

# 水理構造物基礎の対称浸透流場について\*

佐 渡 公 明\*\*

(昭和52年4月30日受理)

## Symmetrical Seepage Flow Field under Hydraulic Structures

by Kimiteru SADO

The seepage flow through porous media under a hydraulic structure belongs to the confined flow problems, to which the conformal transformations have been applied by many hydraulic engineers. However, when there are more than three sheet-pilings on the bottom of foundation, the analytical method is not effective.

In this paper, we deal with such a case that a seepage flow field is symmetric with respect to the  $y$  axis (as in Fig. 1 (a)). As a result, the uplift pressure distribution on the base of structure is symmetrical to the center of an uplift pressure diagram regardless of the number of cutoff and the total uplift force is equal to the value integrated on condition that uplift pressure distribution is linear.

### 1. ま え が き

ダムやせきなどの水理構造物の基礎地盤を浸透する定常状態の被圧流は、周知のように、Darcy 則に従い Laplace の方程式で表わされる。従来多くの研究者が、各種の境界条件に対しこの2次元 Laplace 方程式の解析解を等角写像によって求めている<sup>1),2)</sup>。

しかし、図-1(a)に示すように、浸透流量や動水勾配の軽減のため矢板本数が3本以上設けられた場合には、解析解は得られず数値解析によらなければならない。

本論文では、図-1(a)に示す浸透流場を取り挙げ、始めにこの物理面を複素ポテンシャル平面に等角写像する写像関数を示す。次に、この浸透流場が構造物の底辺中央に関し対称である場合に次のことを証明しようとするものである。

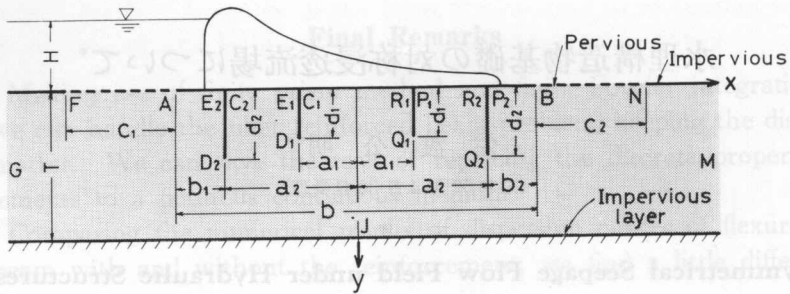
- (1) 構造物底辺の揚圧力分布は、矢板本数に無関係に点対称になる。
- (2) 全揚圧力は、揚圧力分布を三角形分布としたときに等しくなる。

### 2. 写 像 関 数

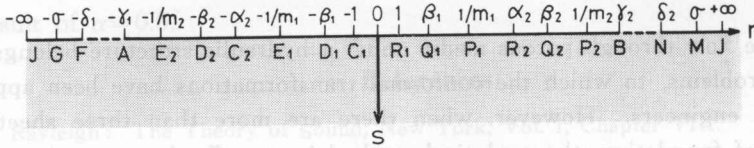
図-1(a)の  $z(=x+iy)$  平面は、矢板本数が4本ある場合の浸透流場を表わす物理平面であ

