

ハイブリッド位相進み補償器*

菊田 章**

神谷 祐二**

(昭和54年4月28日受理)

Hybrid Phase Lead Compensator

by Akira KIKUTA and Yuji KAMIYA

The problem of pole placement in the systems consisting of a plant with uncertain orders and a compensator in cascade is considered. And the hybrid compensator with a phase lead characteristic is proposed to solve this problem.

By using this compensator, the real parts of the poles in the system can be relocated in the appointed region.

1. ま え が き

筆者等は、先にモデル追従系¹⁾の出力追従精度を設定する問題は、制御対象と補償器によって形成される閉ループの極配置問題に変換されることを指摘し、これまで閉ループの全ての極を任意に設定するための補償器¹⁾、及び極の実数部を指定された領域に設定するための補償器²⁾のそれぞれの構成について報告した。しかし、これ等の補償器の設計においては、いずれの場合も、制御対象の次数が正確に同定されていることを前提としている。しかしながら、制御対象の入出力特性が伝達関数で表示される時、相対的に負に大なる極、及び零点は省略されていると考えるべきであろう。本論文は、このような省略項を含んだ次数のあいまいな制御対象に対して、極の実数部を指定された領域に設定する補償器の構成を提案しており、制御対象の省略項による極への影響をも論じている。

2. ハイブリッド位相進み補償器

制御対象は1入力1出力で、その入出力伝達関数を $G_0(S)$ 、補償器の入出力伝達関数を $G_c(S)$ として、Fig. 1 で示されるフィードバック系を構成する。このとき、閉ループの極の実数部を σ_i として

* 電気四学会北海道支部大会で発表 (昭和53年10月)

** 北見工業大学電気工学科

$$\sigma_i \leq -\mu \quad (1)$$

ここで、 μ は正の実数

を満足させる補償器 $G_c(S)$ の設計問題を考える。

Fig. 1 の系を

$$S = \bar{S} - \mu \quad (2)$$

として \bar{S} 平面に平行移動するとき、 \bar{S} 平面で Fig. 1 の系が安定ならば S 平面において (1) 式が成立することは明らかである。 \bar{S} 平面における安定判別にナイキストの安定判別法を適用するとき、補償器 $G_c(S)$ によって、イ) 位相を任意に進めることができ、ロ) ゲインを任意に設定できるならば、任意の制御対象 $G_0(S)$ に対して \bar{S} 平面で安定にできることは容易に判明する。今、イ), ロ) の特性を満たす補償器として

$$H(S) = K \left(1 + \sum_{i=1}^h R_i S^i \right) \quad (3)$$

を考える。(3) 式の補償器は R_i, h によって任意の位相進み特性、及び K によって任意のゲインを持つことができるが、アナログ要素で構成することは不可能であり、従ってデジタル要素で近似数値微分を行なわせることによって (3) 式の特性を満足させることにする。この場合、サンプリング周期を T とすると、 $0 \leq t \leq hT$ の間、補償器の出力は零となるので、この間の系の安定を保証し、さらに定常特性を考慮するとき、入力及び外乱が $(p-1)$ 次の多項関数で与えられるならば、補償器の伝達関数を P 形にしなければならない。以上の点に留意して、(1) 式を満足させる補償器として (4) 式に示されるハイブリッド位相進み補償器を提案する。

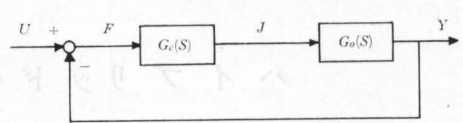


図-1 フィードバック系
Fig. 1. Feed back system.

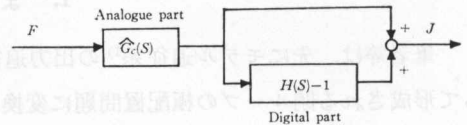


図-2 ハイブリッド補償器
Fig. 2. Hybrid compensator.

$$G_c(S) = \hat{G}_c(S) H(S) = \frac{\sum_{j=1}^{m+p} \beta_j S^j}{S^p \sum_{i=1}^m \alpha_i S^i} H(S) \quad (4)$$

ここで、 $\hat{G}_c(S)$ はアナログ要素で構成される部分で、定常特性を満足させ、かつデジタル要素の出力が零の期間の安定を保つ作用をするもので、その具体的な構成を Fig. 2 に示す。

