

二層系の粘弾性梁の動的応答解析*

岩 崎 正 二**
仲 野 真 市***
大 島 俊 之***
能 町 純 雄****

(昭和54年4月28日受理)

Dynamic Response Analysis of the Layered Beam of an Elastic and a Viscoelastic Layer

by Shoji IWASAKI, Shinichi NAKANO, Toshiyuki OHSHIMA
and Sumio NOMACHI

Dynamic response of the layered beam of an upper viscoelastic and a lower elastic layer subjected to a moving concentrated load will obtain by superposition of a eigen vibration and a forced vibration of the beam.

Numerical results indicate that the high-frequency components of the vibration are decreased by the effect of viscoelastic layer.

Stresses in the elastic layer occurred alternately repeating plus and minus under a moving point load.

1. ま え が き

本論文は弾性層の上に粘弾性層がのっているような二層系の梁の上に走行荷重が移動する問題を対象として、この梁の動的振動応答解析を行ない、変形挙動を明らかにするとともに、振動応答に対して、荷重走行速度、粘弾性係数などの変化がどのように影響するかを検討するものである。

従来この種の研究としては、Core材に粘弾性材料を用い、上下面に弾性挙動を示す平板により Press された、三層系の梁または平板に対して、Sandman¹⁾, Sadasiva Rao, Nakra²⁾, Hyer, Anderson, Scott³⁾, Lu, Douglas⁴⁾, Asnani, Nakra⁵⁾などの研究があげられる。

本研究における数値解析では表面の粘弾性層が梁の変位の応答において、高周波成分を減少させる効果があることなどを示す。

* 土木学会東北支部研究発表会にて講演 (1979. 3, 仙台)

** 岩手大学工学部土木工学科

*** 北見工業大学開発工学科

**** 北大工学部土木工学科

2. 準備公式

図-1に示す細長い矩形帯板要素について、 x, y 方向変位 u, v とする。 x, y 方向の垂直応力を σ_x, σ_y , 剪断応力を $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ とし、慣性力を考慮し、 ρ を単位体積重量とすれば、図-1により釣り合い方程式は

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2)$$

次に Voigt モデルにおいて応力と歪の関係は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x - \nu \sigma_y &= E \varepsilon_x + k \frac{d \varepsilon_x}{dt} \\ \sigma_y - \nu \sigma_x &= E \varepsilon_y + k \frac{d \varepsilon_y}{dt} \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} + k' \frac{d \gamma_{xy}}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ただし ν : ポアソン比, E : 弾性係数, G : 剪断弾性係数, k, k' : 粘性係数, ρ : 単位体積重量, $\varepsilon_x = u' = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$, $\dot{\varepsilon} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$.

次に平面保持を仮定し, Galerkin 法により, 近似計算を行なうと

$$\begin{aligned} T_{0b} &= \frac{hN}{6} (2u_0' + u_b') + \frac{\nu N}{2} (v_b' - v_0') + \frac{hK}{6} (2\dot{u}_0' + \dot{u}_b') + \frac{\nu K}{2} (\dot{v}_b' - \dot{v}_0') \\ &\quad + \frac{Gt}{h} (u_b - u_0) + \frac{Gt}{2} (v_b' + v_0') + \frac{k't}{h} (\dot{u}_b - \dot{u}_0) + \frac{k't}{2} (\dot{v}_b' + \dot{v}_0') - \frac{\rho th}{6} (2\ddot{u}_0 + \ddot{u}_b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{b0} &= \frac{hN}{6} (2u_b' + u_0') + \frac{\nu N}{2} (v_b' - v_0') + \frac{hK}{6} (2\dot{u}_b' + \dot{u}_0') + \frac{\nu K}{2} (\dot{v}_b' - \dot{v}_0') \\ &\quad + \frac{Gt}{h} (u_0 - u_b) - \frac{Gt}{2} (v_b' + v_0') + \frac{k't}{h} (\dot{u}_0 - \dot{u}_b) - \frac{k't}{2} (\dot{v}_b' + \dot{v}_0') - \frac{\rho th}{6} (2\ddot{u}_b + \ddot{u}_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{0b} &= \frac{N}{h} (v_b - v_0) + \frac{\nu N}{2} (u_b' + u_0') + \frac{K}{h} (v_b - v_0) + \frac{\nu K}{2} (\dot{u}_b' + \dot{u}_0') + \frac{Gt}{2} (u_b' - u_0') \\ &\quad + \frac{Gth}{6} (2v_0' + v_b') + \frac{k't}{2} (2\dot{u}_b' - \dot{u}_0') + \frac{k'th}{6} (2\dot{v}_0' + \dot{v}_b') - \frac{\rho th}{6} (2\ddot{v}_0 + \ddot{v}_b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{b0} &= \frac{N}{h} (v_b - v_0) + \frac{\nu N}{2} (u_b' + u_0') + \frac{K}{h} (v_b - v_0) + \frac{\nu K}{2} (\dot{u}_b' + \dot{u}_0') + \frac{Gt}{2} (u_b' - u_0') \\ &\quad - \frac{Gth}{6} (2v_b' + v_0') + \frac{k't}{2} (\dot{u}_0' - \dot{u}_b') - \frac{k'th}{6} (2\dot{v}_b' + \dot{v}_0') + \frac{\rho th}{6} (2\ddot{v}_b + \ddot{v}_0) \end{aligned}$$

