

舗装を有する箱桁の走行荷重による 動的応答解析*

岩 崎 正 二**
三 上 修 一***
大 島 俊 之***
能 町 純 雄****

(昭和55年4月30日受理)

Dynamic Response Analysis of Box Girder with Viscoelastic Layer by using of a Traveling Load

by Shoji IWASAKI, Shuichi MIKAMI, Toshiyuki OHSHIMA
and Sumio NOMACHI

Dynamic behavior of box girder of steel with viscoelastic layer on which a point load travels at a constant speed, is dealt with by means of dynamic folded plate analysis.

The results of dynamic deflection and displacement of box girder are obtained by numerical calculation for the case of different stiffness, depth of pavement and the traveling velocity of the load.

1. ま え が き

本論文は舗装を有する箱桁の上フランジ中央部を走行荷重が一定速度で移動する問題を対象として、モード解析法によりこの箱桁の動的応答解析を行ない、変形挙動を明らかにするとともに舗装の変形係数、その厚さ及び荷重走行速度の変化が舗装を有する箱桁の動的応答性状にどのような影響を与えるかを検討するものである。

従来この種の研究としては、舗装された鋼床版構造を対象にしたものが多く、理論的には芳村、韭沢ら¹⁾、実験的には渡辺、大島ら²⁾、森、渡辺ら³⁾、また鋼床版橋面舗装に関する調査・研究を行なった本州四国連絡橋公団の研究⁴⁾などがあげられる。

本研究における数値解析では、変位の動的応答において箱桁のたわみ振動に与える舗装の

* 土木学会東北支部研究発表会にて講演 (1980. 3. 秋田)

** 岩手大学工学部土木工学科

*** 北見工業大学開発工学科

**** 北海道大学工学部土木工学科

効果が極めて大きいことなどを示す。

2. 解析理論

図-1 に示すような二層板帯板要素において、 x, y, z 方向変位を u, v, w 、たわみ角を θ とすると、変位関数は試験関数を用いて次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} u &= u^{(1)}u_i + u^{(2)}u_j, & v &= v^{(1)}v_i + v^{(2)}v_j \\ w &= w^{(1)}w_i + w^{(2)}\theta_i + w^{(3)}w_j + w^{(4)}\theta_j \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ただし、 $[u^{(1)}, u^{(2)}] = [v^{(1)}, v^{(2)}] = [1 - \eta, \eta]$ 、 $[w^{(1)}, w^{(2)}, w^{(3)}, w^{(4)}] = [1 - 3\eta^2 + 2\eta^3, b(\eta - 2\eta^2 + \eta^3), 3\eta^2 - 2\eta^3, b(-\eta^2 + \eta^3)]$ 、 $\eta = y/b$ 、サファイックス i, j はそれぞれ $y=0, y=b$ 点での境界物理量を表わす。

x, y, z 方向の動的基礎微分方程式に上述の試験関数を用いてガラーキソ法を適用すると

$$\int_0^b \left\{ \frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} - (\rho h)^* \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\} u^{(k)} dy = 0 \quad (2)$$

$$\int_0^b \left\{ \frac{\partial S_y}{\partial y} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} - (\rho h)^* \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right\} v^{(k)} dy = 0 \quad (3)$$

($k = 1, 2$)

$$\int_0^b \left\{ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - (\rho h)^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right\} w^{(k)} dy = 0 \quad (4)$$

($k = 1, 2, 3, 4$)

ただし、 S_x, S_y は二次元応力問題における垂直応力、 T_{xy} は剪断応力である。 M_x, M_y は y 軸、 x 軸まわりの曲げモーメント、 M_{xy} はねじりモーメントである。又 ρ と h は密度と厚さであり、 $(\rho h)^* = \rho_a h_a + \rho_1 h_1$ である。

