

## モデル追従系における低次元補償器の設計\*

菊 田 章\*\*  
坂 口 昌 弘\*\*\*  
西 岡 一 美\*\*\*\*  
神 谷 祐 二\*\*

(昭和53年4月28日受理)

### The Design of a Compensator with Lower Order in the Model-following System

by Akira KIKUTA, Masahiro SAKAGUCHI, Kazumi NISHIOKA  
and Yuji KAMIYA

As a feedback controlled system design technique, the model-following method was proposed in [1]. In the system designed by the application of this method, the differences between the outputs of a model and a controlled object are fed back via a compensator to the controlled object. In this case the output following accuracy is decided by the pole placement in the closed loop composed of the controlled object and the compensator.

In [1], the compensator was designed from relocating all the poles arbitrarily. It is, however, apparent that when the real parts of all the poles are in an appointed domain, the model-following system is satisfied with the output following accuracy.

In this paper, the design problem of the compensator with lower order is discussed from this point of view.

#### 1. 序 論

フィードバック制御系では、制御対象のパラメータが変化しその特性に変化を生ずることがあっても、制御系として重要な性質である目標値と制御量間の信号伝達特性は全く変化しないこと、更に制御対象に外乱が加わっても制御量にその影響を及ぼさないことが望ましい。

これらの要望を近似的に達成することのできる一般的な手段として、モデル追従系と名付けられた新しいシステム構成をフィードバック制御系の設計に適用することを提案<sup>1)</sup>した。

モデル追従系は、指定の入出力特性を持ったモデルの出力に制御対象の出力を追従させる

\* 電気四学会北海道支部大会で発表(昭和51年10月)

\*\* 北見工業大学電気工学科

\*\*\* 太平工業株式会社

\*\*\*\* 北見工業高等学校

もので、モデルと制御対象の出力差を補償器を通して制御対象にフィードバックする構造になっている。このとき、出力追従精度は、制御対象と補償器によって形成される閉ループ系の極配置によって決定されることが明らかにされ、全ての極を任意に設定することのできる補償器の構成が示された。しかし、出力追従精度を設定するとき、全ての極を個々に指定する必要はなく、極の実数部の存在範囲を指定するだけで十分である<sup>2)</sup>。本論文は、この観点から補償器の低次元化が可能であることを論じ、低次元補償器を設計するためのアルゴリズムを与えている。

### 2. モデル追従系

本章においては、文献 [1] で示されたモデル追従系を証明なしで簡単に述べる。制御対象は 1 入力 1 出力で (1) 式の正準形で与えられるものとする。

$$\begin{aligned} \dot{X} &= (P + \Delta P) X + QR + N_1 \\ Y &= (D + \Delta D) X + N_2 \end{aligned} \tag{1}$$

ここで、 $X$  は  $n$  次元状態ベクトル、 $R$  はスカラー入力、 $Y$  はスカラー出力、 $Q, P, D$  はそれぞれ  $(n \times 1), (n \times n), (1 \times n)$  のパラメータ測定値からなるマトリクス、 $\Delta P, \Delta Q$  はパラメータ変動分を表わすマトリクスでそれぞれ

$$P + \Delta P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ p_0 + \Delta p_0 & \dots & \dots & \dots & p_{n-1} + \Delta p_{n-1} \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D + \Delta D = [d_0 + \Delta d_0 \quad \dots \quad d_{n-1} + \Delta d_{n-1}]$$

として与えられ、 $N_1$  は  $n$  次元外乱ベクトル、 $N_2$  はスカラー外乱で、それぞれ  $(p-1)$  次の多項関数で表わされるものとする。(1) 式の制御対象が可制御であることは明らかであるが、更に

- (1) 対  $[P + \Delta P, D + \Delta D]$  は可観測である。
- (2)  $\text{rank} \left[ \begin{array}{c|c} P + \Delta P & Q \\ \hline D + \Delta D & 0 \end{array} \right] = n + 1$

の条件を満足し、出力  $Y$  だけを直接観測できるものとする。次に望ましい多項関数応答を示す  $m$  次のモデルを (3) 式の正準形で与え、その伝達関数は 0 形\*1 とする。

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= AZ + BV \\ W &= CZ \end{aligned} \tag{3}$$

ここで、 $Z$  は  $m$  次元状態ベクトル、 $V$  はスカラー入力、 $W$  はスカラー出力、 $A, B, C$  はそれぞれ  $(m \times m), (m \times 1), (1 \times m)$  のマトリクスで