ここで $N = \frac{Et}{1-\nu^2}$, $u' = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$, $v' = \frac{\partial v}{\partial x}$, $K = \frac{kt}{1-\nu^2}$,

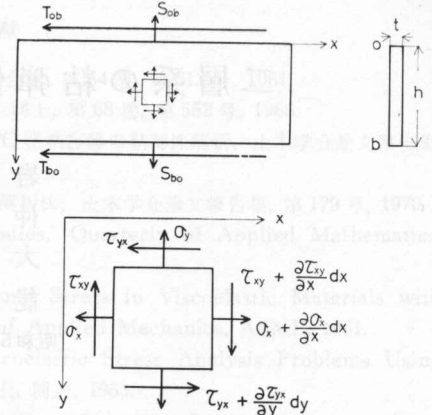


図-1 つりあい関係

Fig. 1. Stresses in a folded plate element.

粘性項の無い場合

$$T_{0b} = \frac{hN}{6} (2u_0'' + u_b') + \frac{\nu N}{2} (v_b' - v_0') + \frac{Gt}{h} (u_b - u_0) + \frac{Gt}{2} (v_b' + v_0') - \frac{\rho th}{6} (2\ddot{u}_0 + \ddot{u}_b) \quad (4)$$

$$T_{b0} = \frac{hN}{6} (2u_b'' + u_0') + \frac{\nu N}{2} (v_b' - v_0') + \frac{Gt}{h} (u_0 - u_b) - \frac{Gt}{2} (v_b' + v_0') - \frac{\rho th}{6} (2\ddot{u}_b + \ddot{u}_0) \quad (5)$$

$$S_{0b} = \frac{N}{h} (v_b - v_0) + \frac{\nu N}{2} (u_b' + u_0') + \frac{Gt}{2} (u_b' - u_0') + \frac{Gth}{6} (2v_0'' + v_b'') - \frac{\rho th}{6} (2\ddot{v}_0 + \ddot{v}_b) \quad (6)$$

$$S_{b0} = \frac{N}{h} (v_b - v_0) + \frac{\nu N}{2} (u_b' + u_0') + \frac{Gt}{2} (u_0' - u_b') - \frac{Gth}{6} (2v_b'' + v_0'') + \frac{\rho th}{6} (2\ddot{v}_b + \ddot{v}_0) \quad (7)$$

次に上記の粘性項のない場合の帯板に関する公式を用いて、構造モデルより基礎方程式を導く。図-2より、 $v_1 = v_2, \nu = 0$ の仮定のもとで各接線における、剪断力、法線力の釣り合いを取ると

$$T_{10} + T_{12} = 0, \quad T_{21} = 0, \quad S_{12} - S_{21} - \rho_1 t_1 h_1 \ddot{v}_1 = -P(x, t) \quad (8)$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} - T_{10} - \rho_1 t_1 h_1 \ddot{u}_1 = 0 \quad (9)$$

