

平面金属基板上の塗膜の指向単色ふく射率*

馬場 弘**

金山 公夫**

(昭和 53 年 4 月 28 日受理)

Directional Spectral Emittance of the Coating Film on a Flat Metal Substrate

by Hiromu BABA and Kimio KANAYAMA

An investigation on the emissive property of the coating film-metal substrate system, with attention to the thermal radiation inside the medium, is performed to derive an equation of the directional spectral emittance in connection with optical constants and film thickness, and then the analytical solution is compared with the measured values of a coated surface on aluminum plate. In the range $0 < k_1 \leq 0.1$, the emissive property of the coating film on a metal can be considered as a function of dimensionless optical thickness τ . When $\tau \geq 0.25$, the emittance of a coating film on the metal agrees with that of the calculated value from Fresnel's formula, and for $\tau < 0.25$, the emittance decreases by an influence of the emissive property of metallic substrate with decreasing τ . In the wavelength region from 3 to 8 microns, the calculated values coincide with the measured values of surfaces with silicon-orange paint and acrylic-melamine resin.

1. まえがき

平滑な金属基板上の金属酸化物の誘電体被膜または塗装膜からなる系における反射率、ふく射率、吸収率及び透過率など多くの熱ふく射性質が、それらの光学定数、塗膜厚さ、金属基板の電気的性質に関連して研究されている。たとえば Francis and Love¹⁾ は屈折率の影響を調べるために誘電体中への金属からの指向単色ふく射率及び金属表面の塗膜の指向単色ふく射率について解析解を報告している。Ruiz-Urbieta ら^{2)~5)} は種々の入射角における単色反射率の解析から、金属基板上の薄い透明膜及び吸収膜の光学定数及び膜厚を推定する方法を展開し、その結果を二、三の測定値と比較した。Williams ら⁶⁾ は、もし半導体の膜が高い空隙率を有するならば、その光学的性質は改良され得ることを理論的に研究し、波長選択性が特殊な PbS 膜によって実験的に得られ、それは太陽光線の吸収に有効であることを示した。

* AIAA 热物理会議 (デンバー、コロラド、1975-5) 及び第 12 回日本伝熱シンポジウム (昭和 50 年 5 月 福岡) で発表

** 北見工業大学

著者ら⁷⁾はまた、誘電体塗膜の平面及び粗面の指向単色ふく射率の解析を行ない、その計算値は全般に黒体比的法で得られた実験結果と良く一致した。本実験では試験片としてアルミニウム板上の塗装面が用いられた。塗装面のふく射性質は塗膜厚さとともに変化し、膜厚0.2 mmより薄い明色の塗装面の指向単色ふく射率は、金属基板の影響で特に波長4~8ミクロンで激しく変化する。この報告では誘電体塗膜と金属基板から成る系の指向単色ふく射率が塗膜と金属内部から射出されるふく射に注目して解析され、得られた式に適当な光学定数と膜厚を代入して算出された結果から、特定な波長範囲で指向単色ふく射率が著しく変化する現象が良く説明されることを述べている。

2. 記号

d: 塗膜厚さ

k: 消衰係数

n: 複素屈折率 ($=n - ik$)

λ : ふく射の波長

ρ : 反射率

ϕ : 入射、反射及び射出の角度

肩文字

(+): 前向き方向

I: ふく射強度

n: 屈折率

ϵ : ふく射率

ν : 吸収係数 ($=4\pi nkd/\lambda \cos \phi$)

τ : 無次元光学厚さ ($=nkd/\lambda$)

添字

0, 1, 2: 空気、塗膜、金属基板の各媒質

01, 12: 媒質0, 1及び2の各境界

(10), (20): 媒質0~1及び0~2へ射出する各ふく射

b: 黒体

p, s : 入射面に平行及び直角に振動する各成分

λ : 単色値

3. 理論解析

解析に用いられた座標と物理系を図-1に模式的に示す。系は金属基板と均一厚さの誘電体塗膜から成っている。簡単のために誘電体塗膜と金属基板は等温、等方性及び均質で、塗膜表面及び塗膜と金属との境界面は光学的に平面であると仮定する。この物理モデルにおいて塗装面から空気(または真空)へ射出されるふく射強度 I'_1 は、塗膜内で射出され境界01を貫ぬくふく射成分 $I'_{\lambda(10)}$ と、金属内から射出され境界12を貫ぬき塗膜を伝播した後、境界01をもう一度貫ぬく他のふく射成分 $I'_{\lambda(20)}$ の和である。さらに塗膜内で射出されたふく射は伝播方向によって二つの成分に別けられ、一つは塗装表面の方向に向かう前向き成分 $I'^{(+)}_{\lambda(10)}$ で他は金属表面の方向に向かう後向き成分 $I'^{(-)}_{\lambda(10)}$ である。ゆえに次の式が成立する。

$$I'_1 = I'^{(+)}_{\lambda(10)} + I'^{(-)}_{\lambda(10)} + I'_{\lambda(20)} \quad (1)$$