3. 補償器の設計手順

以下においては例題を用いてハイブリッド位相進み補償器の具体的な設計手順を示す。制御対象の入出力伝達関数を

$$G_0(S) = \frac{1}{(0.5S+1)(2S+1)} \quad (5)$$

とし、入力をステップ関数とする。このとき、Fig. 1 の系を構成し $\mu=1.5$ で(1)式を満足させる補償器 $G_c(S)$ を求める。最初に、アナログ部 $\hat{G}_c(S)$ の設計を考える。(4)式において、入力がステップ関数であることから $p=1$ であり、アナログ部をできるだけ低次元で構成する観点から m は $0 \leq t \leq ht$ の期間(1)式において $\mu > 0$ を満足しさえすればよいとして求める。 m の一般的な求め方は繰返し計算によらなければならないが²⁾、制御対象の伝達関数が低次数の場合は簡単な筆算によって容易に求めることができる。この場合

$$\hat{G}_c(S) = \frac{1}{S} \quad (6)$$

とすると、閉ループの極は $(-2.25, -0.13 \pm j 0.65)$ となっている。次に(7)式で示されるように補償器のアナログ部と制御対象の直列合成伝達関数を $G(S)$ とする。

$$G(S) = \hat{G}_c(S) G_0(S) = \frac{1}{S(0.5S+1)(2S+1)} \quad (7)$$

$S = \bar{S} - 1.5$ を(7)式に代入して

$$G(\bar{S}) = \frac{1}{(\bar{S}+0.5)(\bar{S}-1)(\bar{S}-1.5)} \quad (8)$$

を得、さらに $\bar{S} = j\bar{\omega}$ として $G(j\bar{\omega})$ のナイキスト線図を描くと、Fig. 3 の線図 a となる。 $G(\bar{S})$ が不安定根を2個持つこと、及び(3)式に $S = \bar{S} - \mu$ を代入した

$$H(\bar{S}) = K \left[1 + \sum_{i=1}^h R_i (\bar{S} - \mu)^i \right] = K \left(1 + \sum_{i=1}^h \frac{1}{i!} L^i \bar{S}^i \right) \quad (9)$$

の零点が全て \bar{S} 平面の左半平面に存在することから $H(j\bar{\omega}) G(j\bar{\omega})$ のナイキスト線図が Fig. 3 の線図 b で示されるように点 $(-1, j0)$ のまわりを反時計方向に2回まわるとき、 \bar{S} 平面において系は安定となる。Fig. 3 における線図 b の特徴は、実軸上で -1 より負に大なる q 点を通過することである。従って、 $\bar{\omega} = \bar{\omega}_c$ における p 点 ($G(j\bar{\omega}_c)$ に対応) を q 点 ($H(j\bar{\omega}_c) G(j\bar{\omega}_c)$ に対応) まで移動するように $H(\bar{S})$ を決定すればよい。今、 $\bar{\omega}_c = 2$ とすると(8)式から $G(j\bar{\omega})$ の位相、及びゲインはそれぞれ

$$\angle G(j\bar{\omega}_c) = -319.4^\circ \quad (10)$$

$$|G(j\bar{\omega}_c)| = 0.086 \quad (11)$$

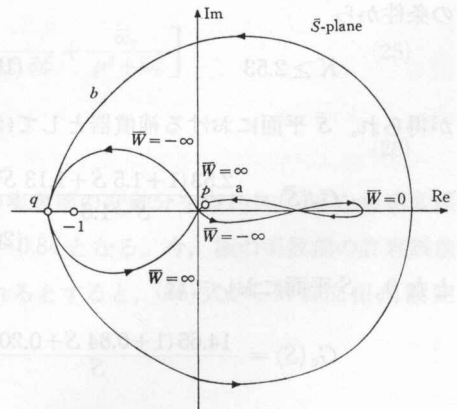


図-3 a, b はそれぞれ $G(j\bar{\omega})$, $H(j\bar{\omega}) \cdot G(j\bar{\omega})$ のナイキスト線図

Fig. 3. a and b show the Nyquist diagrams of $G(j\bar{\omega})$ and $H(j\bar{\omega}) \cdot G(j\bar{\omega})$ respectively.