二層板の面内変形に関する平面応力状態の応力-ひずみ関係式は

$$\left. \begin{aligned} S_x &= N^* \frac{\partial u}{\partial x} + N_u^* \frac{\partial v}{\partial y} \\ S_y &= N_u^* \frac{\partial u}{\partial x} + N^* \frac{\partial v}{\partial y} \\ T_{xy} &= (Gh)^* \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

面外変形に関する断面力と曲率の関係式は¹⁾

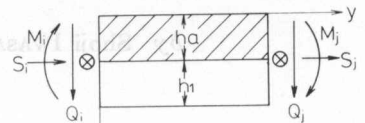
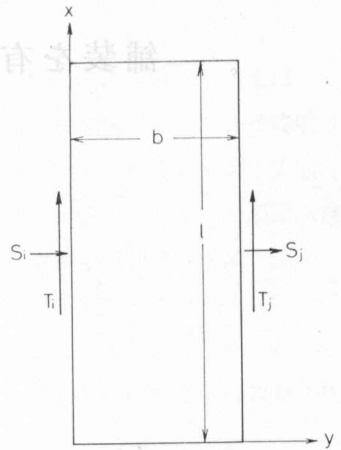


図-1 二層板帯板要素

$$\left. \begin{aligned} M_x &= - \left(K^* \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + K_u^* \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= - \left(K^* \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + K_u^* \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= (K_u^* - K^*) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ここで, $N^* = \frac{E_a h_a}{1 - \nu_a^2} + \frac{E_1 h_1}{1 - \nu_1^2}$, $N_u^* = \frac{E_a h_a \nu_a}{1 - \nu_a^2} + \frac{E_1 h_1 \nu_1}{1 - \nu_1^2}$, $(Gh)^* = G_a h_a + G_1 h_1$,

(9) $c = \frac{E_a h_a^2}{2(1 - \nu_a^2)} + \frac{E_1 (H^2 - h_a^2)}{2(1 - \nu_1^2)}$, $c_u = \frac{E_a h_a^2 \nu_a}{2(1 - \nu_a^2)} + \frac{E_1 (H^2 - h_a^2) \nu_1}{2(1 - \nu_1^2)}$,

$L_1 = \frac{c N^* - c_u N_u^*}{N^{*2} - N_u^{*2}}$, $L_2 = \frac{c_u N^* - c N_u^*}{N^{*2} - N_u^{*2}}$, $K = \frac{E_a h_a^3}{3(1 - \nu_a^2)} + \frac{E_1 (H^3 - h_a^3)}{3(1 - \nu_1^2)}$,

$K_u = \frac{E_a h_a^3 \nu_a}{3(1 - \nu_a^2)} + \frac{E_1 (H^3 - h_a^3) \nu_1}{3(1 - \nu_1^2)}$, $K^* = K - c_u L_1 - c L_2$,

$K_u^* = K_u - c_u L_1 - c L_2$, E : 変形係数, G : 剪断弾性係数, ν : ポアソン比

式(5)を式(2), (3)に, 式(6)を式(4)に代入し部分積分を施すと, x に関して4階, t に関しては2階の線形連立偏微分方程式が得られる。今面外変形についてのみ誘導過程を示すと

$$\begin{aligned} & \left[Q_y w^{(k)} \right]_0^b - \left[M_y \frac{\partial w^{(k)}}{\partial y} \right]_0^b - K^* \int_0^b \left[w^{(1)} w_i'''' + w^{(2)} \theta_i'''' + w^{(3)} w_j'''' + w^{(4)} \theta_j'''' \right] w^{(k)} \\ & + 2 \left\{ w^{(1)} w_i' + w^{(2)} \theta_i' + w^{(3)} w_j' + w^{(4)} \theta_j' \right\} \frac{\partial^2 w^{(k)}}{\partial y^2} dy - K_u^* \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} w^{(k)} \right]_0^b \\ & + (2K^* - K_u^*) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial w^{(k)}}{\partial y} \right]_0^b - K^* \left[\frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w^{(k)}}{\partial y^2} + w \frac{\partial^3 w^{(k)}}{\partial y^3} \right]_0^b \\ & - (\rho h)^* \int_0^b \left[w^{(1)} \ddot{w}_i + w^{(2)} \ddot{\theta}_i + w^{(3)} \ddot{w}_j + w^{(4)} \ddot{\theta}_j \right] w^{(k)} dy = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