粘弾性層は、Voigt モデルを仮定しているので

$$q = (E_1 t_1 h_1 u_1' + K t_1 h_1 \dot{u}_1) \quad (10)$$

K : 粘性係数

(8)式に(4), (5), (6), (7), (9), (10)式を代入すると、 u_1, u_2, v_1 を未知数とする3本の基礎方程式が求まる。

$$\left(E_1 t_1 h_1 + \frac{E_2 t_1 h_2}{3} \right) u_1'' + K t_1 h_1 \dot{u}_1' + \frac{E_2 t_1 h_2}{6} u_2'' + \frac{E_2 t_1}{2 h_2} (u_2 - u_1) + \frac{E_2 t_1}{2} v_1' - \left(\rho_1 t_1 h_1 + \frac{\rho_2 t_1 h_2}{3} \right) \ddot{u}_1 - \frac{\rho_2 t_1 h_2}{6} \ddot{u}_2 = 0 \quad (11)$$

$$\frac{E_2 t_1 h_2}{6} (u_1' + 2u_2') + \frac{E_2 t_1}{2 h_2} (u_1 - u_2) - \frac{E_2 t_1}{2} v_1' - \frac{\rho_2 t_1 h_2}{6} (\ddot{u}_1 + 2\ddot{u}_2) = 0 \quad (12)$$

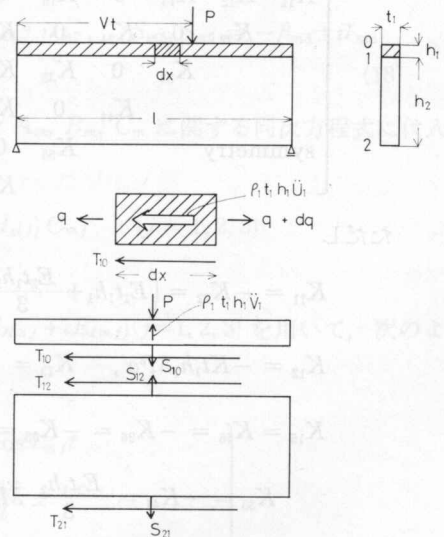


図-2 折板要素

Fig. 2. Folded plate element.

$$\frac{E_2 t_1}{2} (u'_2 - u'_1) + \frac{E_2 t_1 h_2}{2} v'_1 - (\rho_1 t_1 h_1 + \rho_2 t_1 h_2) \ddot{v}_1 = -P(x, t). \quad (13)$$

3. 解析理論

荷重 P が一定速度 V で走行した場合の特解を次のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} u_{1f} &= \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \left(C_1 \sin \frac{m\pi}{l} Vt + C'_1 \cos \frac{m\pi}{l} Vt \right) \cos \frac{m\pi}{l} x \\ u_{2f} &= \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \left(C_2 \sin \frac{m\pi}{l} Vt + C'_2 \cos \frac{m\pi}{l} Vt \right) \cos \frac{m\pi}{l} x \\ v_{1f} &= \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \left(C_3 \sin \frac{m\pi}{l} Vt + C'_3 \cos \frac{m\pi}{l} Vt \right) \sin \frac{m\pi}{l} x \\ P(x, t) &= \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} P \sin \frac{m\pi}{l} Vt \sin \frac{m\pi}{l} x \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

(14) 式を (11), (12), (13) 式に代入し、整理すると、(15) 式のような未知定数 C_1, \dots, C'_3 を定めるマトリックス方程式が求められる。この式を解いて得た $C_1 \dots C'_3$ の値を (14) 式に代入すると強制振動の解が得られる。

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & 0 & K_{15} & 0 \\ & K_{22} & 0 & K_{24} & 0 & K_{26} \\ & & K_{33} & 0 & K_{35} & K_{36} \\ & & & K_{44} & 0 & K_{46} \\ \text{symmetry} & & & & K_{55} & 0 \\ & & & & & K_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1^{(m)} \\ C'_1^{(m)} \\ C_2^{(m)} \\ C'_2^{(m)} \\ C_3^{(m)} \\ C'_3^{(m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

