

層流域における縮流管内の流れ*

谷口清一**

(昭和51年9月20日受理)

Flow through a Pipe with a Sudden Contraction in Laminar Region

by Seiichi TANIGUCHI

Numerical solutions of the Navier-Stokes equation for the axi-symmetric flow through a pipe with a sudden contraction (contraction ratio=1/2) are described. The numerical solutions, for Reynolds numbers ranging from 50 to 10,000, are obtained by using an upwind-difference scheme. The results are presented for pressure distribution, shear stress distribution, separation condition and so on, in front of the contraction. They are similar to those of a two dimensional flow over a forward facing-step. In this flow type, a certain separation condition is found in the Reynolds number region from 500 to 2300. A finite front eddy can be expected to exist at the limit as the Reynolds number approaches to zero.

1. 緒 言

十分に発達した管内の層流流れは Hagen-Poiseuille 流といわれ古くから良く知られている現象である。このような平行管内流の研究は助走区間流れの問題をも含めて数多く研究されてきた。しかし、工学上において管を急に拡大、収縮させなければならない場合がある。このような管径の急激な拡大または収縮が存在すると、流れはそれ自身急激な変化をとまらな流れざるを得ない。かかる流れにおいては管内拡大、縮流部前後における圧力、せん断力などの分布状態は複雑になり、さらにはく離渦の発生など工学的に関心の深い問題が生じてくる。管径の急激な変化は実際問題においては管内オリフィス、ノズル、直列に接続された異径管、血管内の狭さく部などにみられ、これらの問題を明らかにすることは意義あるものと考えられる。

かかる観点に立って本報告は、層流定常状態の管内流が急激な収縮によって、いかなる変化を生ずるものであるかを数値的に求めようとするものである。解析法には軸対称の Navier-Stokes の方程式を Upwind-difference 法 (Greenspan の方法)¹⁾ によって階差式に変換し、S.O.R. 法を用いて収束計算する方法が採用されている。

* 日本機械学会北海道支部講演会 (1975-10) にて講演

** 北見工業大学機械工学科

2. 数値計算

本研究を遂行するための数値計算を行う領域は使用記号とともに図1に示してある。また数値計算を適用した縮流管の幾何学的形状は $d/D_0=1/2$, $\overline{AB}:\overline{CD}:D_0=2.5:1.5:1$ であつて、管路内ステップの高さ \overline{GH} を1とすれば, $\overline{AB}:\overline{CD}:\overline{GH}=10:6:1$ の場合である。計算は軸対称を考慮しているので中心軸より片側を考えればよい。計算領域内では r, z 方向に長方形の網目を構成し, \overline{OI} を32等分, \overline{IH} を80等分, \overline{CD} を48等分した。この結果 r 方向のメッシュ幅を $\Delta r, z$ を方向のメッシュ幅を Δz とすると $\Delta z/\Delta r=2$ となる。基礎方程式は Navier-Stokes の方程式および連続の式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{2}$$

である。ここに \mathbf{v} は速度ベクトル (u, w), t は時間, p は $\frac{1}{2} \rho W_0^2$ で無次元化された圧力, Re は $Re = W_0 D_0 / \nu$ として定義される Reynolds 数である。ただし W_0 は管入口の流入速度, D_0 は太管径であり, ν は流体の動粘性係数である。

流れ関数および渦度を

$$u = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \tag{3}$$

$$\xi = \partial u / \partial z - \partial w / \partial r \tag{4}$$

として式(1), (2)を整理すると, 定常流に対しては

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\xi}{r^2} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{\xi}{r^2} \right) \tag{5}$$

$$-\xi = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \tag{6}$$

となる。

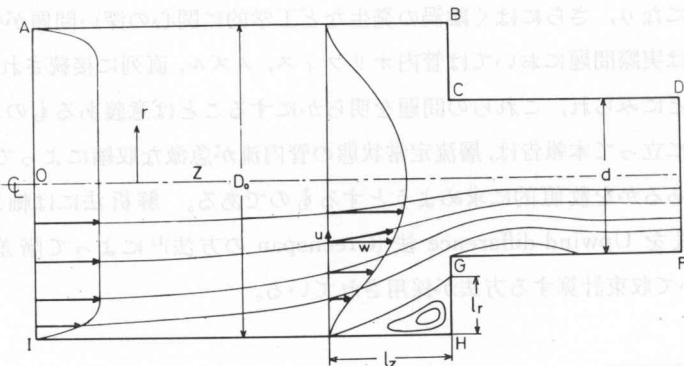


図1 計算領域, u, w : r, z 方向流速, l_r, l_z : 渦長

Fig. 1. Geometry of flow field.