ただし, $w_i'''' = \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4}$, $\theta_i'' = \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial x^2}$, $\ddot{w}_i = \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2}$

次に式(2)から得られる方程式には $\cos m\pi x/l$, 他式から得られる式に $\sin m\pi x/l$ を乗じ $0 < x < l$ で有限フーリエ変換を施し, 両端単純支持の境界条件に留意して整理すると次のような二層板帯板要素の動的基本式が求まる。

$$[K] \left\{ \bar{S}_m [\delta] \right\} + [M] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \bar{S}_m [\delta] \right\} = \left\{ \bar{S}_m [f] \right\} \quad (8)$$

ここで, $\{\bar{S}_m [\delta]\}$, $\{\bar{S}_m [f]\}$ はそれぞれ境界節点変位ベクトル, 節点断面力ベクトルの像関数であり, 次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \left\{ \bar{S}_m [\delta] \right\} &= \begin{bmatrix} C_m [u_i] & S_m [v_i] & S_m [w_i] & S_m [\theta_i] \\ & C_m [u_j] & S_m [v_j] & S_m [w_j] & S_m [\theta_j] \end{bmatrix}^T \\ \left\{ \bar{S}_m [f] \right\} &= \begin{bmatrix} C_m [T_i] & S_m [S_i] & S_m [Q_i] & S_m [M_i] \\ & C_m [T_j] & S_m [S_j] & S_m [Q_j] & S_m [M_j] \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

又, $C_m[u_i] = \int_0^b u_i \cos \frac{m\pi x}{l} dx$, $S_m[v_i] = \int_0^b v_i \sin \frac{m\pi x}{l} dx$ で他にもこれに準ずる。

[K], [M] は剛性マトリックス, 質量マトリックスで以下のように表わされる。

$$[K] = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & & 0 & & H_{15} & H_{16} & & 0 \\ & H_{22} & & & & -H_{16} & H_{26} & & \\ & & H_{33} & H_{34} & & & & 0 & H_{37} & H_{38} \\ & & & H_{44} & & & & & -H_{38} & H_{48} \\ \text{Sym.} & & & & H_{11} & -H_{12} & & & & 0 \\ & & & & & & H_{22} & & & \\ & & & & & & & H_{33} & -H_{34} & \\ & & & & & & & & & H_{44} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$[M] = (\rho h)^* b \begin{bmatrix} M_{11} & 0 & & 0 & & M_{15} & 0 & & 0 \\ & M_{11} & & & & 0 & M_{15} & & \\ & & M_{33} & M_{34} & & & & 0 & M_{37} & M_{38} \\ & & & M_{44} & & & & & -M_{38} & M_{48} \\ \text{Sym.} & & & & M_{11} & 0 & & & & \\ & & & & & M_{11} & & & & 0 \\ & & & & & & & M_{33} & -M_{34} & \\ & & & & & & & & & M_{44} \end{bmatrix} \quad (10)$$

