 (1953).

と置いて、式(1)の最初の式を代入すると次式が得られる。

$$\frac{\Phi_0}{B_0} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} - \frac{\Phi_0}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial r^2} = 0 \quad (61)$$

式(58)及び上式を式(1)の第二式に代入すると

$$\frac{\Phi_0}{B_0} - 2\beta_n \frac{A_n}{B_n} \left( \frac{\Phi_0}{B_0} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} - \frac{\Phi_0}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial r^2} \right) = \Phi_0 \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial r^2} = 0 \quad (62)$$

が得られる。したがって、上式と式(59)より