ただし

$$K_{11} = -K_{22} = \left(E_1 t_1 h_1 + \frac{E_2 t_1 h_2}{3} \right) M^2 - \left(\rho_1 t_1 h_1 + \frac{\rho_2 t_1 h_2}{3} \right) \alpha^2 + \frac{E_2 t_1}{2 h_2}$$

$$K_{12} = -K_{t_1 h_1} M^2 \alpha, \quad K_{13} = -K_{24} = \frac{E_2 t_1 h_2}{6} M^2 - \frac{\rho_2 t_1 h_2}{6} \alpha^2 - \frac{E_2 t_1}{2 h^2}$$

$$K_{15} = K_{46} = -K_{26} = -K_{35} = -\frac{E_2 t_1}{2} M,$$

$$K_{33} = -K_{44} = \frac{E_2 t_1 h_2}{3} M^2 - \frac{\rho_2 t_1 h_2}{3} \alpha^2 + \frac{E_2 t_1}{2 h_2}$$

$$K_{55} = -K_{66} = \frac{E_2 t_1 h_2}{2} M^2 - (\rho_1 t_1 h_1 + \rho_2 t_1 h_2) \alpha^2,$$

$$M = \frac{m\pi}{l}, \quad \alpha = \frac{m\pi}{l} V. \quad (m = 1, 2, 3 \dots)$$

固有振動については、解を次のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} u_{1i} &= \sum_{m=1}^{\infty} A_m e^{s m t} \cdot \cos \frac{m\pi}{l} x, & u_{2i} &= \sum_{m=1}^{\infty} B_m e^{s m t} \cdot \cos \frac{m\pi}{l} x, \\ v_{1i} &= \sum_{m=1}^{\infty} C_m e^{s m t} \cdot \sin \frac{m\pi}{l} x \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

上式を $P(x, t) = 0$ の基礎方程式に代入し A_m, B_m, C_m に関する係数行列をゼロとおくと

$$H_1 S_m^6 + H_2 S_m^5 + H_3 S_m^4 + H_4 S_m^3 + H_5 S_m^2 + H_6 S_m + H_7 = 0 \quad (m = 1, 2, 3 \dots) \quad (17)$$

ここで

$$H_1 = (1 + 4\bar{\tau})(1 + \bar{\tau}), \quad H_2 = 4M^2 \bar{\tau} c_1^2 T_1 (1 + \bar{\tau})$$

$$H_3 = 6 \frac{c_2^2}{h_2^2} (1 + \bar{\tau})^2 + M^2 \left[4(1 + \bar{\tau}) \{ (1 + \bar{\tau}) c_2^2 + \bar{\tau} c_1^2 \} - \frac{3}{2} c_2^2 \right]$$

$$H_4 = 6M^2 \bar{\tau} c_1^2 c_2^2 T_1 \left\{ M^2 \left(1 + \frac{2}{3} \bar{\tau} \right) + \frac{1}{h_2^2} (1 + \bar{\tau}) \right\}$$

$$H_5 = 6M^2 c_2^2 \left[\frac{1}{h_2^2} (c_2^2 + \bar{\tau} c_1^2) (1 + \bar{\tau}) + M^2 \left\{ c_1^2 \bar{\tau} \left(1 + \frac{2}{3} \bar{\tau} \right) + \frac{c_2^2}{3} \left(1 + \frac{3}{2} \bar{\tau} \right) \right\} \right]$$

$$H_6 = 2M^6 \bar{\tau} c_1^2 c_2^4 T_1, \quad H_7 = M^6 c_2^4 \left(\frac{c_2^2}{2} + 2\bar{\tau} c_1^2 \right)$$

$$c_1^2 = \frac{E_1}{\rho_1}, \quad c_2^2 = \frac{E_2}{\rho_2}, \quad T_1 = \frac{K}{E_1}, \quad \bar{\tau} = \frac{\rho_1 t_1 h_1}{\rho_2 t_2 h_2}$$

(17) 式の 6 次方程式の根は一般に 3 組の共役な複素根で求まる。すなわち

$$S_{m1}, S_{m2} = -\beta_{m1} \pm i\bar{\gamma}_{m1}, \quad S_{m3}, S_{m4} = -\beta_{m2} \pm i\bar{\gamma}_{m2}, \quad S_{m5}, S_{m6} = -\beta_{m3} \pm i\bar{\gamma}_{m3} \quad (18)$$

$S_{mj} = -\beta_{mj} + i\bar{\gamma}_{mj}$ に対応する A_{mj}, B_{mj} は, (18) 式を A_m, B_m, C_m に関する同次方程式に代入することにより

$$A_{mj} = (a_{mj} + ib_{mj}) C_{mj}, \quad B_{mj} = (c_{mj} + id_{mj}) C_{mj} \quad (j = 1, 2, 3)$$

