

有限要素法による貯水池の動水圧解析

佐 渡 公 明*

中 尾 隆 志*

(昭和52年4月30日受理)

Hydrodynamic Pressure Analysis in Reservoir by Finite Element Method

by Kimiteru SADO and Takashi NAKAO

A few formulas suggested for the hydrodynamic pressure that acts upon a dam under transient excitation do not consider the influence of the length (L) of reservoir, shown in Fig. 1. And their expressions are effective on condition that the dam has constant and horizontal acceleration.

In this paper, we develop a numerical analysis of the wave equation by finite element method and compare it with Hatano's solution. Moreover, the influence of the length (L) is discussed.

1. ま え が き

地震時にダムに作用する動水圧については、ダム上流面が鉛直な場合には Westergaard や畑野の解析解、上流面が傾斜している場合は、Zanger の非圧縮性を仮定した実験式がある¹⁾。しかし、これらはダムに働く加速度が一定な水平震度の場合に限られている。また、Westergaard や畑野は図-1 に示す貯水池の長さ L の影響を考慮していない。

最近、水工学の分野においても盛んに用いられるようになってきた有限要素法^{2),3)}によればダムの加速度や図-1 の境界 S_1 が任意の場合に数値解析ができるので、非常に有効である。

本論文では、始めに有限要素法による波動方程式の解法を示し、次に畑野の解と比較し、貯水池の長さ L と線形に変化する加速度の影響を述べたものである。

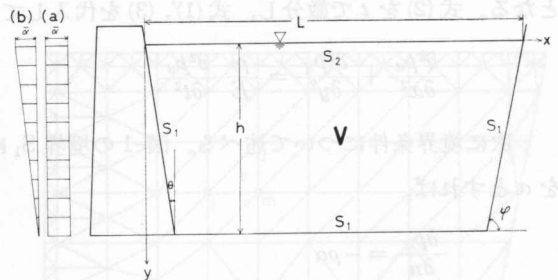


図-1 解析領域

Fig. 1. Analysed region.

* 北見工業大学開発工学科

2. 基礎方程式

図-1に示すように、直交座標系 $x-y$ において、 x, y 方向の速度を u, v とすれば、Eulerの運動方程式は次のように書かれる。

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial t} + \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + g &= \frac{\partial v}{\partial t} + \left[u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ただし ρ : 密度, p : 圧力, g : 重力加速度, t : 時間である。

地震時のダムの動水圧のように、急激な運動の場合には、式(1)の[]内の項は小さくこれを見捨てることができ、次式のように簡単になる。

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial t} \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + g &= \frac{\partial v}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (1')$$

また、水の体積弾性率を E とすれば、連続の式は、

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{E} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2)$$

と表わされる。

一方、圧力 p を動水圧 p_a と静水圧の和で表わすと、

$$p = p_a + \rho g y \quad (3)$$

となる。式(2)を t で微分し、式(1)', (3)を代入して、次の波動方程式が得られる。

$$\frac{\partial^2 p_a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_a}{\partial y^2} = \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} \quad (4)$$

次に境界条件について述べる。図-1の境界 S_1 における、法線方向を n 、法線方向の加速度を α とすれば、

$$\frac{\partial p_a}{\partial n} = -\rho \alpha \quad (5)$$

となる。

一方、水表面 S_2 において、壁体の振動に伴う、水の上昇高さを η とすれば、近似的に、

$$p_{y=0} = \rho g \eta \quad (6)$$

で表わされる。鉛直速度成分は、 $v = \partial \eta / \partial t$ となるので、式(6), (3)を式(1)'に代入して

$$\frac{1}{g} \frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} + \frac{\partial p_a}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

次に、 x 方向の壁体の振動が、 $\xi = \alpha \sin(\omega t) / \omega^2$ の場合について述べる。

動水圧 P_a が、角速度を ω とし、

$$p_a = \bar{p}_a(x, y) \sin(\omega t) \quad (8)$$

なる式で表わされるものとする、式(4)は次の Poisson の方程式になる。

$$\frac{\partial^2 \bar{p}_a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{p}_a}{\partial y^2} + \frac{\rho \omega^2}{E} \bar{p}_a = 0 \quad (9)$$

また、境界条件の式(5), (7)はそれぞれ、次の式(10), (11)になる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}_a}{\partial n} - \rho \alpha = 0 & \quad \text{on } S_1 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}_a}{\partial y} - \frac{\omega^2}{g} \bar{p}_a = 0 & \quad \text{on } S_2 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