ここで係数マトリックスの要素は

$$\begin{aligned} H_{11} &= \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \frac{bN^*}{3} + \frac{(Gh)^*}{b}, & H_{12} &= \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \left\{ \frac{N_u^*}{2} - \frac{(Gh)^*}{2} \right\}, \\ H_{15} &= \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \frac{bN^*}{6} - \frac{(Gh)^*}{b}, & H_{16} &= -\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \left\{ \frac{N_u^*}{2} + \frac{(Gh)^*}{2} \right\}, \\ H_{22} &= \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \frac{(Gh)^*}{3} + \frac{N^*}{b}, & H_{26} &= \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \frac{(Gh)^*b}{6} - \frac{N^*}{b}, \\ H_{33} &= \left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 \frac{13b}{35} K^* + \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \frac{12}{5b} K^* + \frac{12}{b^2} K^*, & H_{34} &= \left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 \frac{11b^2}{210} K^* \\ &+ \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \left(\frac{K^*}{5} + K_u^* \right) + \frac{6}{b^2} K^*, & H_{37} &= \left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 \frac{9b}{70} K^* - \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \frac{12}{5b} K^* - \frac{12}{b^3} K^*, \\ H_{38} &= -\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 \frac{13b^2}{420} K^* + \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \frac{1}{5} K^* + \frac{6}{b^2} K^*, & H_{44} &= \left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 \frac{b^3}{105} K^* \\ &+ \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \frac{4b}{15} K^* + \frac{4}{b} K^*, & H_{48} &= -\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 \frac{b^3}{140} K^* - \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \frac{b}{15} K^* + \frac{2}{b} K^*, \\ M_{11} &= \frac{1}{3}, & M_{15} &= \frac{1}{6}, & M_{33} &= \frac{13}{35}, & M_{34} &= \frac{11b}{210}, & M_{37} &= \frac{9}{70}, & M_{38} &= -\frac{13b}{420}, \\ M_{44} &= \frac{b^2}{105}, & M_{45} &= -\frac{b^2}{140} \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

以上より得られた動的の基本式は要素固有の部材座標系で表わされている。構造物全体の動的の基本式を求めるためには、要素ごとの重ね合わせを行なう前に全体座標で表わしておく必要がある。座標変換マトリックスを $[T]$ とすると全体座標系の剛性マトリックス及び質量マトリックスは

$$[\bar{K}] = [T]^{-1}[K][T], [\bar{M}] = [T]^{-1}[M][T] \tag{11}$$

ここで

$$[T] = \begin{bmatrix} [T_g] & 0 \\ 0 & [T_g] \end{bmatrix}, [T_g] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \varphi: \text{部材座標系と全体座標系} \\ \text{のなす角度} \end{array}$$

式(11)を構造体を構成している各要素に適用し、構造物全体の動的の基本式を求めると

$$[K_{st}] \{S_m[\delta]\} + [M_{st}] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{S_m[\delta]\} = \{S_m[P]\} \tag{12}$$

ここで $[K_{st}]$, $[M_{st}]$ は構造物全体の剛性マトリックス、質量マトリックスを表わす。

次に集中荷重が一定速度 V_p で走行する場合の解は式(12)における自由振動解と強制振動解を加え合わせるにより求めることができる。初期条件を $t=0$ で $\{\delta\} = \{\dot{\delta}\} = 0$ とすると完全解は

$$\begin{aligned} \{S_m[\delta]\} &= \{S_m[\delta_s]\}_1 \sin \frac{m\pi}{l} V_p t - V_p [\mathbf{V}] \left[\frac{\sin \frac{m\pi}{l} C_e t}{C_e} \right] [\mathbf{V}]^{-1} \{S_m[\delta_s]\}_1 \\ &\quad (V_p \neq C_e) \\ &= \{S_m[\delta_s]\}_2 t \cos \frac{m\pi}{l} V_p t - \frac{l}{m\pi} [\mathbf{V}] \left[\frac{\sin \frac{m\pi}{l} C_e t}{C_e} \right] [\mathbf{V}]^{-1} \{S_m[\delta_s]\}_2 \\ &\quad (V_p = C_e) \end{aligned} \tag{13}$$

上式中 $[\]$ は対角マトリックスを意味し、 C_e は第 e 次モードの固有位相速度を表わす。又 $[\mathbf{V}]$ はモードベクトルからなるマトリックスであり、 $\{S_m[\delta_s]\}_1$, $\{S_m[\delta_s]\}_2$ は特殊解から得られる変位振幅ベクトルの像関数を表わす。真の値は、これらを x 方向に逆変換することにより求められる。

