

減衰係数操作によるサーボ系の最適制御

神谷 祐二**

大内 均**

菊田 章**

岩崎 敏則***

(昭和52年4月30日受理)

Optimization of a Servo System by Controlling a Damping Coefficient

by Yuji KAMIYA, Hitoshi OUCHI, Akira KIKUTA
and Toshinori IWASAKI

As a method which improves a step response in a servo system, this paper proposes to control a damping coefficient optimally. In the case where the performance index is given by the settling time, the following results are obtained:

- (1) the optimal step response can be realized by bang-bang control of a damping coefficient;
- (2) all the switching functions on the phase plane are given by straight lines. These are supported by the experiment using a hybrid computer.

1. ま え が き

従来、2階線形サーボ系のステップ応答を改善する方法として、減衰係数を非線形関数とするもの¹⁾、減衰係数を操作量として最適制御を行なうもの²⁾、が報告されている。

文献 [1] は減衰係数を $\zeta = (A - B|e|)$ で与えて初期点近傍では $\zeta = 0 \sim 0.1$, $e = 0$ の近傍で $\zeta = 1$ となるように係数 A, B を設定するものである。しかし種々の初期誤差に対し望ましい応答をさせるのは困難であり、一般に大きな初期誤差に対しては大きな行き過ぎ量を生ずる。

これに対して文献 [2] はこの可変範囲を $\zeta_{\min} \leq \zeta \leq \zeta_{\max}$ とするとき、位相面上の切換関数にしたがって ζ_{\min} と ζ_{\max} を切換え、最短の応答時間で平衡状態に達する最適制御を行なうものである。この場合行き過ぎ量が零となる条件で最適制御則を得ており、速応性が要求される場合にこれを満足させることはできない。

* 昭和50年電気四学会北海道支部大会で発表

** 北見工業大学電気工学科

*** 東京芝浦電気株式会社

本論文は文献 [2] の拡張として一定の行き過ぎ量を許した場合の最短時間制御を求め、さらに得られた結果を具体的な例題に適用しハイブリッド計算機による実験結果を示している。

2. 問題の記述

2階線形サーボ系は

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \omega^2x = \omega^2r \quad (1)$$

で与えられるものとする。ここで r は大きさ u_0 のステップ関数、初期値は $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ とし、 ζ は

$$|\zeta| \leq \zeta_0 \quad (2)$$

の範囲で変化できるものとする。

このとき (1) 式の系のステップ応答を

- (1) βu_0 の行き過ぎ量を許す。
- (2) 非振動状態で整定させる。

の条件の下で ζ を操作量として最短時間で整定させる問題を考える。

$$e = r - x \quad (3)$$

とすると (1) 式は e を用いて

$$\ddot{e} + 2\zeta\omega\dot{e} + \omega^2e = 0 \quad (4)$$

となり、さらに $e = e_1, \dot{e} = e_2$ として状態方程式で表わすと

$$\left. \begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= -\omega^2 e_1 - 2\zeta\omega e_2 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

となる。この場合 (1) 式の系に対する最適制御問題は (5) 式の系において e_1 を横軸、 e_2 を縦軸とした状態平面で考えるとき、初期点 $(u_0, 0)$ から行き過ぎ量を表わす点 $(-\beta u_0, 0)$ を通り最短時間で平衡状態に達する軌道を求める問題に変換される。状態平面において初期点を a 、行き過ぎ量を表わす点を c 、原点を O とすると、全体の最適軌道 T_{aO} は a 点を初期点、 c 点を終端点とした最適軌道 T_{ac} と c 点を初期点、 O 点を終端点とした最適軌道 T_{cO} に分割されることができ、それぞれ独立に求めることができる。

3. 最適切換関数

最適軌道 T_{cO} は文献 [2] で得られている最適軌道に対応し、

$$\zeta_0 \geq 1 \quad (6)$$

の条件の下で c 点を $\zeta = -\zeta_0$ で出発し、負の勾配の大きい方の固有ベクトル

$$e_2 = -\omega(\zeta_0 + \sqrt{\zeta_0^2 - 1}) e_1 \quad (7)$$

に達した d 点で $\zeta = \zeta_0$ に切換えて得られる。

次に最適軌道 T_{ac} について考える。

(5) 式に最大原理³⁾を適用して H 関数を求めると

$$H = -1 + p_1 e_2 - p_2 (\omega^2 e_1 + 2\zeta \omega e_2) \quad (8)$$

となる。(8) 式から ζ の最適制御則は

$$\zeta = -\zeta_0 \operatorname{sgn}(p_2 e_2) \quad (9)$$

として、すなわち $p_2 e_2 \geq 0$ のとき $\zeta = -\zeta_0$ 、 $p_2 e_2 < 0$ のとき $\zeta = \zeta_0$ となる bang-bang 制御として求められる。