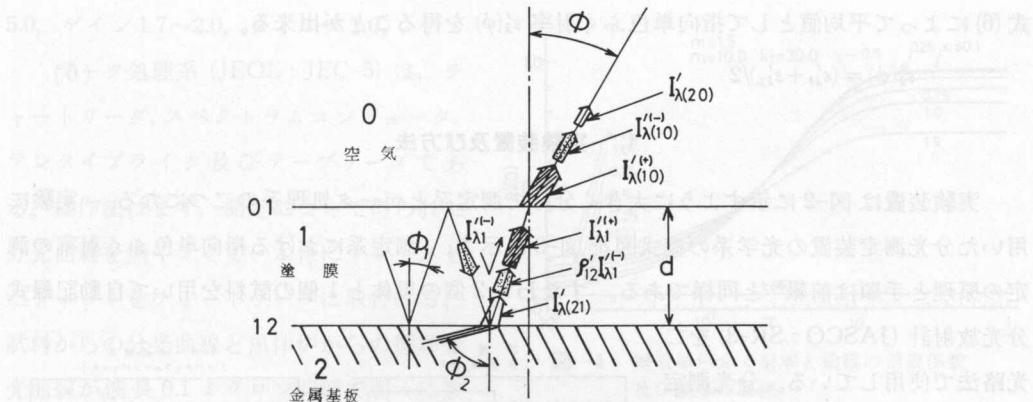


図-1 塗膜-金属系のモデルと座標系

Fig. 1. Model of the coating film-metal substrate system and these coordinates.

ここで塗膜の吸収係数を考慮して膜内を伝播するふく射ビームは二つの境界面の多重反射として取扱われる。

前向きふく射成分 $I_{\lambda(10)}^{\prime(+)}$ に起因する塗装面のふく射強度は、塗装表面から直接射出される第一次成分と多重反射によって伝達される第二次以上の成分の和として得られる。すなわち

$$\begin{aligned} I_{\lambda(10)}^{\prime(+)} &= (1 - e^{-\nu}) |\tilde{n}_0|^2 I_{\lambda b}^{\prime} (1 - \rho'_{01}) (|\tilde{n}_0|/|\tilde{n}_1|)^2 \left\{ 1 + \rho'_{01} \rho'_{12} e^{-2\nu} + \rho'_{01}^2 \rho'_{12}^2 e^{-4\nu} + \dots \right\} \\ &= (1 - e^{-\nu}) (1 - \rho'_{01}) |\tilde{n}_0|^2 I_{\lambda b}^{\prime} / (1 - \rho'_{01} \rho'_{12} e^{-2\nu}) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{ここで } \nu = 4\pi n_1 k_1 d / \lambda \cos \phi_1.$$

同様に、塗膜内の後向きふく射成分による塗装表面のふく射強度 $I_{\lambda(10)}^{\prime(-)}$ は、塗膜内の後向きふく射によって空気中に伝達される第一次成分と多重反射による第二次以上の成分の和として得られる。

$$I_{\lambda(10)}^{\prime(-)} = (1 - e^{-\nu}) (1 - \rho'_{01}) |\tilde{n}_0|^2 I_{\lambda b}^{\prime} \rho'_{12} e^{-\nu} / (1 - \rho'_{01} \rho'_{12} e^{-2\nu}) \quad (3)$$

金属基板内から射出され塗膜内を通過し空気中に射出されるふく射成分に起因するふく射強度 $I_{\lambda(20)}^{\prime}$ は

$$I_{\lambda(20)}^{\prime} = (1 - \rho'_{01}) (1 - \rho'_{12}) |\tilde{n}_0|^2 I_{\lambda b}^{\prime} e^{-\nu} / (1 - \rho'_{01} \rho'_{12} e^{-2\nu}) \quad (4)$$

結果として指向単色ふく射率 ε'_λ は各ふく射強度の総和として式(2) (3) 及び (4) を式(1)に代入して得られる*。

$$\varepsilon'_\lambda = \frac{I'_\lambda}{|\tilde{n}_0|^2 I'_{\lambda b}} = \frac{(1 - \rho'_{01})(1 - \rho'_{12} e^{-2\nu})}{1 - \rho'_{01} \rho'_{12} e^{-2\nu}} \quad (5)$$