となる。従って q 点に一致させるため $H(\bar{S})$ で補償すべき位相角 ϕ は

$$\phi = -180^\circ - (-319.4^\circ) = 139.4^\circ \tag{12}$$

となる。(9)式から $H(\bar{S})$ の最大位相進み角は $90^\circ \times h$ で与えられ、この場合 $h=2$ で十分である。従って $H(\bar{S})$ は

$$H(\bar{S}) = K(1 + L\bar{S} + L^2\bar{S}^2/2) \tag{13}$$

となる。

$$\hat{H}(\bar{S}) = 1 + L\bar{S} + L^2\bar{S}^2/2 \tag{14}$$

として $\hat{H}(j\omega)$ の位相特性、及びゲイン特性を $L\omega$ を横軸として Fig. 4 に示す。Fig. 4 において、位相進み角が 139.4° となる a 点を定めると、対応する b 点からこのときのゲイン

$$|\hat{H}(j\omega_c)| = 4.61 \tag{15}$$

が求まり、さらに

$$L\omega_c = 3 \tag{16}$$

を得る。(16)式から

$$L = 3/\omega_c = 1.5 \tag{17}$$

さらに

$$K |\hat{H}(j\omega_c)| \cdot |G(j\omega_c)| \geq 1 \tag{18}$$

の条件から

$$K \geq 2.53 \tag{19}$$

が得られ、 \bar{S} 平面における補償器としては

$$G_c(\bar{S}) = \frac{2.53(1 + 1.5\bar{S} + 1.13\bar{S}^2)}{\bar{S} - 1.5} \tag{20}$$

となり、 S 平面においては

$$G_c(S) = \frac{14.65(1 + 0.84S + 0.20S^2)}{S} \tag{21}$$

となる。具体的な補償器の構成を Fig. 5 に示す。Fig. 5 において、 $L[E(S)] = e(t)$ とすると、デジタル計算機においては

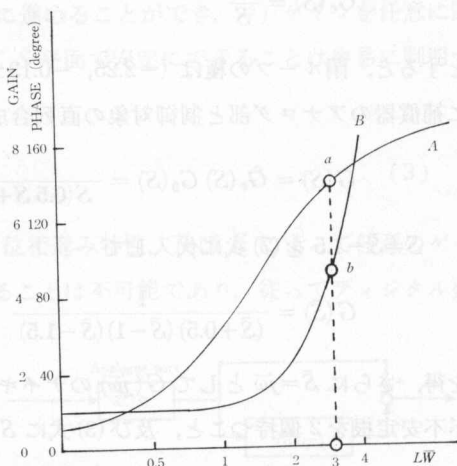


図-4 $\hat{H}(j\omega)$ の位相及びゲイン特性

Fig. 4. The phase and gain characteristics of $\hat{H}(j\omega)$.

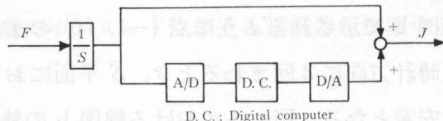


図-5 ハイブリッド補償器

Fig. 5. Hybrid compensator.

$$\begin{aligned}
 & 14.65 \left[e(t) + 0.84 \dot{e}(t) + 0.20 \ddot{e}(t) \right] - 1 \\
 & = 13.65 \left[e(t) + 0.90 \dot{e}(t) + 0.21 \ddot{e}(t) \right] \\
 & \doteq 13.65 \left[e(NT) + 0.90 \frac{3e(NT) - 4e[(N-1)T] + e[(N-2)T]}{2T} \right. \\
 & \quad \left. + 0.21 \frac{e(NT) - 2e[(N-1)T] + e[(N-2)T]}{T^2} \right] \quad (22)
 \end{aligned}$$

ここで、 T はサンプリング周期

の演算を行なう。

4. 誤差解析

本章においては、3章で示された例題を用いて、(12)式における位相進み補償角 ϕ の設定誤差、(22)式における近似微分、及び制御対象における省略項の極に対するそれぞれの影響を調べる。

4.1 位相進み補償角における設定誤差の影響

(8)式から、補償角 ϕ は μ 、 $\bar{\omega}_c$ を用いて

$$\begin{aligned}
 \phi & = -\pi - \angle G(j\bar{\omega}_c) \\
 & = \tan^{-1} \frac{2\bar{\omega}_c}{1-2\mu} + \tan^{-1} \frac{0.5\bar{\omega}_c}{1-0.5\mu} - \tan^{-1} \frac{\bar{\omega}_c}{\mu} \quad (\text{rad}) \quad (23)
 \end{aligned}$$

と書くことができる。(23)式から

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mu} = \frac{4\bar{\omega}_c}{(1-2\mu)^2 + 4\bar{\omega}_c^2} + \frac{0.25\bar{\omega}_c}{(1-0.5\mu)^2 + 0.25\bar{\omega}_c^2} + \frac{\bar{\omega}_c}{\mu^2 + \bar{\omega}_c^2} \quad (24)$$