(8) 式から補助変数 p_1 、 p_2 に関して

$$\dot{p} = -\omega^2 p_2 \quad (10)$$

$$\dot{p}_2 = -p_1 + 2\zeta \omega p_2 \quad (11)$$

が得られ、 p_2 は (10)、(11) 式から

$$\dot{p}_2 - 2\zeta \omega \dot{p}_2 + \omega^2 p_2 = 0 \quad (12)$$

なる微分方程式を満足する。一方、 $t=0$ で

$$H = -1 - p_2(0) \omega^2 u_0 = 0 \quad (13)$$

から

$$p_2(0) = -\frac{1}{\omega^2 u_0} < 0 \quad (14)$$

の関係が得られる。ところで初期点 a において ζ をどのような値に設定しても $e_2(0_+) < 0$ となることは明らかなので、 $t=0_+$ において

$$p_2(0_+) e_2(0_+) > 0 \quad (15)$$

が成立する。従って (9) 式から最適軌道 T_{ac} は初期点 a を $\zeta = -\zeta_0$ で出発する。

このとき (12) 式は

$$\dot{p}_2 + 2\zeta_0 \omega \dot{p}_2 + \omega^2 p_2 = 0 \quad (16)$$

となり、 p_2 は

$$p_2 = A \varepsilon^{-\lambda_1 t} - \left(A + \frac{1}{\omega^2 u_0} \right) \varepsilon^{-\lambda_2 t} \quad (17)$$

ここで $\lambda_1 = \omega(\zeta_0 + \sqrt{\zeta_0^2 - 1})$ (18)

$$\lambda_2 = \omega(\zeta_0 - \sqrt{\zeta_0^2 - 1}) \quad (19)$$

として得られる。(6) 式から λ_1 、 λ_2 は実数となるので (17) 式において $p_2(t) = 0$ を満足する解は $A < 0$ のとき高々 1 個存在する。

ところで初期点 a を $\zeta = -\zeta_0$ で出発してそのままを維持し続けると (5) 式の固有値はそ

れぞれ (18), (19) 式で与えられて系は不安定となっているので軌道は発散する。従って最適軌道 T_{ac} は初期点 a を $\zeta = -\zeta_0$ で出発し、途中で 1 回だけ $\zeta = \zeta_0$ に切換えて c 点に達する軌道となることが判明する。

ac 間の途中での切換点を b とすると、b 点は初期点 a を $\zeta = -\zeta_0$ で出発する軌道 T_{ab} と c 点を初期点として $\zeta = \zeta_0$ で出発する逆時間軌道 T_{cb} の交点として求められる。

軌道 T_{ab} は (18), (19) 式で与えられる λ_1, λ_2 を用いて

$$\left(\frac{\lambda_1 e_1 - e_2}{\lambda_1 u_0} \right)^{\lambda_1} = \left(\frac{\lambda_2 e_1 - e_2}{\lambda_2 u_0} \right)^{\lambda_2} \tag{20}$$

として表わされる (付録 (1))。

同様に軌道 T_{cb} は

$$\left(-\frac{\lambda_1 e_1 + e_2}{\lambda_1 \beta u_0} \right)^{\lambda_1} = \left(-\frac{\lambda_2 e_1 + e_2}{\lambda_2 \beta u_0} \right)^{\lambda_2} \tag{21}$$

として表わされる (付録 (2))。

(20), (21) 式から u_0 を消去すると

$$\frac{e_2}{e_1} = \alpha \tag{22}$$

として

$$\left(\beta \frac{\alpha - \lambda_1}{\alpha + \lambda_1} \right)^{\lambda_1} = \left(\beta \frac{\alpha - \lambda_2}{\alpha + \lambda_2} \right)^{\lambda_2} \tag{23}$$

の関係を得る。

(22), (23) 式は行き過ぎ量を表わす定数 β が与えられるとき、初期点には無関係に切換点 b は $e_2 = \alpha e_1$ で表わされる直線上に存在し、 α は (23) 式で与えられることを意味している。

以上の結果をまとめると最適軌道 T_{ao} 及び適最制御則は図 1 で与えられ、図 2 は (1) 式の系に対する最適制御系の構成を示す。

4. 実験結果

図 2 の最適制御系において $\zeta_0 = 1.25, \omega = 1$ としハイブリッド計算機を用いて実験を行なった。行き過ぎ量を 25% 許す場合、 $\beta = 0.25$ とし (23) 式から切換点 b の存在する直線の勾配 α を求めると $\alpha = -3.99$ となる。又切換点 d の存