Navier-Stokes の方程式の定常解を求めるためには基礎方程式を Upwind-difference 法によって階差式に変換しなければならないが、その方法は先の報告²⁾に詳しく述べられているのでここでは結果のみを記す。

$$a\xi_P = a_N\xi_N + a_S\xi_S + a_E\xi_E + a_W\xi_W \tag{7}$$

$$a^*\psi_P = a_N^*\psi_N + a_S^*\psi_S + a_E^*\psi_E + a_W^*\psi_W + \xi_P r_P / 2 \tag{8}$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} a_N &= (\psi_{NE} - \psi_{NW}) + |\psi_{NE} - \psi_{NW}| + \Delta z (2r_P / \Delta r + 1) / Re \\ a_S &= (\psi_{SW} - \psi_{SE}) + |\psi_{SW} - \psi_{SE}| + \Delta z (2r_P / \Delta r - 1) / Re \\ a_E &= (\psi_{SE} - \psi_{NE}) + |\psi_{SE} - \psi_{NE}| + 2\Delta r r_P / \Delta z Re \\ a_W &= (\psi_{NE} - \psi_{NW}) + |\psi_{NE} - \psi_{NW}| + 2\Delta r r_P / \Delta z Re \\ a &= a_N + a_S + a_E + a_W + (\psi_E - \psi_W) \Delta r / r_P + 2\Delta r \Delta z / r_P Re \end{aligned} \right\} \tag{9}$$

$$\left. \begin{aligned} a_N^* &= \frac{1}{2\Delta r} \left(\frac{1}{\Delta r} - \frac{1}{r_P} \right), & a_S^* &= \frac{1}{2\Delta r} \left(\frac{1}{\Delta r} + \frac{1}{r_P} \right) \\ a_E^* &= \frac{1}{2\Delta z^2}, & a_W^* &= \frac{1}{2\Delta z^2}, & a^* &= a_N^* + a_S^* + a_E^* + a_W^* \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

である。ただし各変数の添字は図2の格子点を示すこととする。

計算は式(9)、(10)を用いて行なわれるがそのための境界条件をつぎのように定める。

i) 流入条件 (図1, AOI); 管内流の数値解法に対する流入条件としては Hagen-Poiseuille 流の条件が広く採用されているが、本報告においては流入断面の大部分がポテンシャルコアである管内助走区間の速度分布³⁾を採用した (図5, $z=0.0$ 参照)。

ii) 壁面条件; 壁面上における境界条件を図3に基づいて定めるとつぎのようになる。

$$\psi_P = 0, \quad \xi_P = \frac{3}{\Delta r^2 (\Delta r - r_P)} (\psi_{NP} - \psi_P) - \frac{r_P}{2(\Delta r - r_P)} \xi_{NP} \tag{11}$$

またステップ面では

$$\psi_{P'} = 0, \quad \xi_{P'} = \frac{3}{\Delta z^2 r_P} (\psi_{P'} - \psi_{NP'}) - \frac{1}{2} \xi_{NP'} \tag{12}$$

となる。

iii) 中心軸条件; 中心軸 (OE) 上では流れの対称性を考慮するとつぎのようになる。

$$\psi = -0.125, \quad \xi = 0$$

iv) 流出条件; 流れは G 点 (図1) よりはく離をとまって小径管に流入し、下流に進むにつれて Hagen-Poiseuille 流に近付いて行くものと考えられる。しかしそのような十分に発

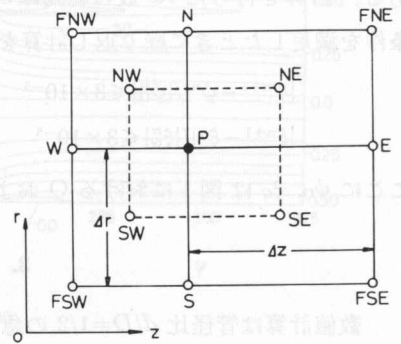


図2 数値計算のための格子

Fig. 2. Finite-difference mesh for numerical calculation.