3. 数値計算例

図-2 に示すように上フランジ中央部を集中荷重が走行する場合を考えるので、箱桁を 5 要素に分割して計算した。数値計算に用いた断面諸元は以下のとおりである。

$$E_1 = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2, E_a/E_1 = 0, 1/150, 1/70, 1/30, \rho_a = 0.028 \text{ kg} \cdot \text{sec}^2/\text{cm}^2, \rho_1 = 0.080 \text{ kg} \cdot \text{sec}^2/\text{cm}^2, h_1 = 1.0 \text{ cm}, h_a/h_1 = 0.0, 2.0, 5.0, 8.0, l = 30 \text{ m}, P = 1 \text{ t}$$

図-3 は、舗装の変形係数による変化についてのグラフであり、上フランジ中央点における

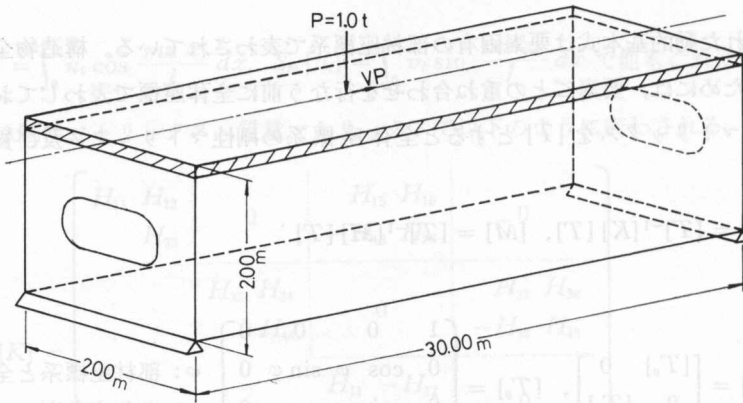


図-2 舗装を有する箱桁

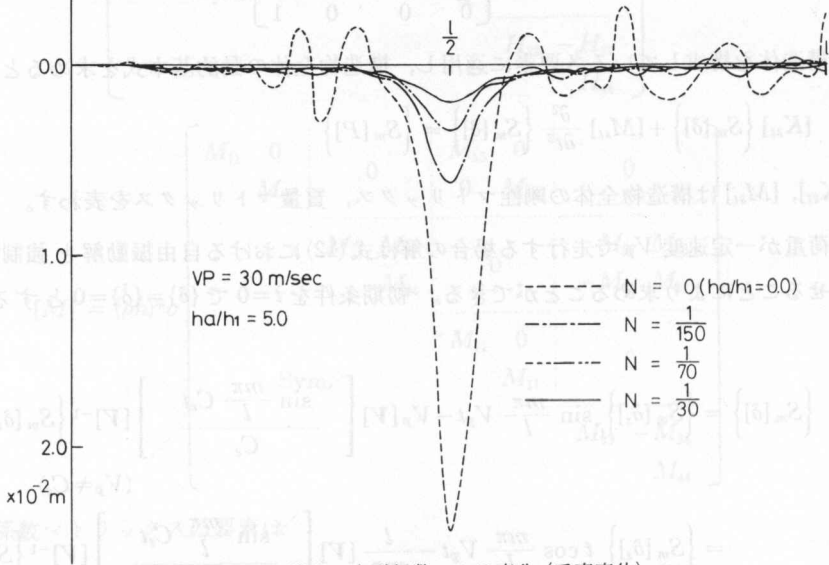


図-3 舗装の変形係数による変化 (垂直変位)