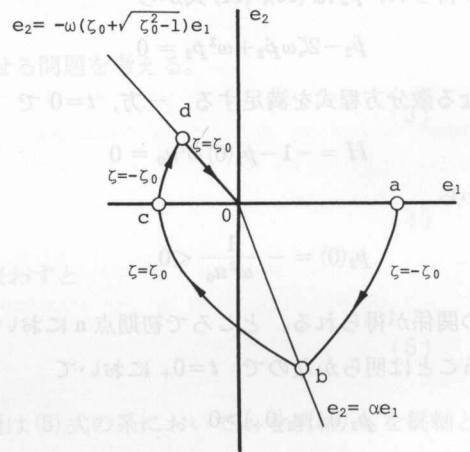


図 1 最適軌道及び最適制御則

Fig. 1. Optimal trajectory and optimal control law.

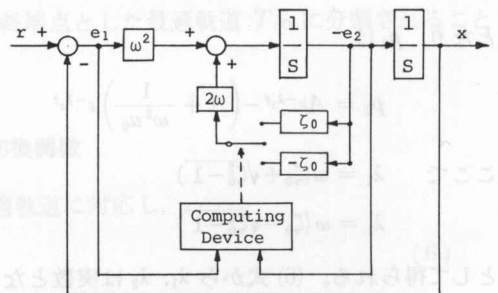


図 2 最適制御系

Fig. 2. Optimal control system.

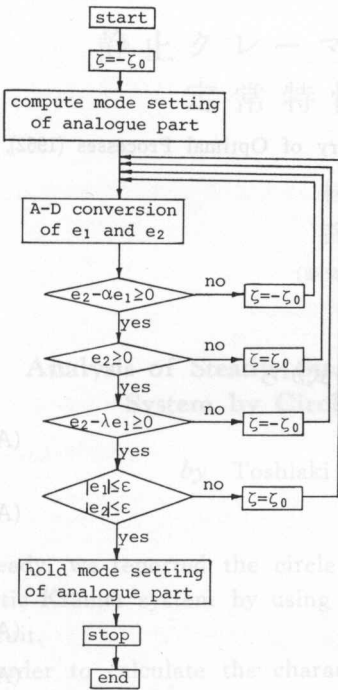


図3 フローチャート
Fig. 3. Flow chart.

在する直線は(7)式から $e_2 = -2e_1$ となる。操作量 ζ の切換は図3のフローチャートに従ってデジタルポテンショメータによって行なった。図4は状態平面における最適軌道を示し、図5は最適応答を示している。

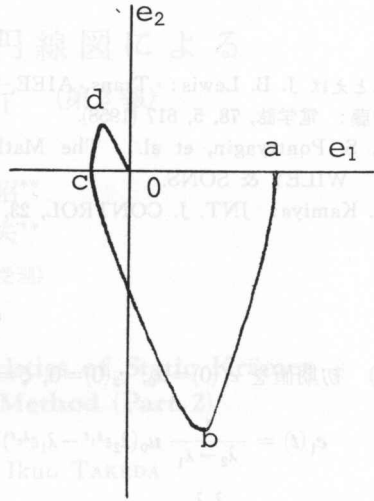


図4 最適軌道
Fig. 4. Optimal trajectory.

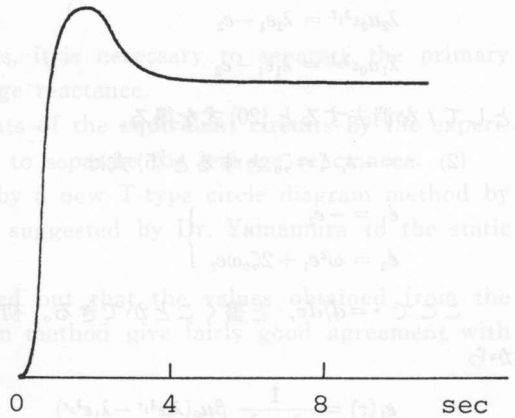


図5 最適ステップ応答
Fig. 5. Optimal step response.