達した流れに到達するには相当の管長を必要とするものと考えられるので、ここでは固定した流出条件を与えずつぎに示す二次の外挿式を用いた。

$$\partial^3\psi/\partial z^3 = 0, \quad \partial^3\xi/\partial z^3 = 0 \quad (13)$$

以上で縮流管の縮流部周辺の流れ場を計算するための階差式および境界条件がすべて用意されたことになる。数値解を求めるためには出発値として各格子点に適当な値を与え、S.O.R.法による繰返し計算を行う。繰返し計算における n 回目と $(n+1)$ 回目との関係は全格子点について

$$\psi^{n+1} = \psi^n + \alpha(\psi^{n+1/2} - \psi^n) \quad (14)$$

$$\xi^{n+1} = \xi^n + \beta(\xi^{n+1/2} - \xi^n) \quad (15)$$

となる。 $\psi^{n+1/2}$, $\xi^{n+1/2}$ は式 (7), (8) によって求められる近似解であり、 α , β は収束緩和係数である。計算を行った Re 数の範囲は $50 \leq Re \leq 10^4$ であり、すべての格子点においてつぎの収束条件を満足したときに繰返し計算を終了することとした。

$$\begin{aligned} |\psi^{n+1} - \psi^n| / |\psi_0^n| &\leq 3 \times 10^{-5} \\ |\xi^{n+1} - \xi^n| / |\xi_G^n| &\leq 3 \times 10^{-5} \end{aligned} \quad (16)$$

ここに ψ_0 , ξ_G は図 1 における O および G 点での ψ , ξ の値である。

3. 計算結果および考察

数値計算は管径比 $d/D=1/2$ の急激な収縮のある場合について、主流の平均速度を変化させることによって $Re=50, 100, 500, 1000, 1500, 2300, 5000$ および 10^4 の 8 通りについて行っ

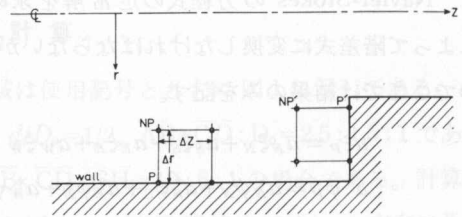
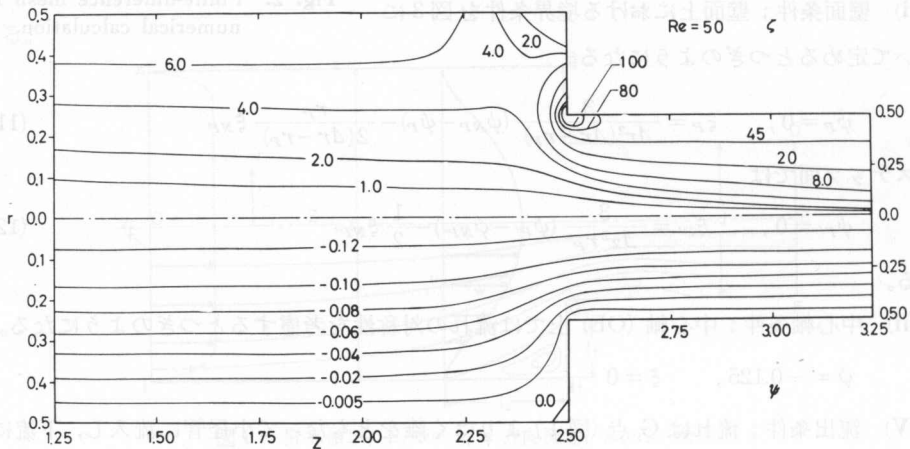
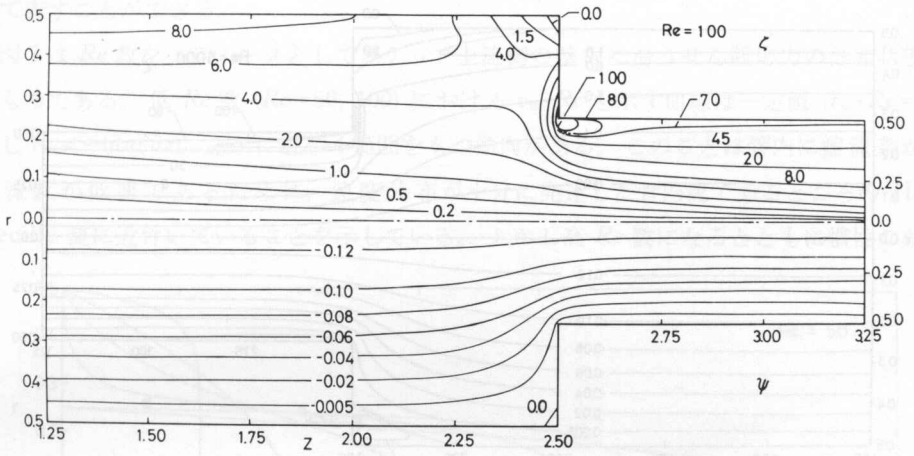