となり C_{mj} を解くことにより A_{mj}, B_{mj} が求まる。

従って固有振動解は, 任意定数 E_{Rmj}, E_{Imj} ($2C_{mj} = E_{Rmj} + iE_{Imj}$) ($j=1, 2, 3$) を用いて, 次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} u_{1i} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^3 e^{-\beta_m j t} \left[(a_{mj} E_{Rmj} - b_{mj} E_{Imj}) \cos \bar{\gamma}_{mj} t \right. \\ &\quad \left. - (b_{mj} E_{Rmj} + a_{mj} E_{Imj}) \sin \bar{\gamma}_{mj} t \right] \cos \frac{m\pi}{l} x \\ u_{2i} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^3 e^{-\beta_m j t} \left[(c_{mj} E_{Rmj} - d_{mj} E_{Imj}) \cos \bar{\gamma}_{mj} t \right. \\ &\quad \left. - (d_{mj} E_{Rmj} + c_{mj} E_{Imj}) \sin \bar{\gamma}_{mj} t \right] \cos \frac{m\pi}{l} x \\ v_{1i} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^3 e^{-\beta_m j t} \left(E_{Rmj} \cos \bar{\gamma}_{mj} t - E_{Imj} \sin \bar{\gamma}_{mj} t \right) \sin \frac{m\pi}{l} x \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

なお, $\zeta_{1mj} = \sqrt{a_{mj}^2 + b_{mj}^2}$, $\zeta_{2mj} = \sqrt{c_{mj}^2 + d_{mj}^2}$, $\tan \theta_{1mj} = \left| \frac{b_{mj}}{a_{mj}} \right|$, $\tan \theta_{2mj} = \left| \frac{d_{mj}}{c_{mj}} \right|$ とおけば

$$\left. \begin{aligned} u_{1i} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^3 \zeta_{1mj} e^{-\beta_m j t} \left[E_{Rmj} \cos(\dot{\gamma}_{mj} t + \theta_{1mj}) - E_{Imj} \sin(\dot{\gamma}_{mj} t + \theta_{1mj}) \right] \cos \frac{m\pi}{l} x \\ u_{2i} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^3 \zeta_{2mj} e^{-\beta_m j t} \left[E_{Rmj} \cos(\dot{\gamma}_{mj} t + \theta_{2mj}) - E_{Imj} \sin(\dot{\gamma}_{mj} t + \theta_{2mj}) \right] \cos \frac{m\pi}{l} x \\ v_{1i} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^3 e^{-\beta_m j t} \left[E_{Rmj} \cos \dot{\gamma}_{mj} t - E_{Imj} \sin \dot{\gamma}_{mj} t \right] \sin \frac{m\pi}{l} x \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

となり(14)式と(19)式または(20)式より、変位解は $u_1 = u_{1f} + u_{1i}$, $u_2 = u_{2f} + u_{2i}$, $v_1 = v_{1f} + v_{1i}$ で与えられる。又、未知定数 E_{Rmj} , E_{Imj} ($j=1, 2, 3$) は初期条件 $u_1 = u_2 = v_1 = \dot{u}_1 = \dot{u}_2 = \dot{v}_1 = 0$ より定めることができる。

4. 数値計算

数値計算に用いた断面諸元は以下のとおりである。

$E_1 = 3.0 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$, $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $\rho_1 = 0.028 \text{ kg} \cdot \text{sec}^2/\text{cm}^2$, $\rho_2 = 0.080 \text{ kg} \cdot \text{sec}^2/\text{cm}^2$,
 $h_1 = 5 \text{ cm}$, $h_2 = 200 \text{ cm}$, $t_1 = 10 \text{ cm}$, $l = 30 \text{ m}$, $P = 1t$