\*1 モデルが L 形伝達関数のとき、Fig. 1 における補償器を (P+L) 形として同じ結果を得る。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & & 1 \\ a_0 & \dots & \dots & \dots & a_{m-1} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [c_0 \dots c_{m-1}]$$

として与えられ、入力  $V$  は  $(p-1)$  次の多項関数で与えられるものとする。モデルにおいては、出力  $W$  及び全ての状態  $Z$  を直接観測できるものとする。今、入出力伝達関数が

$$G_c(S) = \frac{\sum_{j=0}^{n+p-1} \beta_j S^j}{S^n (S^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i S^i)} \quad (4)$$

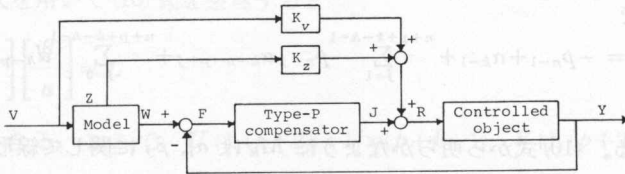


図-1 モデル追従系

Fig. 1. The model-following system.

で与えられる P 形補償器を用いて Fig. 1 の系を構成する。このとき、P 形補償器と制御対象によって形成される閉ループの  $(2n+p-1)$  個の極は、補償器係数  $\alpha_i, \beta_j$  によって任意に設定することができる。Fig. 1 の系においては、(1) 補償器が P 形であることによって

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 0 \quad (5)$$

すなわち定常追従誤差を零とすることができ、(2) 閉ループの極配置によって

$$\int_{t_0}^{\infty} F^2(t) dt \leq \delta \quad (6)$$

ここで、 $t_0 > 0, \delta$  は任意の正の実数

の関係を満足させることができる。(6) 式は、モデルの出力に対する制御対象の出力追従精度を定義するものと見なすことができ、結局パラメータ変動や外乱が存在しても、P 形補償器の係数設定によって任意の追従精度で指定されたモデルの出力に制御対象の出力を追従させることができる。Fig. 1 の系をモデル追従系と称する。

### 3. P 形補償器次数の低減

前章において、出力追従精度は Fig. 1 に示される閉ループの極配置によって決定されることを述べたが、(6) 式で定義された出力追従精度を得るためには、補償系の全ての極を個々に設定する必要はなく、補償系の極の実数部を  $\sigma_i$  とするとき

$$\sigma_i \leq \mu \quad (7)$$

ここで、 $\mu$  は負の実数

の関係を満足すればよい。今、(8)式で与えられる  $(p+k)$  次の P 形補償器を考える。

$$G_c(S) = \frac{\sum_{j=0}^{p+k} \beta_j S^j}{S^p (S^k + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i S^i)} \quad (8)$$

但し  $(n-1) \geq k$

この場合、変動分を無視した閉ループ系の特性方程式は

$$H(S) = S^{n+p+k} + \sum_{h=0}^{n+p+k-1} M_h S^h = 0 \quad (9)$$

ここで

$$M_h = -p_{n-1} + \alpha_{k-1} + \sum_{j=1}^{n+p+k-h-1} p_{n-j} \alpha_{h-n-p+j} + \sum_{j=0}^{n+p+k-h-1} d_{h-p-k+j} \beta_{p+k-j} \quad (10)$$

と書くことができる。(10)式から明らかのように  $M_h$  は  $\alpha_i, \beta_j$  に関して線形であり、従って、(9)式を  $\alpha_i, \beta_j$  について整理すると

$$H(S) = \sum_{j=0}^{p+k} \xi_j(S) \beta_j + \sum_{j=1}^{k-1} \zeta_j(S) \alpha_j + \eta(S) = 0 \quad (11)$$

ここで

$$\eta(S) = S^{n+p+k} - \sum_{i=1}^n p_{n-i} S^{n+p+k-i} \quad (12)$$

$$\zeta_j(S) = S^{n+p-j} - \sum_{i=0}^n p_{n-i} S^{n+p+j-i} \quad (13)$$

$$\xi_j(S) = \sum_{i=1}^n d_{n-i} S^{n+j-i} \quad (14)$$

と書くことができる。ここで、(9)式の特性方程式を  $S = \bar{S} + \mu$  として  $\bar{S}$  平面に平行移動する。このとき

$$H(\bar{S} + \mu) = 0 \quad (15)$$

の全ての根の実数部が負ならば、 $S$  平面における(9)式の根の実数部は(7)式を満足する。従って、低次元補償器を求める問題は、(15)式が安定根を持つための最小な次数  $k$ 、及び係数  $\alpha_i, \beta_j$  を求める問題に変換される。この問題は、フルビッツの判別法を適用することによって解くことができるが、計算機を利用した補償器の自動設計には適さないこと、次数  $k$  が大きくなると  $\alpha_i, \beta_j$  の個数が増すと計算が困難となる欠点がある。

