

# 異方性正方形断面弾性波導波路における Longitudinal mode の分散特性および界分布\*

小柴正則\*\*

鈴木道雄\*\*\*

(昭和53年4月25日受理)

## Dispersion Characteristics and Field Distributions of Longitudinal Modes in Anisotropic Elastic Rods of Square Cross Section

by Masanori KOSHIBA and Michio SUZUKI

In this paper, the finite element method is applied to the problem of longitudinal wave propagation in various anisotropic elastic rods of square cross section. Dispersion characteristics and field distributions of longitudinal modes are presented for square rods of orthorhombic, tetragonal, hexagonal and cubic systems. It is confirmed by computer analysis that owing to the symmetry with respect to the diagonals the longitudinal mode in square rods of tetragonal, hexagonal and cubic systems separates into a longitudinal mode and a first screw mode, and Nigro's results for dispersion characteristics of longitudinal modes in square rods of tetragonal and cubic systems must be reinterpreted.

### 1. ま え が き

弾性表面波の通信, 情報工学への応用が盛んなるにつれ, その基本となる導波路の伝搬特性などについての解析法の開発が要求されるようになってきている。ところで, 一般に弾性波導波路の伝搬特性を厳密に解析することは極めて困難であるので, 導波路の基本形の一つである方形断面導波路に関しても, これまで種々の近似解法ならびに電子計算機を用いた数値解法が提案され, その固有モードについての解明が行われてきた<sup>1)~16)</sup>。

さて, 等方性の方形断面導波路におけるモードは, Lモード<sup>1)~5)</sup> (longitudinal mode), Fモード<sup>1),2),5)</sup> (flexural mode), Tモード<sup>1),2),5),6)</sup> (torsional mode) に分類されるが, とくに断面の形状が正方形の場合には, 対角線に関する対称性から, LモードはLモード<sup>1)~5),7)~12)</sup> と S<sup>1</sup>モード<sup>2),5),11),12)</sup> (first screw mode) に, TモードはTモード<sup>1),2),5),6),11)</sup> と S<sup>2</sup>モード<sup>2),5),11)</sup>

\* 電気学会電磁界理論研究会 (資料番号 EMT 75-10, 1975年6月), 電子通信学会マイクロ波研究会 (資料番号 MW 75-24, 1975年6月) で一部発表

\*\* 北見工業大学電子工学科

\*\*\* 北海道大学工学部電子工学科

(second screw mode) に分離する。又、異方性の方形断面導波路におけるモードも、媒質定数テンソルが斜方晶系の構造をなす場合には、Lモード<sup>(11),(13),(16)</sup>、Fモード<sup>(11),(14),(16)</sup>、Tモード<sup>(11),(15)</sup>に分類されることが知られているが、断面の形状が正方形であって、対角線に関する対称性が界方程式および境界条件を考慮しても保存されている場合には、等方性の場合と同様にLモードはLモードとS<sup>1</sup>モードに、TモードはTモードとS<sup>2</sup>モードに分離するものと考えられる。しかしながらこれまで、異方性の正方形断面導波路において、TモードがTモードとS<sup>2</sup>モードに分離する可能性があることについては数値的に確認されている<sup>(15)</sup>が、Lモードの場合については不明確になっている<sup>(13)</sup>と思われる。

そこで本論文では、有限要素法を用いて異方性正方形断面導波路のLモードについての解析を行い、まず、界分布についての計算結果からLモードがLモードとS<sup>1</sup>モードに分離する可能性があることを確認している。次に、分散特性についての計算結果を示すとともに、文献13)で定義されているbranch 1, branch 2, …なるモードがそのままでは、Lモード、S<sup>1</sup>モードに対応してはいない部分があることを指摘している。又、分散特性については等価回路法<sup>(16)</sup>による解析も行い、本論文の妥当性を確認している。なお、異方性方形断面導波路に対する有限要素法および等価回路法の適用方法については既に報告している<sup>(16)</sup>ので、ここでは解析結果のみを示すことにする。