図 3 境界条件のための格子

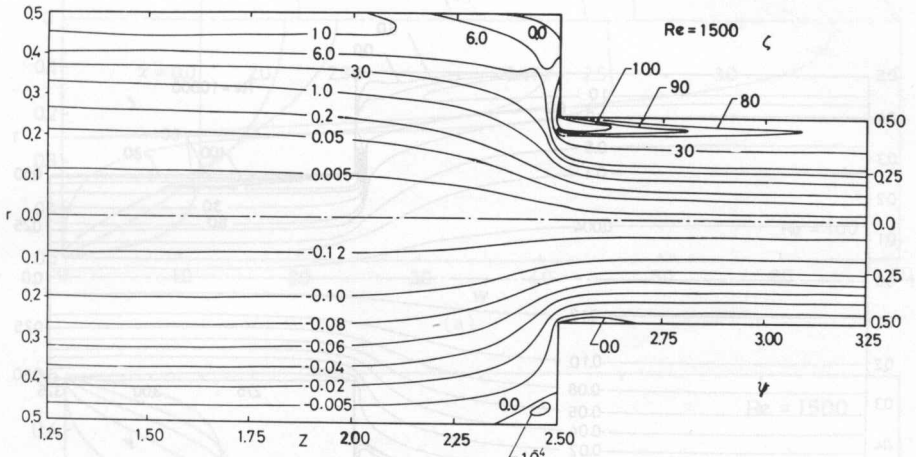
Fig. 3. Finite-difference mesh for boundary conditions.



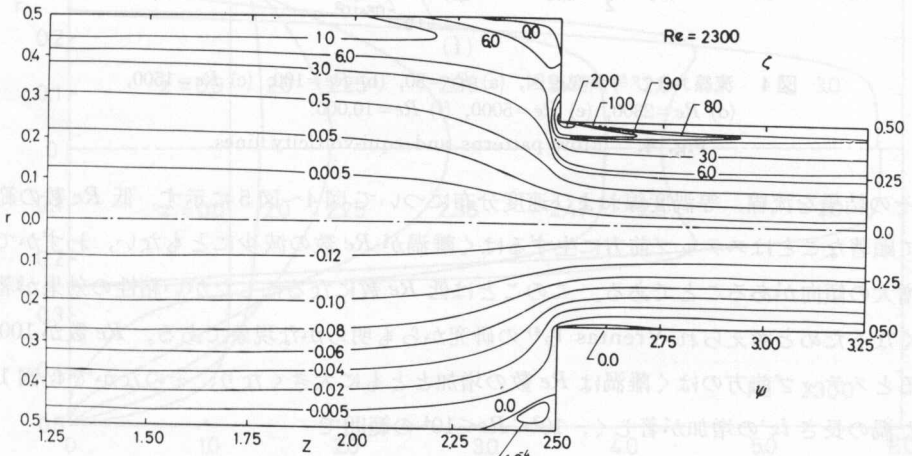
(a)