従って、本稿では(15)式が補償器係数  $\alpha_i, \beta_j$  の個数だけ零の重根、すなわち零の  $(p+2k+1)$  重根を持つ制約の下でフルビッツの判別法を適用する。この場合、得られた結果は(15)式が安定根を持つための十分条件となるが、補償器の自動設計が容易となる利点を持っている。(9)式に  $S = \bar{S} + \mu$  を代入して

$$H(\bar{S} + \mu) = \sum_{r=0}^{n+p+k} (H^{(r)}(\mu)/r!) \bar{S}^r = 0 \tag{16}$$

を得る。ここで、 $H^{(r)}(\mu)$  は制御対象の入出力伝達関数を  $D(S)/P(S)$  とすると

$$\begin{aligned} H^{(r)}(\mu) &= \left. \frac{\partial^r H(S)}{\partial S^r} \right|_{s=\mu} = \sum_{j=0}^{p+k} \xi_j^{(r)}(\mu) \beta_j + \sum_{j=0}^{k-1} \zeta_j^{(r)}(\mu) \alpha_j + \eta^{(r)}(\mu) \\ &= \sum_{j=0}^{p+k} \left[ S^j D(S) \right]_{s=\mu}^{(r)} \beta_j + \sum_{j=0}^{k-1} \left[ S^{p+j} P(S) \right]_{s=\mu}^{(r)} \alpha_j + \left[ S^{p+k} P(S) \right]_{s=\mu}^{(r)} \end{aligned} \tag{17}$$

として表わされることが出来る。(16)式が零の  $(p+2k+1)$  重根を持つ条件から

$$H^{(r)}(\mu) = 0, \quad r = 0, \quad \dots, \quad p+2k \tag{18}$$

が得られ、(17)式を用いて(18)式を整理すると

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix} = \mathbf{L} \tag{19}$$

と書くことができる。ここで、 $\mathbf{U}$  は  $(p+2k+1) \times (p+k+1)$ 、 $\mathbf{V}$  は  $(p+2k+1) \times k$ 、 $\mathbf{L}$  は  $(p+2k+1) \times 1$  の行列で、それらの要素はそれぞれ

$$u_{ij} = \left[ S^{j-1} D(S) \right]_{s=\mu}^{(i)} \tag{20}$$

$$v_{ij} = \left[ S^{p+j} P(S) \right]_{s=\mu}^{(i)} \tag{21}$$

$$l_i = \left[ S^{p+k} P(S) \right]_{s=\mu}^{(i)} \tag{22}$$

で与えられる。この結果(16)式は

$$H(\bar{S} + \mu) = \bar{S}^{p+2k+1} \sum_{r=0}^{n-k-1} \left( H^{(p+2k+r+1)}(\mu)/(p+2k+r+1)! \right) \bar{S}^r \tag{23}$$

となり、(19)式から求められた  $\alpha_i, \beta_j$  を代入すると各係数は定数となる。従って、(23)式にフルビッツの判別法を適用し、もし(23)式が安定ならば(9)式は、(7)式を満足することを意味し、もし(23)式が不安定ならば補償器次数  $k$  を増して以上の手順を繰り返す。以上の結果をフローチャートで表わすと Fig. 2 となる。

#### 4. 実験結果

制御対象は、(24)式で与えられ、外乱は存在しないものとする。

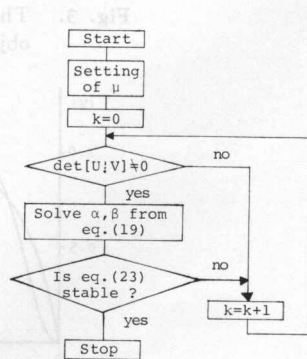


図-2 フローチャート

Fig. 2. Flow chart.