が得られ

$$M = 1 / \left[\frac{4\bar{\omega}_c}{(1-2\mu)^2 + 4\bar{\omega}_c^2} + \frac{0.25\bar{\omega}_c}{(1-0.5\mu)^2 + 0.25\bar{\omega}_c^2} + \frac{\bar{\omega}_c}{\mu^2 + \bar{\omega}_c^2} \right] \quad (25)$$

とすると

$$\Delta\mu = M \cdot \Delta\phi \quad (26)$$

となる。ここで、 $\Delta\phi$ は補償角設定誤差、 $\Delta\mu$ は極の実数部の変動分を表わし、 M を極感度係数と呼ぶ。 $\mu=1.5$ 、 $\bar{\omega}_c=2$ を(25)式に代入すると $M=0.84$ となる。今、極の実数部の許容誤差を $\Delta\mu=-0.3$ とすると、すなわち $\mu=1.2$ まで許されるとすると、(26)式から許容位相角設定誤差は $\Delta\phi=-20.5^\circ$ となる。

4.2 近似微分誤差の影響

(14)式を時間領域における近似微分で処理する場合の誤差について調べる。 $\hat{H}(\bar{S})$ に対する入出力をそれぞれ $X(\bar{S})$ 、 $U(\bar{S})$ とし、それらの逆ラプラス変換を $x(t)$ 、 $u(t)$ とする。このとき

$$u(t) = x(t) + L\dot{x}(t) + L^2\ddot{x}(t)/2 \quad (27)$$

となるが、実際には

$$u(NT) = x(NT) + (2n+n^2) \left(x(NT) - x \left[(N-1)T \right] \right) - \frac{n+n^2}{2} \left(x(NT) - x \left[(N-2)T \right] \right) \tag{28}$$

ここで、 T はサンプリング周期、 $n=L/T$

なる近似微分が行なわれる。(28)式をラプラス変換すると近似微分を用いたときの伝達関数 $\hat{H}(\bar{S})$ が

$$\hat{H}(\bar{S}) = 1 + (2n+n^2) \left(1 - \varepsilon^{-\frac{L}{n}\bar{S}} \right) - \frac{n+n^2}{2} \left(1 - \varepsilon^{-\frac{2L}{n}\bar{S}} \right) \tag{29}$$

として求まる。 $\bar{S} = j\omega$ とした $\hat{H}(\bar{S})$ 、及び $\hat{H}(\bar{S})$ の位相特性、ゲイン特性における差が近似微分による誤差を意味し、その様子は Fig. 6 に示される。Fig. 6 から、ゲインは近似微分によってほとんど誤差が生じないこと、また位相においても n を大にすると、すなわち L に対してサンプリング周期 T を小さくするとき誤差が小さくなるのが判明する。従って近似微分におけるサンプリング周期 T は(26)式、及び Fig. 6 を考慮して決定されなければならない。 $L\bar{\omega}_c = 3, n = 150$ のとき、Fig. 6 から位相誤差は 0.9° となり、この場合、近似微分を用いることによる極の実数部の変動分は(26)式から $\Delta\mu = -0.013$ となるのがわかる。

4.3 制御対象における省略項の影響

制御対象の入出力伝達関数における省略

項の影響は、位相進み補償角設定誤差 $\Delta\phi$ と極の実数部の変動分 $\Delta\mu$ に関する(26)式の関係から論ずることができる。今、(5)式の制御対象において $1/(\alpha S + 1)$ 、ただし $\alpha < 1/1.5$ の項が省略されていたとする。省略項は \bar{S} 平面においては $1/(\alpha\bar{S} + 1 - \alpha\mu)$ となり $\bar{\omega} = \bar{\omega}_c$ における位相は

$$-\tan^{-1} \frac{\alpha\bar{\omega}_c}{1 - \alpha\mu} \tag{30}$$

となり、これが省略項の存在によって生じた位相進み補償角の設定誤差 $\Delta\phi$ となる。従って(26)式から省略項によって生じた極の実数部の変動分は

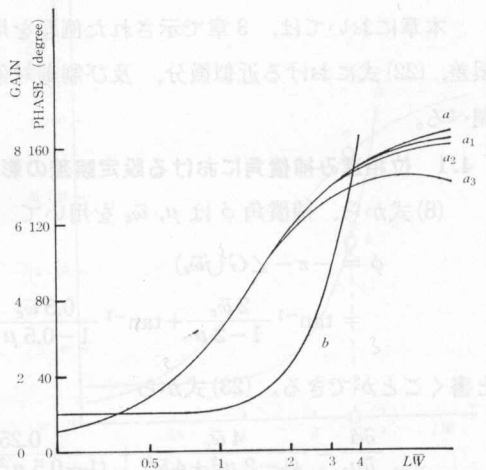


図-6 a, b は $\hat{H}(j\bar{\omega})$ の位相及びゲイン特性、 $a_i, i=1, 2, 3$ は $\hat{H}(j\bar{\omega})$ において $n=150, 75, 20$ の場合の位相特性