式(5)の反射率 ρ'_{01} 及び ρ'_{12} はそれぞれ入射面に対して平行に振動する成分と直角に振動する成分の両方に対して与えられる。これら二成分を個々に式(5)に代入して計算した後、最終的に

* 式(5)は薄膜に対する反射の理論からも誘導される⁶⁾

式(6)によって平均値として指向単色ふく射率 $\varepsilon'_\lambda(\phi)$ を得ることが出来る。

$$\varepsilon'_\lambda(\phi) = (\varepsilon'_{\lambda s} + \varepsilon'_{\lambda p})/2 \quad (6)$$

4. 実験装置及び方法

実験装置は図-2に示すように大きく分けて測定系とデータ処理系の二つになる。実験に用いた分光測定装置の光学系の模式図を図-3に示す。測定系における指向単色ふく射率の測定の原理と手順は前報⁸⁾と同様である。すなわち2個の黒体と1個の試料を用いて自動記録式分光放射計 (JASCO : SR-3) を二光路法で使用している。分光測定においてモノクロメータの入射口に相当するふく射シールドの開口面積は、各波長における微弱な単色エネルギーを量的に増大させるために全ふく射測定のときより大きくしなければならず、それには $20 \text{ mm} \times 20 \text{ mm}$ の四角の開口とすることが必要である。シールド開口とスリットを通して試料を覗いたとき、試料法線とモノクロメータ入射軸間の角度が $0 \sim 75$ 度の範囲で視野からはずれないだけの十分な広さの試料面積を要し、そのため試料寸法は $115 \text{ mm} \times 230 \text{ mm}$ の矩形に定められた。塗膜内厚さ方向の温度分布は、膜厚が $0.03 \sim 0.2 \text{ mm}$ と薄いので無視される。それ故塗装表面の温度は下地のアルミニウム基板の温度を C-A 熱電対で検知して推定される。

試料には、市販アルミニウム板上に種々の厚さに塗布された6種類の塗装金属基板が用いられた。うち3種類の試料はオレンジ粉末顔料とシリコン樹脂の混合物で、他の3種類はアクリル・メラミン樹脂の混合膜材である。単色ふく射率の測定は次の条件下で行われた。試料温度 $200^\circ\text{C} \pm 1\%$ 、室温 $20 \sim 21^\circ\text{C}$ 、相対湿度 55% 以下、モノクロメータ温度 $22 \sim 26^\circ\text{C}$ 。モノクロメータの操作条件は、スリット幅 2 mm 固定、スキャン速度 5~6、サプレッション 4.5~

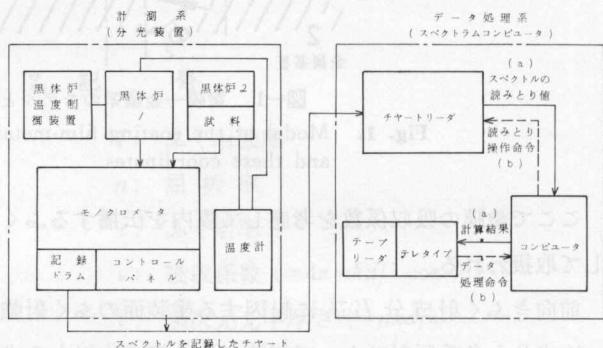


図-2 実験装置全体のブロックダイヤグラム

Fig. 2. Block diagram of the experimental apparatus.

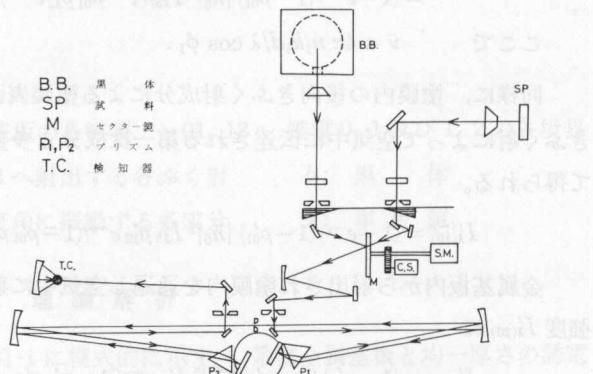


図-3 分光測定装置の光路図

Fig. 3. Optical path of the spectral measurement apparatus.