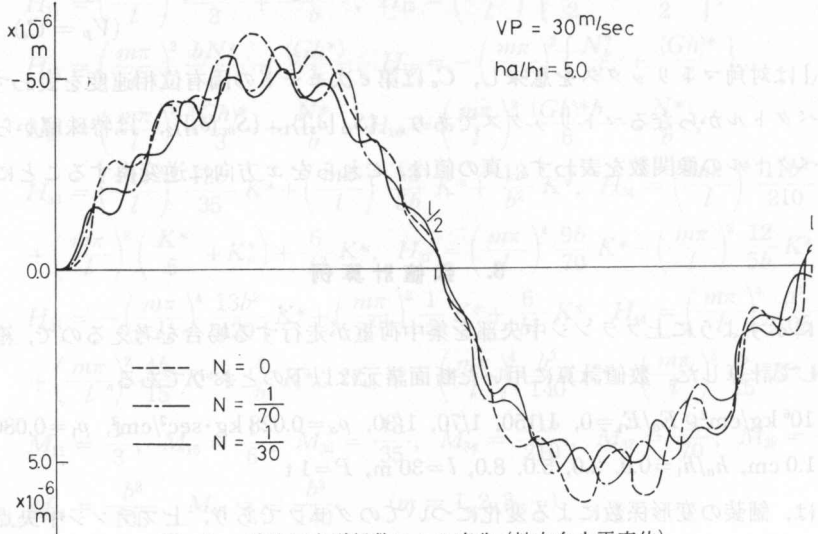


図-4 舗装の変形係数による変化 (軸方向水平変位)

垂直方向変位の影響線である。舗装の変形係数が増すに従って垂直変位の最大値は舗装のない鋼箱桁の値の約 1/4~1/12 まで減少し、同時に高周波成分の減少がみられる。これは鋼板と舗装の合成効果により上フランジ二層板の剛性が増加し、局部的変形の割合が小さくなったためと考えられる。図-4 は、同じ中央点における軸方向水平変位の影響線である。この図においては変形係数が増すに従い変位量は多少減少するが高周波成分は逆に増える傾向にある。しかしながら走行速度が遅くなると高周波成分は減少する。図-5 は、舗装の厚さの変化による中央点

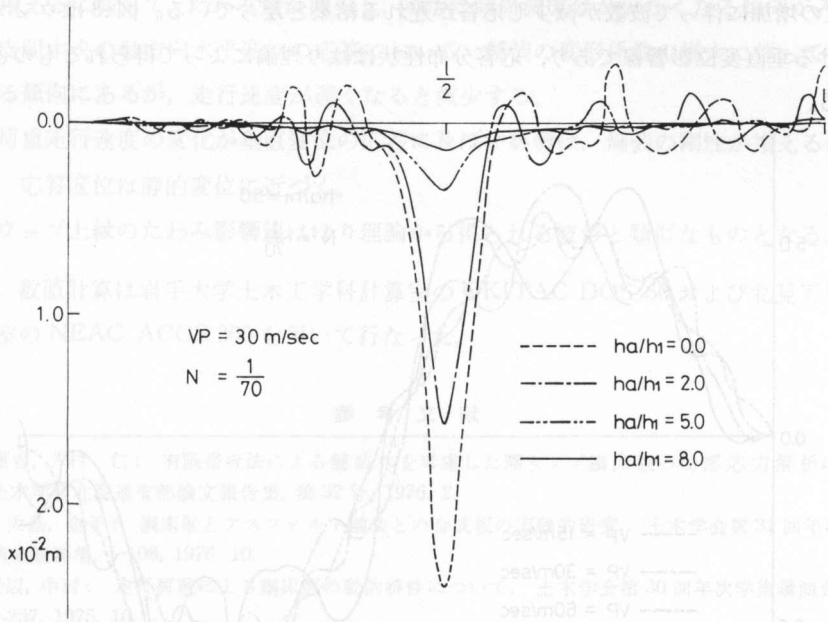


図-5 舗装の厚さによる変化 (垂直変位)