5. 結 言

サーボ系のステップ応答を改善することを目的として減衰係数を操作量とした最適制御則を求め、ハイブリッド計算機による実験結果を示した。

実際のサーボ系においては、パラメータ測定に誤差が含まれること、外乱が存在すること、図2において直接 e_2 を観測できない場合が多いこと、などのために直接最適制御を行なうことは困難である。しかしこの場合にはモデル追従系¹⁾を構成してモデルに対して最適制御を行なうことによって容易に解決することができる。

参 考 文 献

- 1) たとえば J. B. Lewis: Trans. AIEE, 71, 449 (1953).
- 2) 伊藤: 電学誌, 78, 5, 617 (1958).
- 3) L. S. Pontryagin, et al.: The Mathematical Theory of Optimal Processes (1962), JOHN WILEY & SONS.
- 4) Y. Kamiya: JNT. J. CONTROL, 23, 4, 515 (1976).

付 録

(1) 初期値を $e_1(0)=u_0, e_2(0)=0, \zeta=-\zeta_0$ とし (5) 式から

$$e_1(t) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} u_0 (\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}) \tag{A-1}$$

$$e_2(t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} u_0 (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) \tag{A-2}$$

を得る。(A-1), (A-2) 式から

$$\lambda_2 u_0 e^{\lambda_1 t} = \lambda_2 e_1 - e_2 \tag{A-3}$$

$$\lambda_1 u_0 e^{\lambda_2 t} = \lambda_1 e_1 - e_2 \tag{A-4}$$

として t を消去すると (20) 式を得る。

(2) $\tau = -t, \zeta = \zeta_0$ とすると (5) 式は

$$\left. \begin{aligned} \dot{e}_1 &= -e_2 \\ \dot{e}_2 &= \omega^2 e_1 + 2\zeta_0 \omega e_2 \end{aligned} \right\} \tag{A-5}$$

ここで $\cdot = d/d\tau$, と書くことができる。初期値を $e_1(0) = -\beta u_0, e_2(0) = 0$ とすると (A-5) 式から

$$e_1(\tau) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \beta u_0 (\lambda_2 e^{\lambda_1 \tau} - \lambda_1 e^{\lambda_2 \tau}) \tag{A-6}$$

$$e_2(\tau) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \beta u_0 (-e^{\lambda_1 \tau} + e^{\lambda_2 \tau}) \tag{A-7}$$

を得る。(A-6), (A-7) 式から

$$\lambda_2 \beta u_0 e^{\lambda_1 \tau} = -(\lambda_2 e_1 + e_2) \tag{A-8}$$

$$\lambda_1 \beta u_0 e^{\lambda_2 \tau} = -(\lambda_1 e_1 + e_2) \tag{A-9}$$

として τ を消去すると (21) 式を得る。

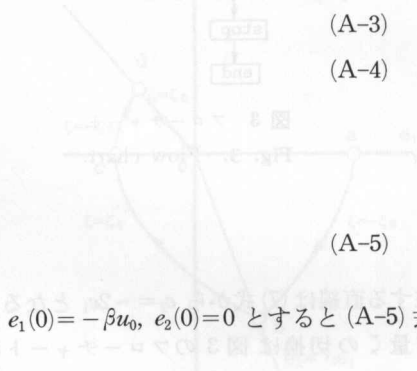
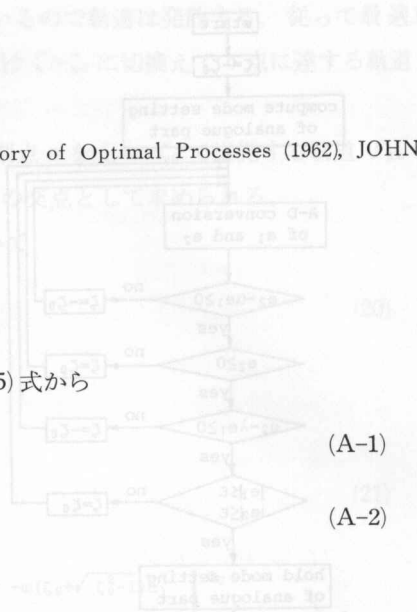


Fig. 1. Optimal trajectory in the $x-z$ plane.

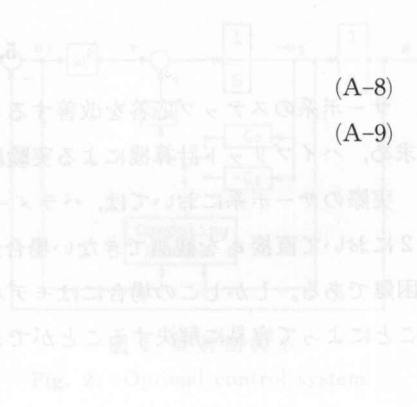


Fig. 2. Optimal control system.