5.0, ゲイン 1.7~2.0, フィルタ 1.0。

データ処理系 (JEOL : JEC-5) は、チャートリーダ、スペクトラムコンピュータ、テレタイプライタ及びテープリーダである。操作法はまず、測定によって得られた分光曲線を黒インクで一本毎にトレースしたチャートをチャートリーダに取付ける。試料からの分光曲線と黒体炉からの標準分光曲線が波長 0.1 ミクロン間隔で別々に数値に読み取られ、それら全ての値はスペクトラムコンピュータに記憶された後、単色ふく射率と単色ふく射エネルギーが計算され、さらに全波長について積分して得られた両者の全ふく射エネルギーの比として全ふく射率が計算される。最後に、これら全ての値はテレタイプに印字される。

5. 結果と検討

式(6)から計算された解析結果のうち、塗膜一金属系の垂直単色ふく射率 $\varepsilon'_\lambda(0)$ は消衰係数及び塗膜厚さとの関連で図-4 に示される。図は塗膜屈折率 $n_1=1.5$ 、基板の光学定数 $n_2=10.0$ 、 $k_2=30.0$ の場合で、塗膜の消衰係数 k_1 がパラメータとして用いられる。膜厚は無次元光学厚さ $\tau (= n_1 k_1 d / \lambda)$ として横軸に示される。 $k_1=0.0$ の場合、垂直単色ふく射率 $\varepsilon'_\lambda(0)$ の値は τ とは無関係に一定であり、 $0 < k_1 \leq 0.1$ では、その曲線は膜厚 d が減少すると基板のふく射率に、増加するとフレネル式で計算された塗膜のふく射率に接近する。このように、光学定数、膜厚及び波長と垂直ふく射率の関係はパラメータ τ を用いることにより簡単化される。この関係は式(6)の多くの

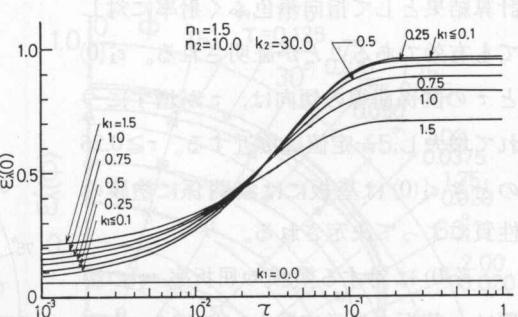


図-4 垂直単色ふく射率と塗膜の消衰係数及び膜厚の関係

Fig. 4. Relation of the normal spectral emittance, the extinction coefficient of coating film, and the film thickness.

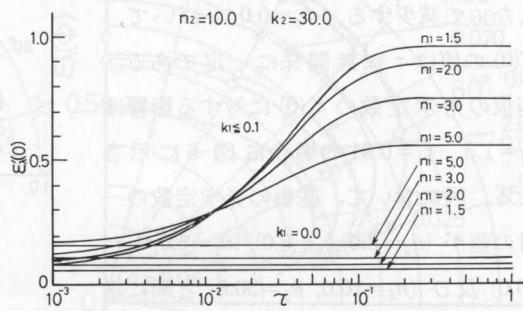


図-5 垂直単色ふく射率に及ぼす塗膜の屈折率 n_1 の影響

Fig. 5. Influence of refraction index n_1 of coating film on the normal spectral emittance.

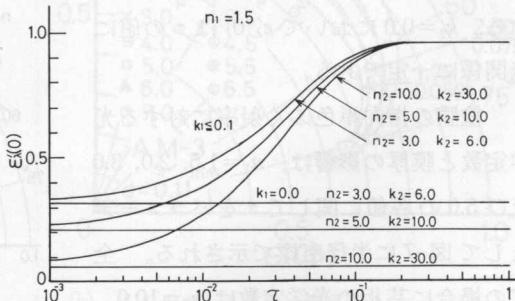


図-6 垂直単色ふく射率に及ぼす金属基板の光学定数 n_2 、 k_2 の影響

Fig. 6. Influence of optical constants n_2 and k_2 of metal substrate on the normal spectral emittance.

計算結果として指向単色ふく射率に対しても有効であることが証明される。 $\varepsilon'_\lambda(0)$ と τ の関係曲線の傾向は、 τ が増すにつれて増大し、一定値に接近する。 $\tau \geq 0.25$ のとき $\varepsilon'_\lambda(0)$ は基板には無関係に塗膜の性質によって決定される。