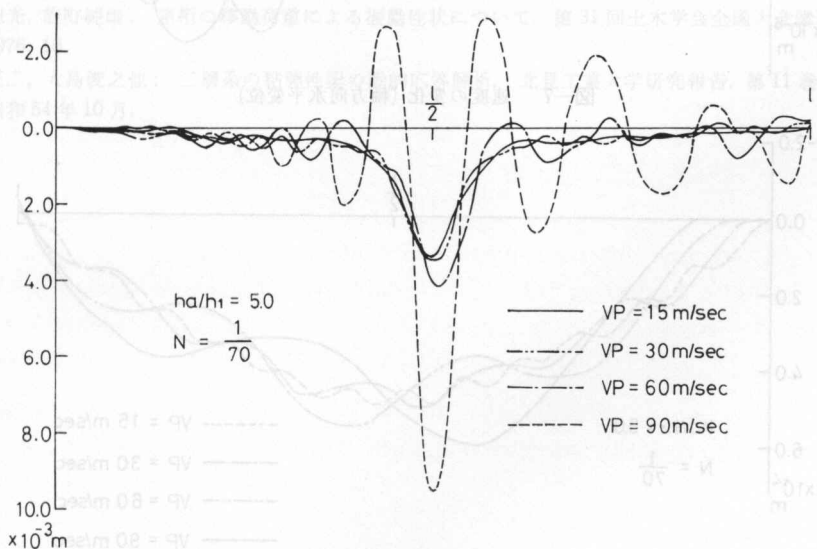


図-6 速度の変化 (垂直変位)

の垂直方向変位の影響線であり、変形係数の変化で示されたと同じような応答性状を示している。図-6は、速度の変化による中央点での垂直方向変位の影響線である。 $N=1/70$ では速度の減少に伴って振動は複雑なものから単純な形と移行し、振幅も減少している。しかしながら変形係数がさらに増すと走行速度が増大しても応答性状に大きな変化がみられなくなる。これは剛性の増加により舗装をもつ箱桁の極小位相速度が増大し、今回扱っている走行速度の範囲では critical speed に達しないためと考えられる。図-7は、同様に軸方向水平変位の影響線であるが、速度の増加に伴って波数が減少し応答が遅れる結果となっている。図-8はウェブ上縁中央点における垂直変位影響線であり、応答分布性状はやはり理論によって得られるものと類似なものとなる。

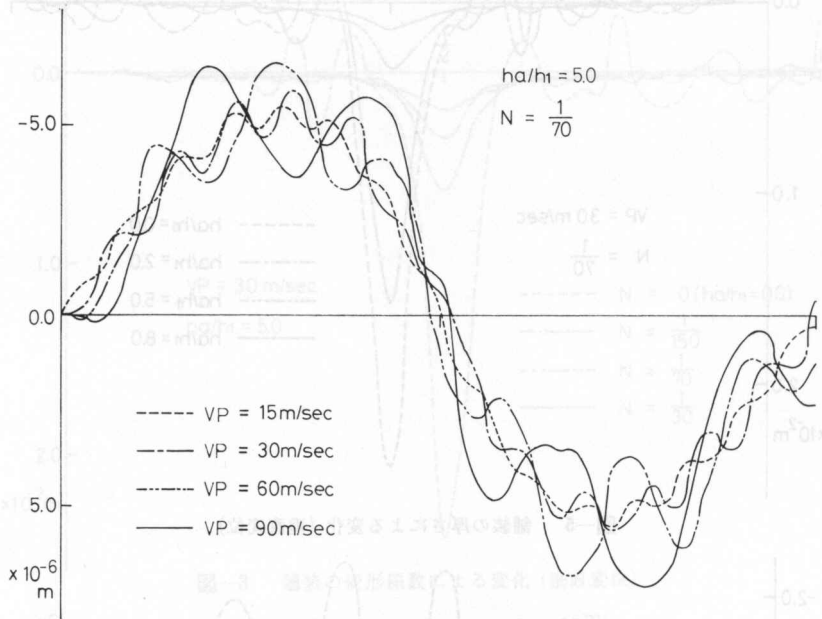


図-7 速度の変化 (軸方向水平変位)