## 2. 有限要素法による解析結果

### 2.1 異方性正方形断面導波路と要素分割

図-1に示すような正方形断面導波路を考え、弾性定数テンソルは斜方晶系の構造をなす(弾性定数  $c_{11}$ ,  $c_{12}$ ,  $c_{13}$ ,  $c_{22}$ ,  $c_{23}$ ,  $c_{33}$ ,  $c_{44}$ ,  $c_{55}$ ,  $c_{66}$  がことごとく異なり、これら以外の弾性定数が零である)ものとし、Lモード、すなわち粒子変位が  $x$  軸および  $y$  軸に関して対称となるモード<sup>(3),(12),(16)</sup>の考察を行う、又、変分法による結果<sup>(13)</sup>との比較の都合上、4種類の異方性媒質、topaz (斜方晶系)、NiSO<sub>4</sub> (正方晶系)、zinc (六方晶系)、copper (立方晶系) について解析を行うことにし、それぞれの弾性定数を表-1に示す。

さて、図-1に示すような正方形断面導波路に対して有限要素法を適用する場合には、系の対称性から要素分割は導波路断面の4分の1について行えばよいことになる<sup>(16)</sup>。そこで、導波路断面の4分の1について補間関数に1次形を用いた場合には図-2(a), (b)、2次形を用いた場合には図-2

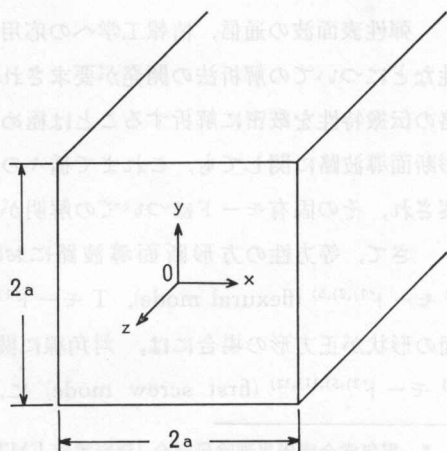


図-1 正方形断面弾性波導波路  
Fig. 1. An elastic rod of square cross section.

表-1 弾性定数 ( $\times 10^{11}$  dyn/cm<sup>2</sup>)Table 1. Stiffness constants ( $\times 10^{11}$  dyn/cm<sup>2</sup>)

	topaz (斜方 晶系)	NiSO <sub>4</sub> (正方 晶系)	zinc (六方 晶系)	copper (立方 晶系)
$c_{11}$	28.10	3.21	14.30	17.10
$c_{12}$	12.60	2.31	1.70	12.20
$c_{13}$	8.40	0.21	3.30	12.20
$c_{22}$	34.90	3.21	14.30	17.10
$c_{23}$	8.80	0.21	3.30	12.20
$c_{33}$	29.40	2.93	5.00	17.10
$c_{44}$	10.80	1.16	4.00	6.91
$c_{55}$	13.20	1.16	4.00	6.91
$c_{66}$	13.10	1.78	6.30	6.91

(c), (d)のごとく要素分割を行うことにする。このとき、図-2(a)~(d)における要素数はそれぞれ 16, 32, 4, 18, 節点数はそれぞれ 13, 25, 13, 47 である。

## 2.2 粒子変位の界分布

斜方晶系の正方形断面導波路においては、 $x$  軸および  $y$  軸に関する対称性が保存されているが、弾性定数テンソルが正方晶系、六方晶系、立方晶系の構造をなす場合には、この  $x, y$  軸に関する対称性の他に、対角線、すなわち  $y=x$  および  $y=-x$  に関する対称性が、境界方程式(運動の方程式、ひずみと変位の関係式、構成方程式) および境界条件を考慮しても保存されることになる。したがって、このような場合の L モードは、等方性の場合と同様に粒子変位が対角線に対称となる L モードと、対角線に対しては反対称となる S<sup>1</sup> モードに分離するものと考えられる。

図-3(a)~(d)はそれぞれ topaz, NiSO<sub>4</sub>, zinc, copper の場合における L モードの  $\beta a=1.0$  での断面内の変形を示したものである。ここで、点線は変形前の第 1 象限を示し、実線は粒子変位の断面内の成分の相対的な分布を示す。又、 $\beta$  は伝搬軸 ( $z$ ) 方向の位相定数、添字 0, 1, 2, ... はモードの次数を表し、L<sub>2</sub>, L<sub>3</sub>, ... の各モードの結果については省略している。

topaz の場合を除いて、粒子変位の各成分  $u_x, u_y, u_z$  は第 1 象限で考えると、L<sub>0</sub> モードについては

$$\left. \begin{aligned} u_x(x, y) &= u_y(y, x) \\ u_x(x, y) &= u_z(y, x) \end{aligned} \right\} (1)$$