$\varepsilon'_\lambda(0)$ に対する塗膜の屈折率 n_1 の影響は、基板の光学定数を $n_2=10.0$, $k_2=30.0$ として図-5に示される。 $k_1 \leq 0.1$ の場合、 $\varepsilon'_\lambda(0)$ は n_1 が1.5から5.0に順に増加するにつれて減少する。それに対して n_1 が一定の場合、 $\varepsilon'_\lambda(0)$ は τ の減少とともに減少する。 $k_1=0.0$ において、 $\varepsilon'_\lambda(0)$ の値は τ に無関係に一定である。基板の光学定数の $\varepsilon'_\lambda(0)$ に対する影響は $n_1=1.5$, $k_1=0.01$ の場合に図-6に示される。図において、基板の光学定数の一対の値が($n_2=3.0$, $k_2=6.0$), ($n_2=5.0$, $k_2=10.0$)及び($n_2=10.0$, $k_2=30.0$)と順に増大すると、ふく射率の傾向は n_2 と k_2 の大きな値によってかなり影響される。 τ の増大とともに各曲線は大きな値に接近して収斂し、 $\tau=0.25$ で $\varepsilon'_\lambda(0)$ は一致する。 $k_1=0.0$ において $\varepsilon'_\lambda(0)$ は τ の値に無関係に一定である。

塗膜の指向単色ふく射率に対する光学定数と膜厚の影響は、 $n_1=1.5$, 2.0, 3.0及び5.0の各値について τ をパラメータとして図-7に半径座標で示される。全ての場合に基板の光学定数は $n_2=10.0$, $k_2=30.0$ と一定で、 $0 < k_1 \leq 0.1$ の制限がある。 $\tau=0.25$ において、塗装面の指向単色ふく射率 $\varepsilon'_\lambda(\phi)$ はフレネル式の結果とほぼ等しくなる。 $\varepsilon'_\lambda(\phi)$ の値はまた τ

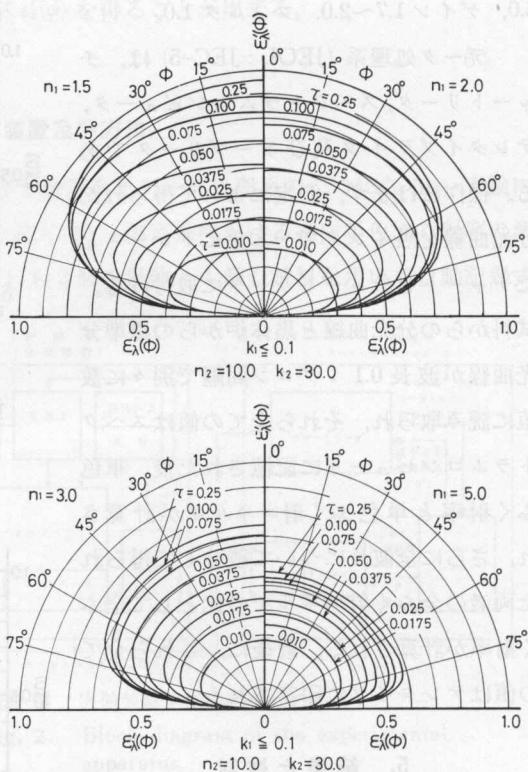


図-7 塗膜の指向単色ふく射率に及ぼす光学定数と膜厚の影響

Fig. 7. Influence of optical constants of coating film and film thickness on the directional spectral emittance.

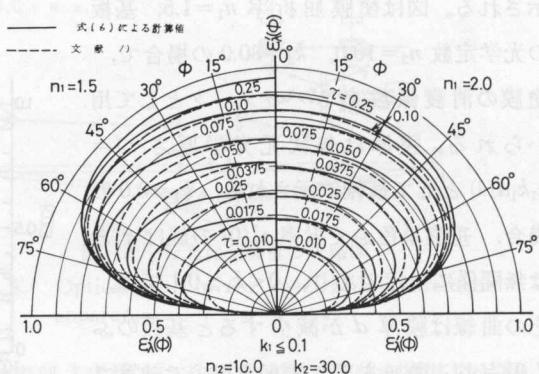


図-8 塗膜の指向単色ふく射率の計算値に及ぼす消衰係数の影響

Fig. 8. Influence of extinction coefficient of coating film on the calculated values of the directional spectral emittance.