(b)



(c)



(d)

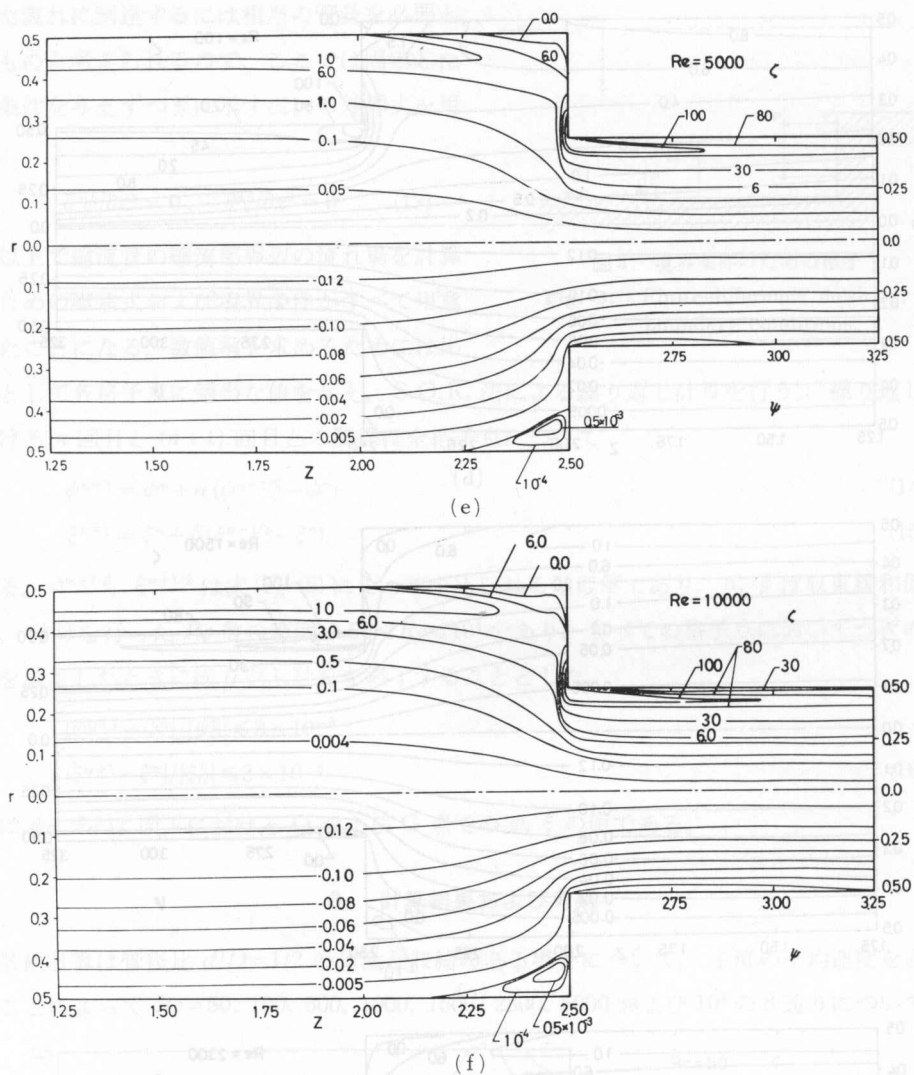


図4 流线および等渦度線図, (a) $Re=50$, (b) $Re=100$, (c) $Re=1500$, (d) $Re=2300$, (e) $Re=5000$, (f) $Re=10,000$.