すなわち、水の圧縮性を考慮した、ダムの動水圧解析は微分方程式(9)を式(10), (11)の境界条件のもとで解くことになる。

3. 有限要素法による定式化

以下、 \bar{p}_a は簡単のために、 p と書くことにする。

式(10), (11)のもとに、式(9)を解くことは、次の汎関数 X を最小にする問題と等価である⁴⁾。

$$X = \left. \begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_V \left\{ \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 - \frac{\rho \omega^2}{E} p^2 \right\} dV \\ & - \int_S \left(\rho \alpha p + \frac{\omega^2}{2g} p^2 \right) dS \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

ただし V : 解析領域, $S = S_1 + S_2$

図-2に示すように、三角形要素 e の節点 i, j, m における動水圧を p_i, p_j, p_m とすれば、要素内の動水圧 p は次式で表わされる。

$$p = [N_i N_j N_m] \begin{Bmatrix} p_i \\ p_j \\ p_m \end{Bmatrix} \quad (13)$$

ここに $N_i = (a_i + b_i x + c_i y) / 2\Delta$ など

(15) $a_i = x_j y_m - x_m y_j, b_i = y_j - y_m, c_i = x_m - x_j$ など、 Δ は要素 e の面積

式(13)を式(12)に代入し、極値の条件をとれば、

$$\frac{\partial X^e}{\partial \{p\}^e} = [k]^e \{p\}^e + \{f\}^e \quad (14)$$

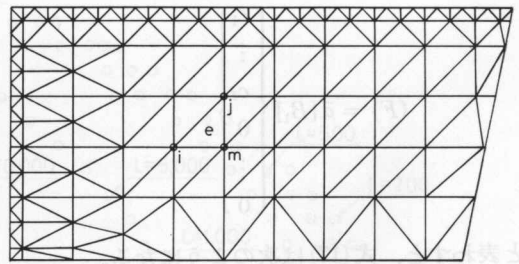


図-2 要素の分割
Fig. 2. Mesh division.

$$[k]^e = \frac{1}{4J} \left[\begin{array}{ccc} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_m + c_i c_m \\ & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_m + c_j c_m \\ & & b_m b_m + c_m c_m \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{Sym.} \quad (15)$$

$$- \frac{A \rho \omega^2}{12E} \left[\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{Sym.}$$

{f}^e の成分は、

$$f_i^e = - \int_{S_e} \rho \alpha N_i dS - \left(\int_{S_e} \frac{\omega^2}{g} [N] N_i dS \right) \{p\}^e \text{ など} \quad (16)$$

となる。次に、式(14)を全要素について重ね合せを行えば、次の連立一次方程式が得られる。

$$[K] \{p\} + \{F\} = 0 \quad (17)$$

$$K_{ij} = \sum_e k_{ij}^e, \quad F_i = \sum_e f_i^e \quad (18)$$

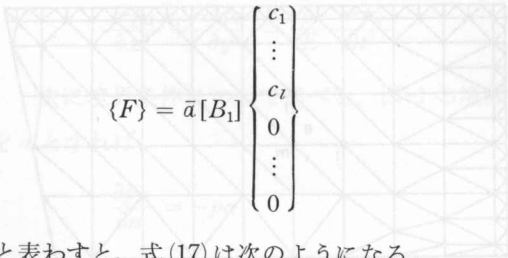
なお、加速度 α については、壁体上の節点数を l として次のように表わす。

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_l \end{Bmatrix} = \bar{a} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \\ c_l \end{Bmatrix} \quad (19)$$

一定加速度の場合 (図-1(a)) $c_i = 1, i = 1, \dots, l$

線形変化の加速度の場合 (図-1(b)) $c_1 = 1$ から $c_l = 0$ まで直線変化

いま、式(18)の定数項 {F} を分解して、



$$\{F\} = \bar{a} [B_1] \begin{Bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_l \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

と表わすと、式(17)は次のようになる。

$$\{p\} = -\bar{a} [K]^{-1} [B_1] \begin{Bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_l \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} = [M_1] \begin{Bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_l \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

ここで、マトリックス [M₁] の l 行 l 列の部分マトリックスを [M₂] とすれば、

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_l \end{Bmatrix} = [M_2] \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_l \end{Bmatrix} \quad (22)$$

となる。この影響マトリックス $[M_1]$, $[M_2]$ をある要素分割に対して計算しておけば、任意の加速度分布に対して発生する動水圧を式 (21), (22) より簡単に求めることができる。

4. 数値解析例

始めに、畑野の解析解と比較するために、 $h=100$ m, $L=1,000$ m, $\theta=0$, $\varphi=\pi/4$ として、 $T=0.1, 0.2, 0.5, 1.0$ sec の各場合について、壁体上流面の動水圧分布を計算した一例を図-3

表-1 壁体上の波高

Table 1. Wave height on moving wall

L (m)	$g\eta_0/\bar{\alpha}h \times 10^2$
200	1.404
500	0.957
1,000	0.790
5,000	0.503
10,000	0.322
畑野	2.517

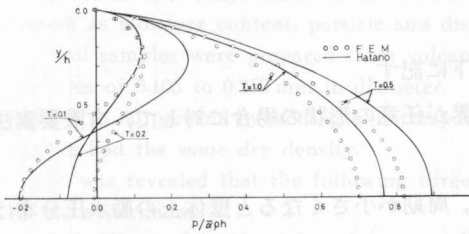


図-3 壁体上の動水圧分布に及ぼす周期の影響

Fig. 3. Hydrodynamic pressure distribution on moving wall at various period.