図-3は、粘性による変化についてのグラフであり、垂直方向の中央点における影響線である。速度は、30 m/sec, 90 m/sec を示した。グラフにより粘性による影響は少ないと言えるが、いくらかは粘弾性層がある場合は、波形が $K=0 \text{ kg} \cdot \text{sec}/\text{cm}^2$ に比べ $K=50,000 \text{ kg} \cdot \text{sec}/\text{cm}^2$ の場合は多少なめらかに変化しているのがみられる。図-4は、同様に水平方向の中央点における影響線である。 $K=0$ と $50,000$ の比較において、水平方向は垂直方向に比べ明らかに高周波成分の減衰がみられる。図-5は、速度の変化による中央点での垂直方向の影響線である。速度が速くなるにしたがって、波形が複雑なものから単純な形(Bell Shape)へと移行し、たわみ量も増加し、応答も速度の増加にともなって遅れる傾向を示している。図-6は、同様に水平方向の影響線であるが垂直方向と同様に中央点では、応答が速度の増加にともなって遅れる結果となっている。また荷重の移動にともなって変位が正負の繰り返しを生じていることが分る。図-7は、支間中央における応力の影響線である。グラフにより中央点では、複雑に振動しながらも

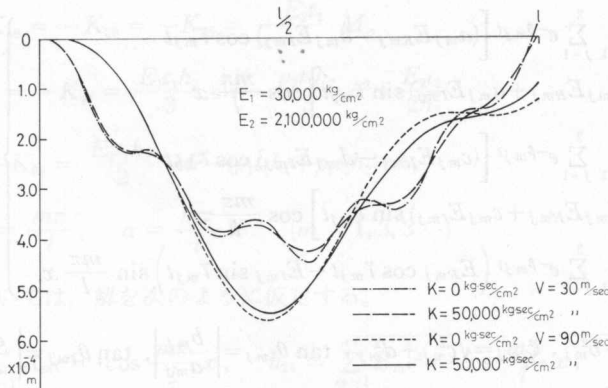


図-3 粘性による変化(垂直変位)

Fig. 3. Effects of viscosity variation on the deflection.

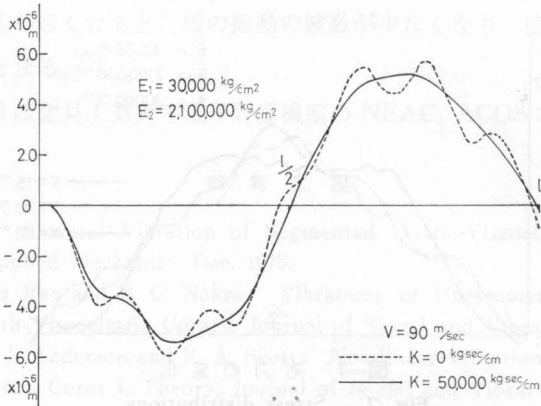


図-4 粘性による変化 (水平変位)

Fig. 4. Effects of viscosity variation on the horizontal displacement.

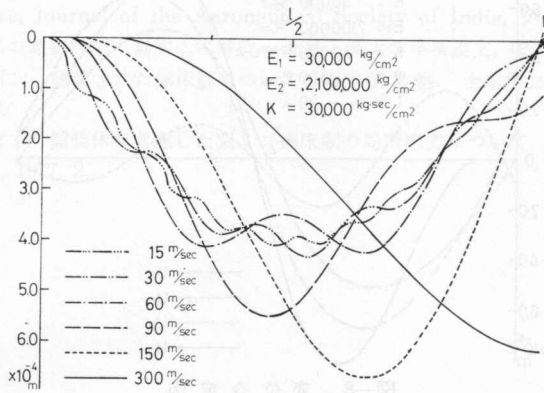


図-5 速度の変化 (垂直変位)

Fig. 5. Effects of velocity variation on the deflection.

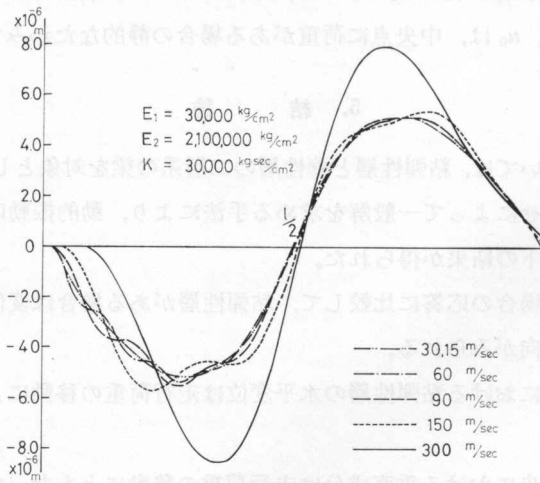


図-6 速度の変化 (水平変位)

Fig. 6. Effects of velocity variation on the horizontal displacement.