\* 土質工学会北海道支部技術報告会(1975年2月)で講演

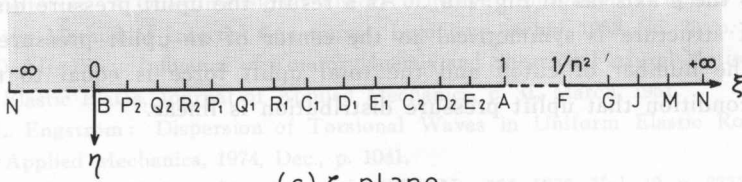
\*\* 北見工業大学開発工学科



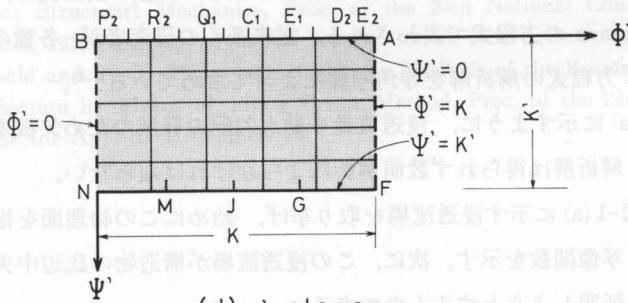
(a) z-plane



(b) t-plane



(c) ζ-plane



(d) w'-plane

図-1 等角写像

Fig. 1. Conformal transformations.

る。この  $z$  平面の浸透領域 ( $0 \leq y \leq T$ ) を、図-1の各点の対応のもとに、 $t (=r+is)$  平面と  $\zeta (= \xi+i\eta)$  平面の半平面を介して、無次元化した複素ポテンシャル平面  $w' (= \Phi'+i\Psi')$  の長方形領域に写像する。

まず、 $z$  平面の浸透領域を  $t$  平面の下半面に写像する関数は、Schwarz-Christoffel 変換を用いて

$$z = C_1 \int_0^t \frac{(t^2 - \beta_1^2)(t^2 - \beta_2^2) dt}{(t^2 - \sigma^2) \sqrt{(t^2 - 1)(t^2 - \alpha_2^2)(t^2 - 1/m_1^2)(t^2 - 1/m_2^2)}} \equiv f(t) \quad (1)$$

となる。ここに、 $C_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, m_1, m_2, \sigma$  は未知定数で、点  $R_1, R_2, P_1, P_2, Q_1, Q_2, J$  各点の対応より得られる次の式(2)より求められる。

$$\left. \begin{aligned} a_1 = f(1) = f(1/m_1), & \quad a_1 + id_1 = f(\beta_1) \\ a_2 = f(\alpha_2) = f(1/m_2), & \quad a_2 + id_2 = f(\beta_2) \\ iT = f(\pm\infty) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

なお、式(1)の特異点  $t = \sigma$  を中心とする Laurent 展開を求めると、 $D_0, D_1, D_2, \dots$  を定数として

$$z = f(t) = D_0 \log(t - \sigma) + D_1(t - \sigma) + D_2(t - \sigma)^2 + \dots \quad (3)$$

となり、M 点の対応式  $\infty = f(\sigma)$  は恒等式である。G 点の対応についても同様である。式(1)が奇関数であることに注意して、点 A, F, B, N 各点の対応は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} a_2 + b_1 = f(\gamma_1), & \quad a_2 + b_2 = f(\gamma_2) \\ a_2 + b_1 + c_1 = f(\delta_1), & \quad a_2 + b_2 + c_2 = f(\delta_2) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

次に、 $t$  平面の下半面と  $\zeta$  平面の上半面との変換式は、次の式(5)で表わされ、 $\zeta$  平面の F 点の座標は式(6)の逆数となる。

$$\zeta = \frac{(\gamma_1 + \delta_2)(\gamma_2 - t)}{(\gamma_1 + \gamma_2)(\delta_2 - t)} \quad (5)$$

$$n^2 = \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)(\delta_1 + \delta_2)}{(\gamma_1 + \delta_2)(\delta_1 + \gamma_2)} \quad (6)$$

この  $n^2$  は、一次変換である式(5)の非調和比である。

最後に、 $\zeta$  平面の上半面を  $w'$  平面の長方形内部に写像する関数は、Schwarz-Christoffel 変換を用いて

$$w' = C_2 \int_0^\zeta \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta(\zeta - 1)(\zeta - 1/n^2)}} = F(\sin^{-1} \sqrt{\zeta}, n), \quad C_2 = \frac{1}{2n} \quad (7)$$