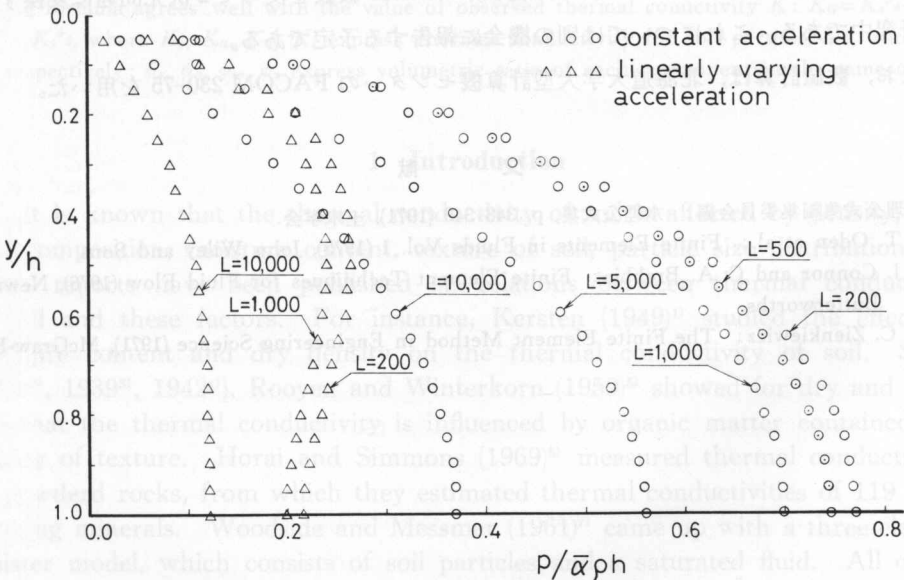


図-4 壁体上の動水圧分布に及ぼす貯水池の長さ (L) の影響

Fig. 4. Hydrodynamic pressure distribution on moving wall at various length (L).

に示す。 $T=0.05, 0.07$ sec の場合は縮尺の関係上省略してあるが、周期が短くなると畑野の解との相違が大きくなってくる。これは、貯水池の規模に応じて周期が短い場合には、 L の有限性が影響してくるからである。

次に、 $T=1$ sec, $h=100$ m, $\theta=0$, $\varphi=\pi/4$ として、貯水池の長さ L の影響を図-4、表-1 に示す。図-4 は壁体上流面の動水圧で、表-1 は一定加速度のときの壁体上の波高 η_0 である。 L の減少とともに当然ながら、動水圧、波高ともに増加している。

線形変化の加速度の場合、 L が小さいと動水圧分布に最大値が生ずることがわかる。

5. あとがき

以上、貯水池の動水圧解析に有限要素法を適用することを目的として、基礎理論、定式化数値計算の幾つかを述べた。

結論として、本研究により得られた結果を以下に記す。

1) 壁体の任意の加速度分布、解析領域の境界が任意の形状の場合に対して、有限要素法は非常に有効である。

2) 貯水池の長さ L の有限性を考慮した場合、周期が小さくなると壁体上の動水圧分布は畑野と大きく相違してくる。

3) 他の条件が一定で、 L が減少すると壁体上の動水圧や波高は増加する。

貯水池の規模が小さい場合には、 L と同様に貯水池の横幅の影響も入ってくる。これを考慮すると、3次元問題になるが、我々は現在、Fourier 級数を使って2次元問題に変換することを研究中である。これについては別の機会に報告する予定である。

なお、数値計算は、北海道大学大型計算機センターの FACOM 230-75 を用いた。

文 献

- 1) 水理公式集編集委員会編：水理公式集，p. 348-349 (1971)，土木学会。
- 2) J. T. Oden et al.: Finite Elements in Fluids Vol. 1 (1975), John Wiley and Sons.
- 3) J. J. Connor and C. A. Brebbia: Finite Element Techniques for Fluid Flow (1976), Newnes-Butterworths.
- 4) O. C. Zienkiewicz: The Finite Element Method in Engineering Science (1971), McGraw-Hill.



図-4 壁体上の動水圧分布

Fig. 4. Hydrodynamic pressure distribution on

the upstream face of the wall. The horizontal axis is the distance from the wall and the vertical axis is the pressure.