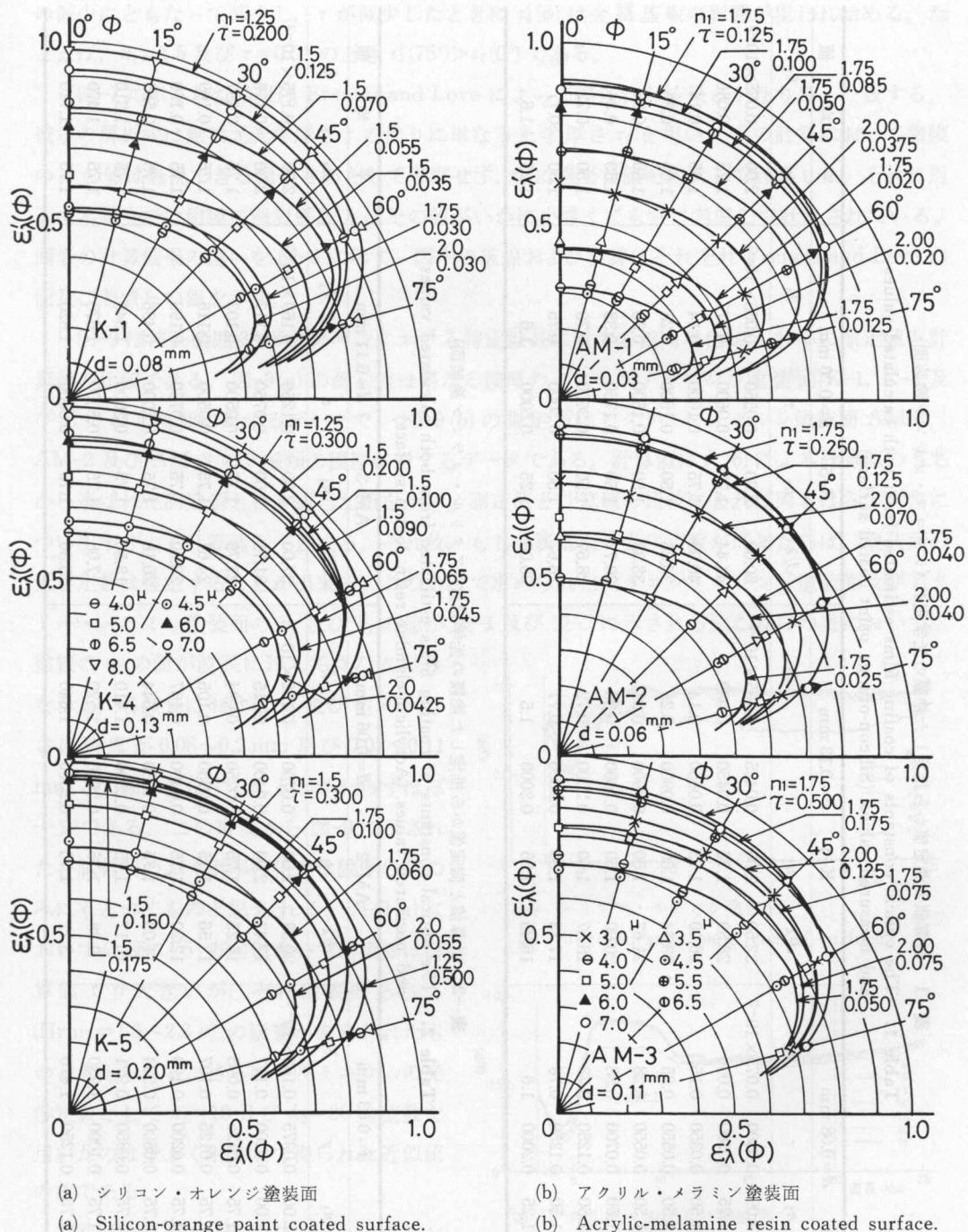


図-9 塗装面の指向単色ふく射率の計算値と測定値の比較

Fig. 9. Comparison between the measured values and the calculated values of the directional spectral emittance of coated surfaces.

表-1 計算値と測定値から推定した塗膜の光学定数(シリコン・オレンジ塗装面)

Table 1. The optical constants of coating films estimated from both calculated values and measured values. (Silicon-orange paint coated surface)

λ	d/λ	K-1			d=0.08 mm			K-4			d=0.13 mm			K-5			d=0.20 mm			平均値			
		n_1	τ	k_1	d/λ	n_1	τ	k_1	d/λ	n_1	τ	k_1	d/λ	n_1	τ	k_1	d/λ	n_1	τ	k_1	n_1	k_1	
4.0	20.00	2.09	0.0300	0.075×10^{-2}	32.50	2.00	0.0425	0.065×10^{-2}	50.00	2.00	0.0550	0.055×10^{-2}	2.00	0.065	$\times 10^{-2}$							1.75	0.086
4.5	17.78	1.75	0.0300	0.096	28.89	1.75	0.0450	0.089	44.44	1.75	0.0600	0.077										1.65	0.14
5.0	16.00	1.50	0.0350	0.15	26.00	1.75	0.0650	0.14	40.00	1.75	0.1000	0.14										1.50	0.26
5.5	14.55	1.50	0.0550	0.25	23.64	1.50	0.0900	0.25	36.36	1.50	0.1500	0.28										1.50	0.28
6.0	13.33	1.50	0.0550	0.28	21.67	1.50	0.0900	0.28	33.33	1.50	0.1500	0.30										1.50	0.36
6.5	12.31	1.50	0.0700	0.38	20.00	1.50	0.1000	0.33	30.77	1.50	0.1750	0.38										1.50	0.36
7.0	11.43	1.50	0.1250	0.73	18.57	1.50	0.2000	0.72	28.57	1.50	0.3000	0.70										1.50	0.72
7.5	10.67	1.50	0.1250	0.78	17.33	1.50	0.2000	0.77	26.67	1.50	0.3000	0.75										1.50	0.77
8.0	10.00	1.25	0.2000	1.6	16.25	1.25	0.3000	1.5	25.00	1.25	0.5000	1.6										1.25	1.6