Fig. 6. a and b show the phase and gain characteristics of $\hat{H}(j\bar{\omega})$ respectively. $a_i, i=1, 2, 3$ show the phase characteristics of $\hat{H}(j\bar{\omega})$ in the cases of $n=150, 75$ and 20 , respectively.

$$4\mu = M \cdot \tan^{-1} \frac{\alpha \bar{\omega}_c}{1 - \alpha \mu} \tag{31}$$

となる。(31)式において $\bar{\omega}_c=2$, $\mu=1.5$, $4\mu=-0.3$ とすると $\alpha=0.146$ が得られる。すなわち(21)式の補償器を用いてフィードバック系を構成するとき、制御対象における $1/(0.140S+1)$ なる省略項の存在は、極の実数部の存在領域を $\mu=1.5$ から $\mu=1.2$ に変化させる。

5. 補償器設計パラメータ μ , $\bar{\omega}_c$ の設定

5.1 μ の設定

制御対象の伝達関数が例えば

$$G_0(S) = \frac{K(z_1 S + 1)}{(p_1 S + 1)(p_2 S + 1)} \quad (p_1 > p_2) \tag{32}$$

で与えられるとき、 $1/z_2 > 1/z_1$ なる零点、及び $1/p_3 > 1/p_2$ なる極が省略されていると見るべきである。 S 平面に平行移動したときに省略項の実数部の符号が変化しない条件から μ の上限が決定され

$$\mu < \min[1/z_2, 1/p_3] \tag{33}$$

となる。しかし、極感度係数 M は(25)式から μ の増加と共に大きくなり、 μ をあまり大きく設定すると省略項の影響が大きくなる。

5.2 $\bar{\omega}_c$ の設定

$\bar{\omega}_c$ を大きく設定すると、一般に補償すべき位相は小さくなり、(3)式における h を小さくすることができる。しかし μ の場合と同様に極感度係数 M は $\bar{\omega}_c$ の増加と共に大きくなり、省略項の影響が大きくなる。

6. モデル追従系

筆者等は、先にモデルの多項関数応答に追従する系として、Fig. 7 に示されるモデル追従系を提案した¹⁾。この系は、制御対象にパラメータ変動が存在しても、さらに多項関数で表わされる外乱が加わっても、補償器と制御対象で形成される閉ループの極の実数部によって

$$J = \int_{t_0}^{\infty} F^2(t) dt \quad (t_0 > 0) \tag{34}$$

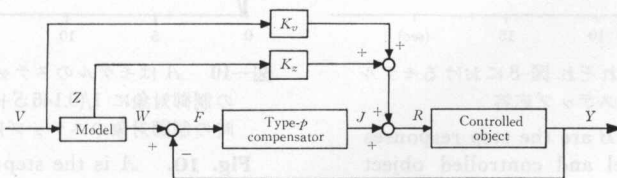


図-7 モデル追従系

Fig. 7. Model-following system.

で与えられる追従精度を任意の値に設定できる特徴を持っている。(4)式で示されるハイブリッド位相進み補償器を用いるとき、省略項が存在する場合の制御対象に対してもモデル追従系の構成が可能となる。本章では、3章で与えられた例題を用いて実際にモデル追従系を構成してみる。制御対象は(5)式で与えられるが、パラメータ変動分を考慮して

$$G_0(S) = \frac{1}{S^2 + (2.5 + \Delta p_1)S + (1 + \Delta p_0)} \tag{35}$$

ここで $[\Delta p_0, \Delta p_1] = [-0.2, -0.5]$

とし、望ましいステップ応答を示すモデルの伝達関数を

$$G_M(S) = \frac{1}{S+1} \tag{36}$$

とする。Fig. 5 に示される補償器を用いるとき、モデル追従系の全系は Fig. 8 に示される系となる。Fig. 9 は、Fig. 8 のモデル追従系をハイブリッド計算機でシュミレーションした結果をさらに Fig. 10 は、Fig. 8 の制御対象に $1/(0.146S+1)$ の項を付加した場合のシュミレーション結果をそれぞれ示しており、いずれも良い追従結果を得ている。