$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -(21+\Delta p_0) & -(17+\Delta p_1) & -(6+\Delta p_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} R$$

$$Y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \tag{24}$$

ここで  $[\Delta p_0, \Delta p_1, \Delta p_2] = [2.1, -1.7, 0.6]$

指定の特性を示すモデルは

$$\begin{aligned} \dot{Z}_1 &= -Z_1 + V \\ W &= Z_1 \end{aligned} \tag{25}$$

与えられ、 $V$  はステップ関数とする。この場合、文献 [1] から  $K_s=9, K_v=12$  が得られる。補償器を 1 形として、 $\mu=-2$  に設定したとき Fig. 2 のフローチャートに従って、次数  $k$  及び補償器係数は

$$\begin{aligned} k &= 1 \\ \alpha_0 &= 4.5 \\ [\beta_0, \beta_1, \beta_2] &= [40, 1.5, -5.5] \end{aligned} \tag{26}$$

として得られる。従って、モデル追従系は Fig. 3 となる。

Fig. 4 の実験結果は Fig. 3 の系をアナログ計算機で構成して得られたもので、 $A$  はモデ

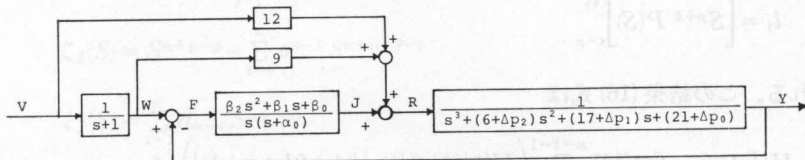


図-3 (24) 式の制御対象に対するモデル追従系

Fig. 3. The model-following system to the controlled object of eq. (24).

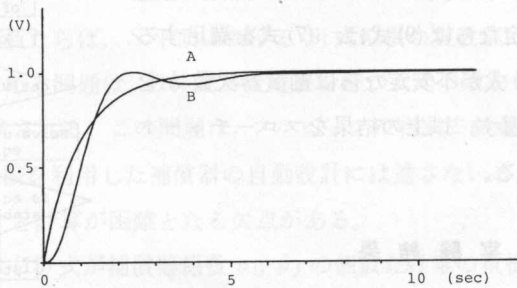


図-4 A は (25) 式の  $W$  のステップ応答, B は Fig. 3 における  $Y$  のステップ応答

Fig. 4. A and B show the step responses of  $W$  in eq. (25) and  $Y$  in Fig. 3 respectively.

ルの出力  $W$  のステップ応答,  $B$  は Fig. 3 における  $Y$  のステップ応答を示している。

なお, 補償器係数を (26) 式で与えた時, パラメータ変動分を無視した場合の閉ループ系の極は  $[-2, -2, -2, -2, -2.5]$  となっている。

### 5. 結 言

モデル追従系を構成するとき, 補償器次数を低減することによっても任意の出力追従精度が得られることを論じ, そのアルゴリズムを示した。

### 参 考 文 献

- 1) 神谷祐二: 電学誌, **96**, 9, p. 203-210 (1976).
- 2) 神谷祐二, 西岡一美: 昭和 51 年度電気四学会北海道支部連合大会講演論文集, **97** (昭和 51 年 10 月).

by Masayoshi KOSHIMA and Michio SUZUKI

In this paper, the finite element method is applied to the problem of longitudinal propagation in various anisotropic elastic rods of square cross section. Dispersion curves and field distributions of longitudinal modes are presented for square, orthorhombic, tetragonal, hexagonal and cubic systems. It is confirmed by an analysis that owing to the symmetry with respect to the diagonals the local mode in square rods of tetragonal, hexagonal and cubic systems separates longitudinal mode and a first screw mode, and Nigro's results for dispersion curves of longitudinal modes in square rods of tetragonal and cubic systems are reinterpreted.

### 1. ま え が き

近年の通信, 情報工業への応用が盛んなるにつれ, その基本となる電磁波の伝播特性についての解析法の開発が要求されるようになってきている。とくに導性伝導媒質特性を厳密に解析することは極めて困難であるので, 導波路の基本形の一つである方角波導に関するも, これまで厳密の近似解法ならびに電子計算機を用いた数値解法がその固有モードについての説明が行われてきた<sup>1)</sup>。

この等方性の方角波導導波路における L モードは, L モード (longitudinal mode), F モード (flexural mode), T モード (torsional mode) と分類されるが, とくに正方形の導波路には, 対角線に関する対称性から, L モードは L モード (L<sub>1</sub>モード) と L モード (L<sub>2</sub>モード) (first screw mode) と, T モードは T モード (T<sub>1</sub>モード) と T モード (T<sub>2</sub>モード)

<sup>1)</sup> 電学学会電磁波伝播研究会 (資料番号 EMT 73-10, 1973年4月号), 電子工学学会電子工学部研究会 (資料番号 249 73-24, 1973年6月号) 一節参照。

<sup>2)</sup> 東京工業大学電子工学部

<sup>3)</sup> 東京工業大学工学部電子工学科