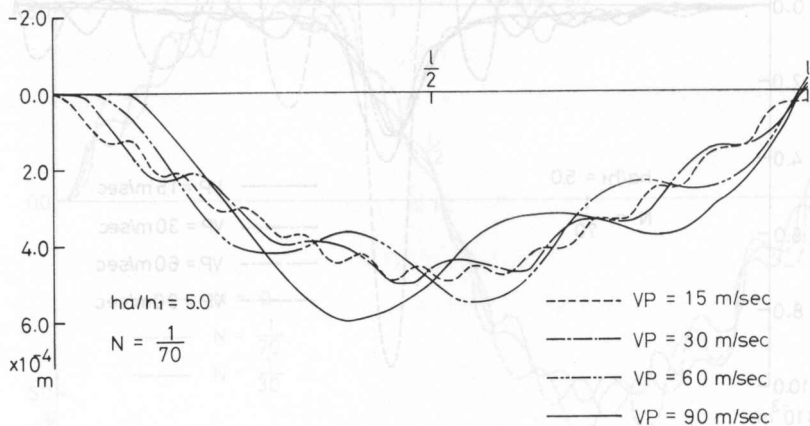


図-8 速度の変化 (ウェブ上縁の垂直変位)

4. 結 論

以上、本論文においては走行時における舗装を有する箱桁の変形状態を把握する目的で有限帯板法とモーダルアナリシスにより動的応答解析を行なった。それによると、次のような結果が得られた。

- (1) 舗装のない場合の垂直変位の応答と比較して、舗装がある場合は、舗装の変形係数及び厚さが増えるに従って、たわみ量が減少し、同時に高周波成分が少なくなる傾向がみられる。
- (2) 支間中央の軸方向水平変位の応答において、舗装の変形係数の増大に伴って高周波成分は増える傾向にあるが、走行速度が遅くなると減少する。
- (3) 荷重走行速度の変化が垂直変位の応答に及ぼす影響は、舗装の剛性が増えるに従い少なくなり、応答変位は静的変位に近づく。
- (4) ウェブ上縁のたわみ影響線ははり理論から得られる波形と類似なものとなる。

なお、数値計算は岩手大学土木工学科計算室の OKITAC DOS-50 および北見工業大学電子計算機室の NEAC ACOS 300 を用いて行なった。

参 考 文 献

- 1) 葦沢憲吉, 芳村 仁: 有限帯板法による舗装体を考慮した開きリブ鋼床版の局部応力解析について. 土木学会北海道支部論文報告集, 第 32 号, 1976. 2.
- 2) 渡辺, 大島, 金子: 鋼床版とアスファルト舗装との合成板の実験的研究. 土木学会第 31 回年次学術講演会概要集, I-108, 1976. 10.
- 3) 森, 渡辺, 中村: 走行荷重による鋼床版の動的特性について. 土木学会第 30 回年次学術講演会概要集, I-257, 1975. 10.
- 4) 福井幸夫, 沢井広之: 鋼床版の変形特性に関する調査. 橋梁と基礎, 1978. 6.
- 5) 岸 徳光, 能町純雄: 箱桁の移動荷重による振動性状について. 第 31 回土木学会全国大会講演概要集, 1976. 10.
- 6) 岩崎正二, 大島俊之他: 二層系の粘弾性梁の動的応答解析. 北見工業大学研究報告, 第 11 巻, 第 1 号, 昭和 54 年 10 月.

2. Example

Let X be the linear space of all real functions on the real line R such that f has only at most finitely many zeros in R . We introduce a partial ordering on X by declaring that $f < g$ means that $f(x) \leq g(x)$ for all $x \in R$. Evidently, X is a linear space with respect to this partial ordering.

Proposition 2. X satisfies the condition (ii).

Proof. Let I be an ideal in X contained in some ideal I_0 generated by an element α . For every $x \in X$ we put

$$M_x = \{ \lambda : x(\lambda) = 0, \lambda \in R \}.$$