L<sub>1</sub> モードについては

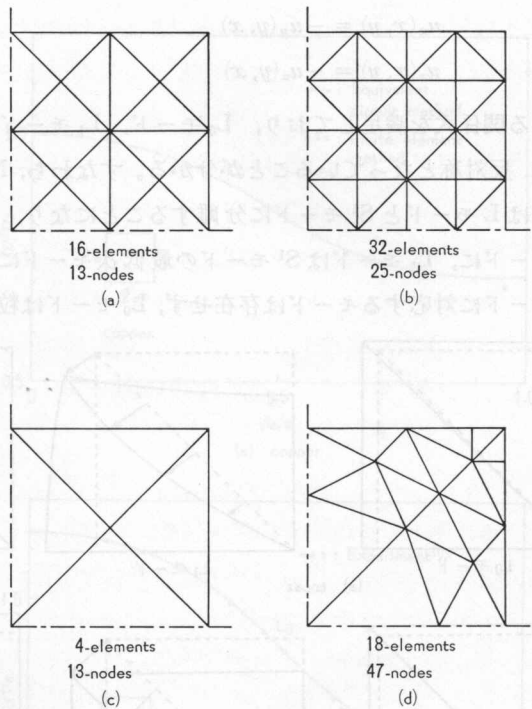


図-2 正方形断面導波路の要素分割

Fig. 2. Element divisions for a square rod.

$$\left. \begin{aligned} u_x(x, y) &= -u_y(y, x) \\ u_z(x, y) &= -u_z(y, x) \end{aligned} \right\} (2)$$

なる関係式を満足しており、 $L_0$  モード、 $L_1$  モードの粒子変位が、対角線に関してそれぞれ対称、反対称となっていることが分かる。すなわち、 $\text{NiSO}_4$ , zinc, copper の場合における  $L$  モードは  $L$  モードと  $S^1$  モードに分離することになり、この場合の  $L_0$  モードは  $L$  モードの最低次モードに、 $L_1$  モードは  $S^1$  モードの最低次モードに対応している。なお、topaz の場合には  $S^1$  モードに対応するモードは存在せず、 $L_0$  モードは粒子変位が  $x$  軸および  $y$  軸に関してのみ対称

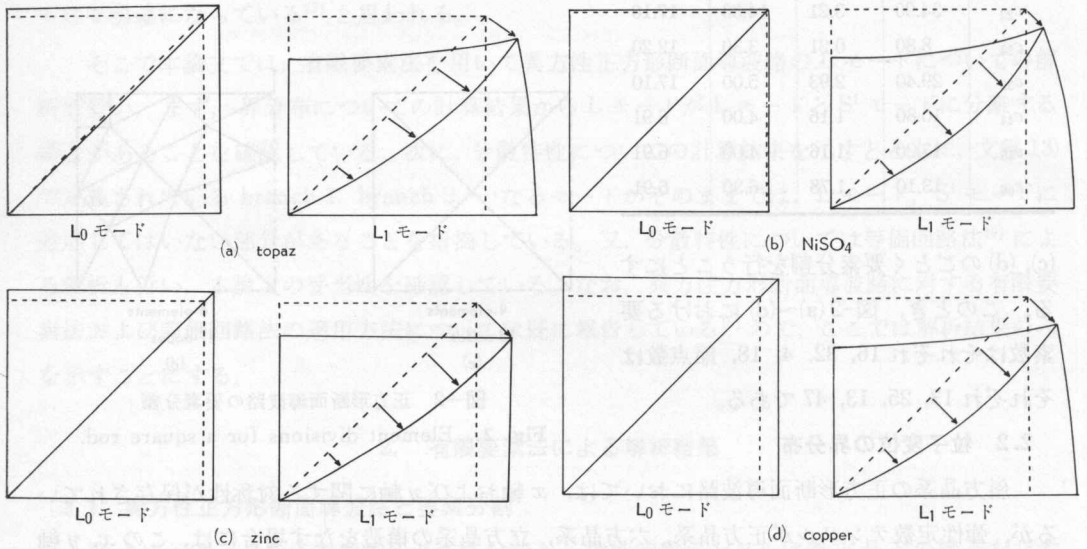


図-3 断面内第1象限における粒子変位の界分布 ( $\beta a = 1.0$ )

Fig. 3. Relative field distributions of particle displacements in the first quadrant of the cross section ( $\beta a = 1.0$ ).