表-2 計算値と測定値から推定した塗膜の光学定数(アクリル・メラミン塗装面)

Table 2. The optical constants of coating films estimated from both calculated values and measured values. (Acrylic-melamine resin coated surface)

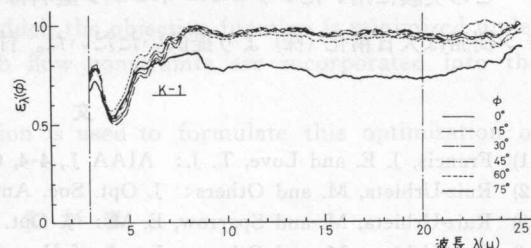
λ	AM-1			d=0.03 mm			AM-2			d=0.06 mm			AM-3			d=0.11 mm			平均値			
	d/λ	n_1	τ	k_1	d/λ	n_1	τ	k_1	d/λ	n_1	τ	k_1	d/λ	n_1	τ	k_1	d/λ	n_1	τ	k_1		
3.0	10.00	2.00	0.0375	0.188×10^{-2}	20.33	2.00	0.0700	0.172×10^{-2}	37.00	2.00	0.1250	0.169×10^{-2}									2.00	0.175×10^{-2}
3.5	8.75	2.00	0.0200	0.117	17.43	2.00	0.0400	0.115	31.71	2.00	0.0750	0.117									2.00	0.116
4.0	7.50	1.75	0.0125	0.095	15.25	1.75	0.0250	0.094	27.75	1.75	0.0500	0.103									1.75	0.097
4.5	6.67	1.75	0.0125	0.107	13.56	1.75	0.0250	0.105	24.67	1.75	0.0500	0.116									1.75	0.109
5.0	6.00	1.75	0.0200	0.190	12.20	1.75	0.0400	0.187	22.20	1.75	0.0750	0.193									1.75	0.190
5.5	5.45	1.75	0.0500	0.524	11.09	1.75	0.1250	0.644	20.18	1.75	0.2000	0.496									1.75	0.555
6.0	5.00	1.75	0.0850	0.971	10.17	1.75	0.2500	1.410	18.50	1.75	0.5000	1.540									1.75	1.310
6.5	4.62	1.75	0.1000	1.230	9.38	1.75	0.2500	1.520	17.08	1.75	0.5000	1.670									1.75	1.470
7.0	4.28	1.75	0.1250	1.670	8.71	1.75	0.2500	1.640	15.86	1.75	0.5000	1.820									1.75	1.710

の減少にともなって減少し、 τ が減少したときに $\varepsilon'_k(\phi)$ は金属基板の影響が現われ始める。たとえば、 $n_1=1.5$ 及び $\tau=0.01$ のとき $\varepsilon'_k(75^\circ) > \varepsilon'_k(0^\circ)$ である。

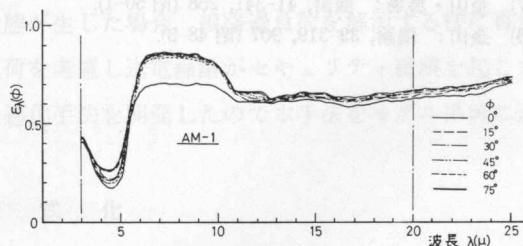
図-7 に示された結果は Francis and Love によって得られた結果とかなり良く一致する。彼らの解析式は無次元光学厚さ τ の代りに单なる光学厚さ τ_0 を用い、その計算において塗膜の k の値は無視できる程小さいとして考慮せず、 τ_0 に適当な値を代入して計算した。それに対して本論文では塗膜の消衰係数 k はその値がいかに小さくても常に考慮して計算されている。両者の計算結果の違いを図-8 に示す。図中の破線および実線はそれぞれ Francis and Love の値及び著者らの値を示す。