となる。ここに、 $F(\cdot)$  は第1種楕円積分で、 $w' (= \Phi' + i\Psi')$  は速度ポテンシャル  $\Phi$  および流れ関数  $\Psi$  を次式により無次元化した複素ポテンシャルである。

$$\Phi' = \frac{\Phi}{kH} K, \quad \Psi' = \frac{\Psi}{q} K' \quad (8)$$

ただし、 $K, K'$ :  $n, n'$  を母数とする第1種完全楕円積分、 $n'$ :  $n$  の補母数  $= \sqrt{1 - n^2}$ 、 $k$ : 透水係数、 $q$ :  $z$  平面に垂直方向の単位幅当りの浸透流量である。

矢板本数が3本の場合には、図-2(a), (b)の各点の対応のもとに、 $z$  平面の浸透領域を  $t$  平面の下半面に変換する写像関数は

$$z = C_3 \int_0^t \frac{t^2(t^2 - \beta_1^2) dt}{(t^2 - \sigma^2) \sqrt{(t^2 - 1)(t^2 - \alpha_1^2)(t^2 - 1/m_1^2)}} + C_4 \equiv g(t) \quad (9)$$

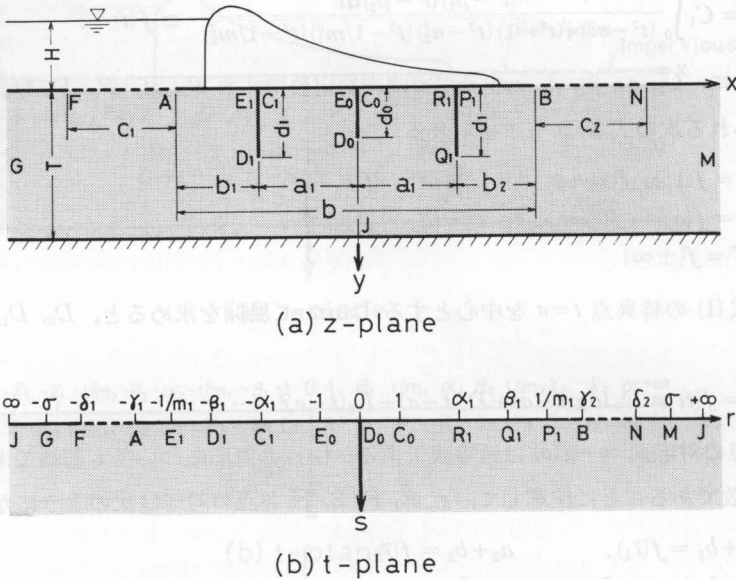


図-2 矢板が3本あるときの Schwarz-Christoffel 変換

Fig. 2. Schwarz-Christoffel transformation for the seepage flow field with 3 cutoffs.

となる。未知定数  $C_3, C_4, \alpha_1, \beta_1, m_1, \sigma$  は、点  $C_0, D_0, P_1, R_1, Q_1, J$  各点の対応より得られる次の式(10)より求められる。

$$\left. \begin{aligned} g(1) &= 0, & a_1 &= g(\alpha_1) = g(1/m_1) \\ g(0) &= id_0, & a_1 + id_1 &= g(\beta_1) \\ g(\pm\infty) &= iT \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$t$  平面の  $\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2$  は式(4)と同様に、次式より得られる。

$$\left. \begin{aligned} a_1 + b_1 &= g(\gamma_1), & a_1 + b_2 &= g(\gamma_2) \\ a_1 + b_1 + c_1 &= g(\delta_1), & a_1 + b_2 + c_2 &= g(\delta_2) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$t$  平面  $\rightarrow \zeta$  平面  $\rightarrow w'$  平面と変換する写像関数は、式(5)、(7)と同じである。