表-2 立方晶系正方形断面導波路における  $L$  モードの分散特性 (copper)

Table 2. Dispersion characteristics of longitudinal modes in a square rod of cubic system (copper).

$\beta a$	図-2(a)		図-2(b)		図-2(c)		図-2(d)		文献 13)	
	$L_0$	$L_1$	$L_0$	$L_1$	$L_0$	$L_1$	$L_0$	$L_1$	branch 1	branch 2
0.1	1.002		1.002		1.002		1.001		1.001	
0.5	0.988	2.693	0.988	2.673	0.987	2.651	0.987		0.987	2.64
1.0	0.943	1.345	0.941	1.319	0.939	1.309	0.939	1.304	0.939	1.30
2.0	0.796	0.774	0.779	0.733	0.769	0.716	0.767	0.712	0.711	0.77
3.0	0.739	0.720	0.713	0.679	0.699	0.663	0.695	0.654	0.653	0.70
4.0	0.759	0.752	0.734	0.715	0.721	0.703	0.715	0.685	0.68	0.71
5.0	0.795	0.792	0.771	0.758	0.760	0.750	0.744	0.713	0.71	0.74
6.0							0.741	0.714	0.71	0.74
7.0							0.730	0.709	0.71	0.72

となる L モードの最低次モードに、 $L_1$  モードはその高次モードに対応することになる。

### 2.3 分散特性

表-2 は、図-2 (a)~(d) の要素分割を行って求められた copper の場合における L モードの分散特性を示したものであり、 $z$  方向の位相速度  $v$  が横波速度  $v_s = (c_{44}/\rho)^{1/2}$  で規格化されている。ここで、 $\rho$  は媒質密度である。比較のために Nigro の理論値<sup>13)</sup> を示したが、これは粒子変位の各成分を多項式展開し、変分法を適用することによって求められたものである。

表-2 から分かるように、補間関数に 2 次形を用いて図-2 (d) のように要素分割を行うと、 $L_0$  モード、 $L_1$  モードとも変分法による結果<sup>13)</sup> とよく一致した結果が得られる、すなわち、図-2 (d) の要素分割によって有限要素法による解は既に Nigro の理論値と同程度に収束していると考えられる、但し、文献 13) では、各々の  $\beta a$  の値に対して位相速度の遅い固有モードから番号をつけそれぞれ branch 1, branch 2, ... としており、L モードが  $L$  モードと  $S^1$  モードに分離する場合があることについては考慮されていないので、この branch 1, branch 2 なるモードがそのまま、それぞれ L モードの最低次モード、 $S^1$  モードの最低次モードに対応するものではないことに注意する必要がある。copper の場合、L モードの最低次モード、 $S^1$  モードの最低次モードの分散特性は、 $\beta a$  の小さなところで

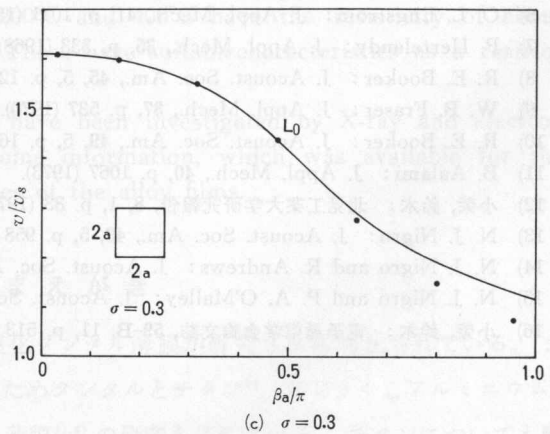
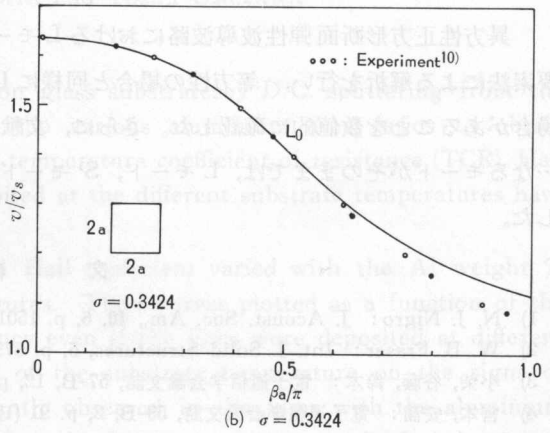
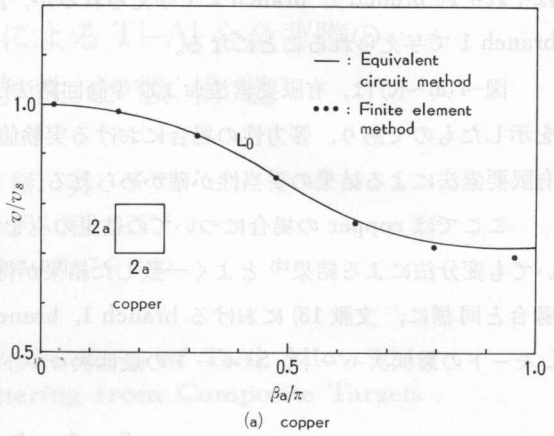