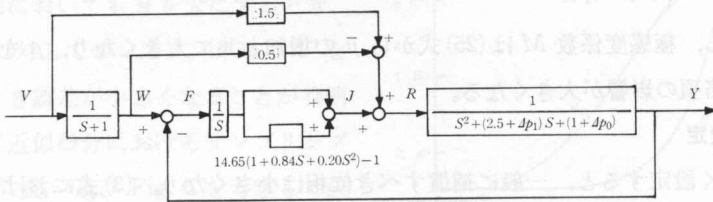


図-8 (35)式の制御対象に対するモデル追従系

Fig. 8. Model-following system to the controlled object of eq. (35).

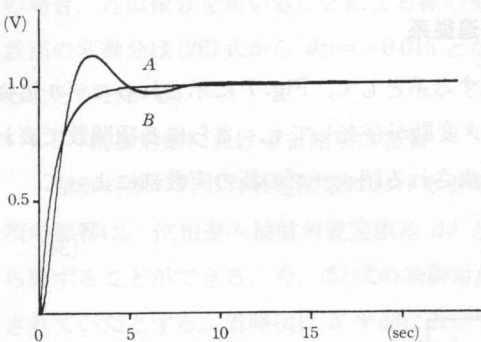


図-9 A, Bはそれぞれ図-8におけるモデル及び制御対象のステップ応答

Fig. 9. A and B are the step responses of the model and controlled object in Fig. 8.

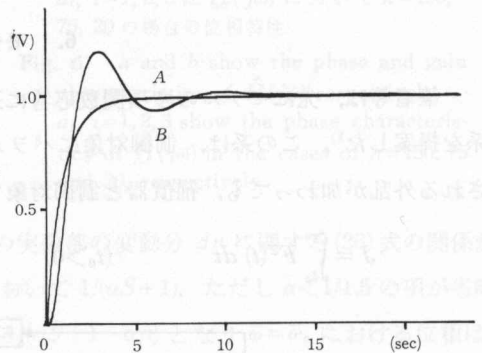


図-10 Aはモデルのステップ応答, Bは図-8の制御対象に $1/(0.146S+1)$ の項を付加した時の制御対象のステップ応答

Fig. 10. A is the step response of the model, and B is the step response of the controlled object connected the term $1/(0.146S+1)$ in cascade in Fig. 8.

7. 結 言

次数のあいまいな制御対象に対して、閉ループにおける極の実数部を指定された領域に設定するためのハイブリッド位相進み補償器を提案した。説明を簡単にするために具体的な例題を用いて補償器の設計や誤差の解析が行なわれたが、ここに示された設計手順は一般的な制御対象に対しても十分拡張できるものである。提案された補償器はモデル追従系¹⁾に直接適用することができ、モデル追従系をより実際的な設計法にしている。最後に、御討論を戴いた本学吉田公策助教授に深く感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) 神谷祐二：電学誌，Vol. 96，No. 9，p. 203-210 (1976).
- 2) 神谷祐二，西岡一美，坂口昌弘，菊田 章：モデル追従系における低次元補償器の設計 (北見工大研報，10巻1号).

1. 緒 言

電子部装置にある Cu, Cr, Fe, Co などの金属またはその錯体が有機-有機化合物と反応し、その金属と有機基質との錯合をつくること、あるいは有機基質が同様の錯合を形成する行なうことが知られている¹⁾。いくつかのコーバルト (II) 錯体が有機-有機化合物と反応の際に上記の反応を生じ、Co-C 結合をもつ有機-有機化合物をつくること²⁾が報告されている。しかしながら脂肪族アミンを配位子とするコーバルト錯体と有機-有機化合物の反応についての報告はまだ極めて少ない。さきに筆者らはテトラアミン³⁾、ジオクタミン⁴⁾、トリアレンテトラミン、テトラアレンペンタミン⁵⁾などの多環状アミン錯体 (III) 錯体と塩化ベンジルとの反応を試みたところ、テトラアミン錯体³⁾と塩化ベンジルの反応が生じ、ジベンジルが得られたことを報告した。本研究ではテトラアレンペンタミン (II) 錯体と塩化ベンジルの反応について同様な検討した結果について述べる。

* 北見工業大学工業化学科