図-9 は波長範囲 3~8 ミクロンにおける特定波長に対する指向単色ふく射率の測定値と計算値の比較である。図-9(a) の測定値は異なる膜厚のシリコン・オレンジ塗装面 K-1, K-4 及び K-5 の 3 種類に対するデータで、図-9(b) の測定値はアクリル・メラミン塗装面 AM-1, AM-2 及び AM-3 の 3 種類の膜厚に対するデータである。計算値は式(6)による計算値のうちから選ばれた測定値と合う適当な値を示す。測定値と計算値の比較によれば両者は各方向角について十分よく計算値と一致する。それ故、もし金属基板の光学定数が既知ならば、塗装面の光学定数は推定することが出来る。この方法で求められたシリコン・オレンジ塗装面及びアクリル・メラミン塗装面の n_1 及び k_1 の値が表-1 及び表-2 に示される。これらの表において、塗膜の n_1 の値が波長に対して負の依存性を示し、各波長における n_1 及び k_1 の大きさは膜厚が 0.08~0.2 mm 及び 0.03~0.11 mm と大幅に変化するにもかかわらずほぼ一定である。この事実から図-9 に示された各試料間のふく射率の相違は膜厚の差のみにもとづくものと思われる。図-9(a)において全般に 75° 方向において測定値は計算値より大きいが、それは表面あらざ ($H_{rms}=1.5 \sim 2.3 \mu$) の影響があらわれたものと考えられる。さらにアルミニウムの光学定数として $n_2=10$ 及び $k_2=30$ の整数を用いたのは全ふく射測定で得られた近似値の故である。

図-10(a) 及び (b) にシリコン・オレンジ塗装面及びアクリル・メラミン塗装面の指向単色ふく射率測定値の波長依存性の一例を示す。前者は膜材と顔料の混合物、



(a) シリコン・オレンジ塗装面
(a) Silicon-orange paint coated surface.



(b) アクリル・メラミン塗装面
(b) Acrylic-melamine resin coated surface.

図-10 塗装面の指向単色ふく射率の波長依存性
Fig. 10. Wavelength dependency on the directional emittance of coating films.

後者は二つの膜材の混合物で両者には明らかな相違いがみられる。

6. む す ひ

金属基板上の塗装表面から射出するふく射現象が、塗膜内部及び金属基板内部から射出されるふく射に注目して取扱われ、指向単色ふく射率の式が光学定数、膜厚及び波長をパラメータとして、各境界面におけるエネルギー平衡式を適用して誘導された。得られた式に塗膜及び金属基板の光学定数として適当な値を代入して、指向単色ふく射率が計算された。その結果、塗装表面のふく射性質は $0 < k_1 \leq 0.1$ の範囲で無次元光学厚 $\tau (= n_1 k_1 d / \lambda)$ をパラメータとして整理できた。 $\tau \geq 0.25$ に対しては金属上の塗装面のふく射率は塗膜自身の値と一致し、 $\tau < 0.25$ の場合にはふく射率値は金属基板の影響をうけて減少する。半径座標に示された指向単色ふく射率の曲線は $\tau = 0.25$ においてフレネル式から得られた結果とほぼ一致し、 τ の減少とともに橍円状に収縮する。

計算結果は、著者らによって実験されたシリコン・オレンジ塗装面及びアクリル・メラミン塗装面のふく射率測定値と比較され大きさ及び傾向とも良く一致した。この解析解は塗膜厚さに関係なく光学的に平滑な金属面上の塗装面から射出されるふく射に一般に適用されるものと考えられる。

この実験に用いたシリコン・オレンジ塗料はタクマ汽缶(株)より、またアクリル・メラミン樹脂は大日精化(株)より提供いただいた。付して感謝の意を表する。

文 献

- 1) Francis, J. E. and Love, T. J.: AIAA J., 4-4, 634 (1966-4).
- 2) Ruiz-Urbieta, M. and Others: J. Opt. Soc. Amer., 61-3, 351 (1971-3).
- 3) Ruiz-Urbieta, M. and Sparrow, E. M.: J. Opt. Soc. Amer., 62-8, 931 (1972-8).
- 4) Ruiz-Urbieta, M. and Others: Int. J. of Heat Mass Transfer, 15-1, 169 (1972-1).
- 5) Ruiz-Urbieta, M. and Sparrow, E. M.: Int. J. of heat Mass Transfer, 16-8, 1643 (1973-8).
- 6) Williams, D. A. and Others: Trans. ASME, Ser. A, 85-3, 213 (1963-7).
- 7) 金山・馬場: 機論, 41-341, 258 (昭 50-1).
- 8) 金山: 機論, 39-319, 907 (昭 48-3).