図-4 正方形断面導波路における  $L_0$  モードの分散特性

Fig. 4. Dispersion curves of  $L_0$  modes in square rods.

はそれぞれ branch 1, branch 2 で与えられるが,  $\beta a$  の大きなところではそれぞれ branch 2, branch 1 で与えられることになる。

図-4(a)~(c)は, 有限要素法および等価回路法<sup>16)</sup>によって求められた  $L_0$  モードの分散特性を示したものであり, 等方性の場合における実験値<sup>10)</sup> (ポアソン比  $\sigma=0.3424$ ) とも比較して, 有限要素法による結果の妥当性が確かめられる。

ここでは copper の場合についての結果のみを示したが, topaz,  $\text{NiSO}_4$ , zinc の場合についても変分法による結果<sup>13)</sup> とよく一致した結果が得られ,  $\text{NiSO}_4$  の場合については copper の場合と同様に, 文献 13) における branch 1, branch 2 なるモードがそのままでは, それぞれ  $L$  モードの最低次モード,  $S^1$  モードの最低次モードに対応してはいないことを付記しておく。

### 3. む す び

異方性正方形断面弾性波導波路における  $L$  モードの分散特性および界分布について有限要素法による解析を行い, 等方性の場合と同様に  $L$  モードが  $L$  モードと  $S^1$  モードに分離する場面があることを数値的に確認した。さらに, 文献 13) で定義されている branch 1, branch 2, ... なるモードがそのままでは,  $L$  モード,  $S^1$  モードに対応してはいない部分があることを指摘した。

### 文 献

- 1) N. J. Nigro: J. Acoust. Soc. Am., **40**, 6, p. 1501 (1966).
- 2) W. B. Fraser: Int. J. Solid Structures, **5**, p. 379 (1969).
- 3) 小柴, 谷藤, 鈴木: 電子通信学会論文誌, **57-B**, 12, p. 374 (1974).
- 4) 宮本, 安浦: 電子通信学会論文誌, **59-B**, 2, p. 91 (1976).
- 5) T. Miyamoto and K. Yasuura: IEEE-Trans., **SU-24**, 6, p. 369 (1977).
- 6) O. L. Engström: J. Appl. Mech., **41**, p. 1041 (1974).
- 7) P. Hertelendy: J. Appl. Mech., **35**, p. 333 (1968).
- 8) R. E. Booker: J. Acoust. Soc. Am., **45**, 5, p. 1284 (1969).
- 9) W. B. Fraser: J. Appl. Mech., **37**, p. 537 (1970).
- 10) R. E. Booker: J. Acoust. Soc. Am., **49**, 5, p. 1671 (1971).
- 11) B. Aalami: J. Appl. Mech., **40**, p. 1067 (1973).
- 12) 小柴, 鈴木: 北見工業大学研究報告, **8**, 1, p. 83 (1976).
- 13) N. J. Nigro: J. Acoust. Soc. Am., **43**, 5, p. 958 (1968).
- 14) N. J. Nigro and R. Andrews: J. Acoust. Soc. Am., **46**, 3, p. 639 (1969).
- 15) N. J. Nigro and P. A. O'Malley: J. Acoust. Soc. Am., **55**, 4, p. 718 (1974).
- 16) 小柴, 鈴木: 電子通信学会論文誌, **59-B**, 11, p. 513 (1976).