なお、式(1)、(9)の写像関数は、被積分関数の分母の根号内が6次以上の多項式であるため、実際に計算する場合は数値積分によらなければならない。

### 3. 揚圧力分布

一般に浸透水の圧力  $p$  は、 $\rho g$  を浸透水の単位重量として

$$\frac{p}{\rho g H} = \frac{\Phi'}{K} + \frac{y}{H} \quad (12)$$

と表わされるが、水理構造物の底辺(図-1(a)と図-2(a)のA-B上)では、 $y = s = \Psi' = 0$  なので、式(7)、(5)より揚圧力は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{p}{\rho g H} &= \frac{F(\tau, n)}{K}, \\ \sin \tau &= \sqrt{\frac{(\gamma_1 + \delta_2)(\gamma_2 - r)}{(\gamma_1 + \gamma_2)(\delta_2 - r)}} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

ここで、対称浸透流場の揚圧力分布について検討する。

図-1(a)において、 $b_1 = b_2, c_1 = c_2$  のとき、浸透領域は  $y$  軸に關し対称になり、式(4)より  $\gamma_1 = \gamma_2 \equiv \gamma, \delta_1 = \delta_2 \equiv \delta$  である。

いま、図-3(a)に示すように構造物底辺において、 $x = x_1$  に対応する  $t$  平面の  $r$  座標を  $r = r_1$  とすれば、式(1)が奇関数であることより  $x = -x_1$  に対応する  $r$  座標は  $r = -r_1$  となる。したがって、図-3(a)において、 $x = x_1$  での揚圧力  $p_1$  と  $x = -x_1$  での揚圧力  $p_2$  は、式(13)より

$$\left. \begin{aligned} \frac{p_1}{\rho g H} &= \frac{F(\tau_1, n)}{K}, & \sin \tau_1 &= \sqrt{\frac{(\gamma + \delta)(\gamma - r_1)}{2\gamma(\delta - r_1)}} \\ \frac{p_2}{\rho g H} &= \frac{F(\tau_2, n)}{K}, & \sin \tau_2 &= \sqrt{\frac{(\gamma + \delta)(\gamma + r_1)}{2\gamma(\delta + r_1)}} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

と示される。ここで、 $\cot \tau_1 = \sqrt{1 - n^2} \tan \tau_2$  の関係があるので、 $F(\tau_1, n) + F(\tau_2, n) = K$  となり<sup>3)</sup>、次式を得る。

$$\frac{p_1 + p_2}{\rho g H} = 1 \quad (15)$$

また、 $x_1 = a_2 + b_2$  のとき  $r_1 = \gamma$  であるから、 $p_1 = 0, p_2 = \rho g H$  となり； $x_1 = 0$  のとき  $r_1 = 0$  で  $\sin \tau_1 = \sin \tau_2 = 1/\sqrt{1 + n^2}$  であるから、 $p_1 = p_2 = 0.5 \rho g H$  である<sup>3)</sup>。

したがって、揚圧力分布は図-3(a)に示すように、点 C ( $x = 0, p = 0.5 \rho g H$ ) に關し点対称となり、全揚圧力  $P$  は

$$P = \frac{1}{2} \rho g H b \equiv P_0 \quad (16)$$

となる。ここに、 $P_0$  は揚圧力分布を三角形としたときの全揚圧力、あるいは矢板が無く  $T = c_1 = c_2 = \infty$  のときの全揚圧力である。

以上、矢板4本の場合について述べたが、一般に矢板本数が偶数 ( $2n, n$ : 正の整数) のときは、 $\pm \alpha_i, \pm \beta_i, \pm 1/m_i (i = 1, 2, \dots, n)$  を  $t = 0$  より  $i$  番目の矢板の座標とすれば(1)は

$$z = C_1 \int_0^t \frac{(t^2 - \beta_1^2)(t^2 - \beta_2^2) \dots (t^2 - \beta_n^2) dt}{(t^2 - \sigma^2) \sqrt{(t^2 - 1)(t^2 - \alpha_2^2)(t^2 - \alpha_3^2) \dots (t^2 - \alpha_n^2)} (t^2 - 1/m_1^2)(t^2 - 1/m_2^2) \dots (t^2 - 1/m_n^2)} \quad (17)$$