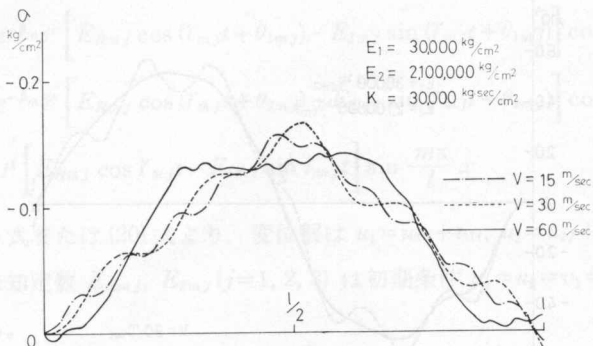


図-7 応力の変化

Fig. 7. Stress distributions.

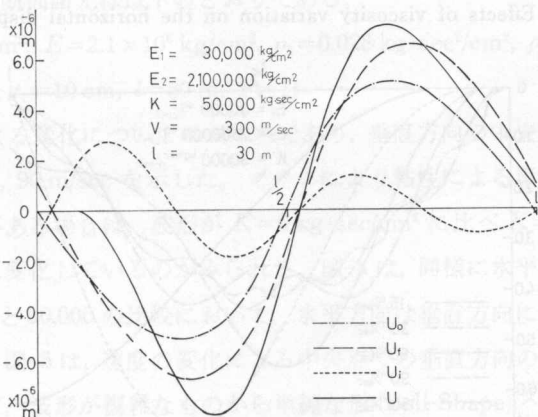


図-8 変位合成図

Fig. 8. Superposition of the components of the displacement.

圧縮状態となっている結果となった。図-8は、合成振動 u が、強制振動 u_f と固有振動 u_i との合成であることを示す。 u_0 は、中央点に荷重がある場合の静的なたわみである。

5. 結 論

以上、本論文においては、粘弾性層と弾性層の二層系の梁を対象として、固有振動成分と、強制振動成分の重ね合せによって一般解を求める手法により、動的振動応答解析を行なった。

それによると、以下の結果が得られた。

(1) 弾性層のみの場合の応答と比較して、粘弾性層がある場合は変位の応答において高周波成分が少なくなる傾向がみられる。

(2) 梁の支間中央における粘弾性層の水平変位は走行荷重の移動にともなって、正負の繰り返しが生ずる。

(3) 同様に支間中央における垂直成分は走行荷重の移動にともなって、Bell Shape に近い形状となる。

(4) 荷重走行速度が速くなると、梁の振動の波数が少なくなり、応答も速度も増加ともなっていて、遅れる結果となる。

本論文の数値計算は北見工業大学電子計算機室の NEAC, ACOS 300 により行なった。

参 考 文 献

- 1) Sandman, B. E.: Flexural Vibration of Segmented Elastic-Viscoelastic Sandwich Beams, Journal of Applied Mechanics, Dec. 1975.
- 2) Y. V. K. Sadasiva Rao and B. C. Nakra: Vibrations of Unsymmetrical Sandwich Beams and plates with Viscoelastic Cornes, Journal of Sound and Vibration, **34** (3), 1974.
- 3) Hyer, M. W., W. J. Anderson and R. A. Scott: Non-linear Vibration of Three-Layer Beams with Viscoelastic Cores I. Theory, Journal of Sound and Vibration, **46** (1), 1976.
- 4) Lu, Y. P. and B. E. Douglas: On the Forced Vibration of Three-layer Damped Sandwich Beams., Journal of Sound and Vibration, **32** (4), 1974.
- 5) Asnani, N. T. and B. C. Nakra: Forced Vibration Analysis of Sandwich Beams with Viscoelastic Core, Journal of the Aeronautical Society of India, Vol. 24, No. 2, May, 1972.
- 6) 仲野真市: 二層系の粘弾性梁の動的応答解析. 北見工業大学卒業論文, 1979.
- 7) 葦沢憲吉・芳村 仁: 舗装された鋼床版についての力学的考察. 土木学会北海道支部論文報告集, 第 35 号, 1979. 2.
- 8) 葦沢憲吉・芳村 仁: 舗装体を考慮した閉リブ鋼床版の局所応力について. 土木学会北海道支部論報告集, 第 33 号, 1977. 2.