となり、 $t$  平面  $\rightarrow z$  平面  $\rightarrow w'$  平面と変換する写像関数は、式(5), (7)である。

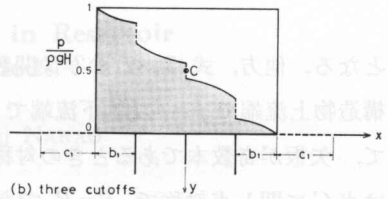
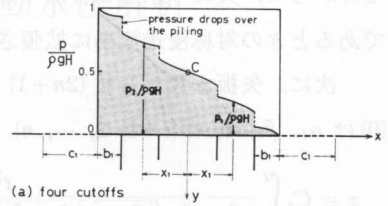


図-3 揚圧力分布

Fig. 3. Uplift pressure distribution.

したがって、矢板4本の場合について述べた揚圧力分布の点対称と式(16)は、矢板本数が偶数であるときの対称浸透流場に拡張される。

次に、矢板本数が奇数( $2n+1$ )であるときの対称浸透流場について検討する。このとき式(9)は $\alpha_i, \beta_i, 1/m_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ )を偶数本と同様に定義して

$$z = C_3 \int_0^t \frac{t^2(t^2 - \beta_1^2)(t^2 - \beta_2^2) \cdots (t^2 - \beta_n^2) dt}{(t^2 - \sigma^2) \sqrt{(t^2 - 1)(t^2 - \alpha_1^2)(t^2 - \alpha_2^2) \cdots (t^2 - \alpha_n^2)(t^2 - 1/m_1^2)(t^2 - 1/m_2^2) \cdots (t^2 - 1/m_n^2)}} + C_4 \quad (18)$$

となる。他方、式(5)、(7)の写像関数は矢板が偶数本のときと共通なので式(14)、(15)が成立し、構造物上流端で $p = \rho g H$ 、下流端で $p = 0$ 、矢板先端 $D_0$ において $p = 0.5 \rho g H$ となる。したがって、矢板が奇数本であるときの対称浸透流場については、図-3(b)に示すように、揚圧力分布は点 $C$ に関し点対称で、 $P = P_0$ である。偶数本の場合と異なるところは $p = 0.5 \rho g H$ になる位置が、 $x = 0, y = id_0$ の矢板先端にくることである。

なお、矢板が2本以下の場合、式(1)、(9)を楕円積分で表現できる。また、この場合における揚圧力分布の点対称や $P = P_0$ については、筆者の論文<sup>4)</sup>を参照されたい。

#### 4. む す び

以上、水理構造物基礎の対称浸透流場について、Schwarz-Christoffel変換を使ってその特性を述べたが、本研究の結果を要約すると次のようになる。

- 1) 矢板本数が偶数であるときの対称浸透流場については、揚圧力分布は構造物の底辺中央に関し点対称になり、全揚圧力は $0.5 \rho g H b$ となる。
- 2) 矢板本数が奇数であるときの対称浸透流場については、揚圧力分布は構造物底辺中央の矢板先端に関し点対称になり、全揚圧力は $0.5 \rho g H b$ となる。

最後に本研究を遂行するにあたり、有益なご助言をいただいた北海道大学工学部能町純雄教授に謝意を表します。

#### 文 献

- 1) M. Muskat: The Flow of Homogeneous Fluids through Porous Media, (1937), McGraw-Hill.
- 2) A. S. Chawla: Boundary effects on stability of structures, Jour. ASCE, Vol. 98, No. HY 9, pp. 1557-1573, (1922).
- 3) P. F. Byrd and M. D. Friedman: Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists, (1971), Springer-Verlag.
- 4) 佐渡公明: 透水性基礎の浸透流に対する境界の影響について, 技術報告資料, 第15号, pp. 43-50, (1975).