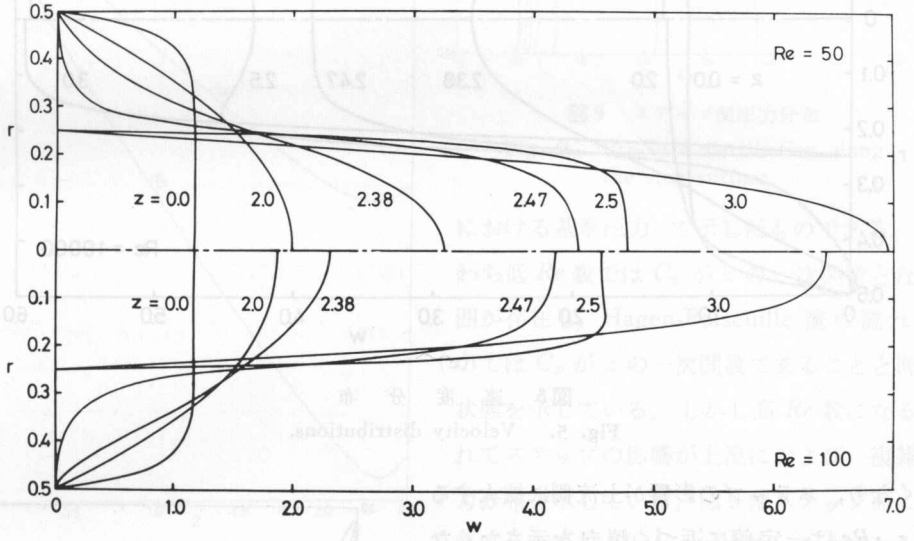
Fig. 4. Flow patterns and equi-vorticity lines.

た。その結果を流线, 等渦度線および速度分布について図4~図5に示す。低 Re 数の範囲において顕著なことはステップ前方に生ずるはく離渦が Re 数の減少にとともにない, わずかではあるが増大の傾向があることである。このことは低 Re 数になるにしたがい粘性の効果が著しく大きくなるためと考えられ Vrentas ら⁴⁾の研究からも明らかな現象である。 Re 数が100以上になるとステップ前方のはく離渦は Re 数の増加とともに大きくなり, そのなかでも図1に定義した渦の長さ lz の増加が著しく, $10^3 \leq Re \leq 10^4$ の範囲で

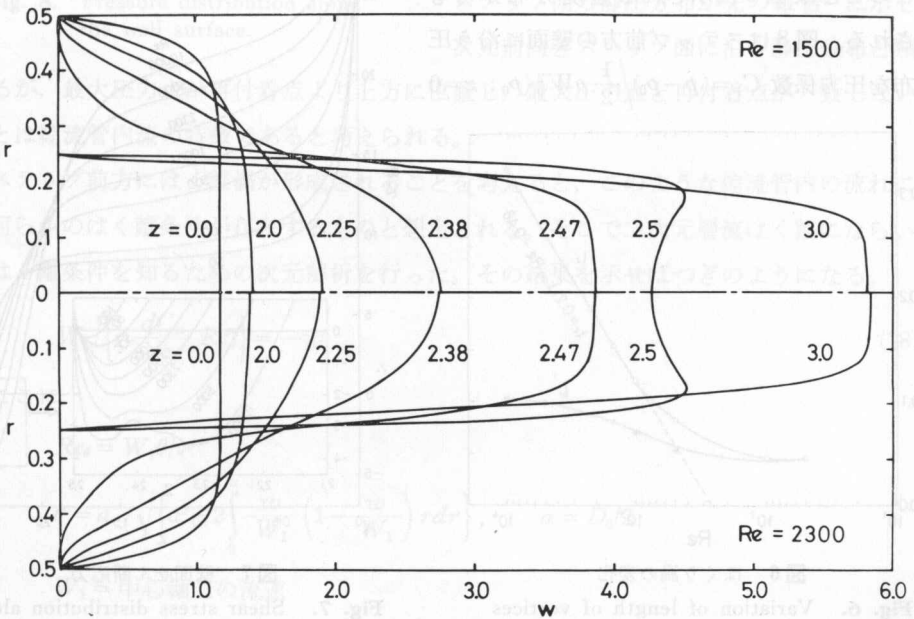
$$lz = 0.21 \log Re - 0.48$$

として表すことができる。

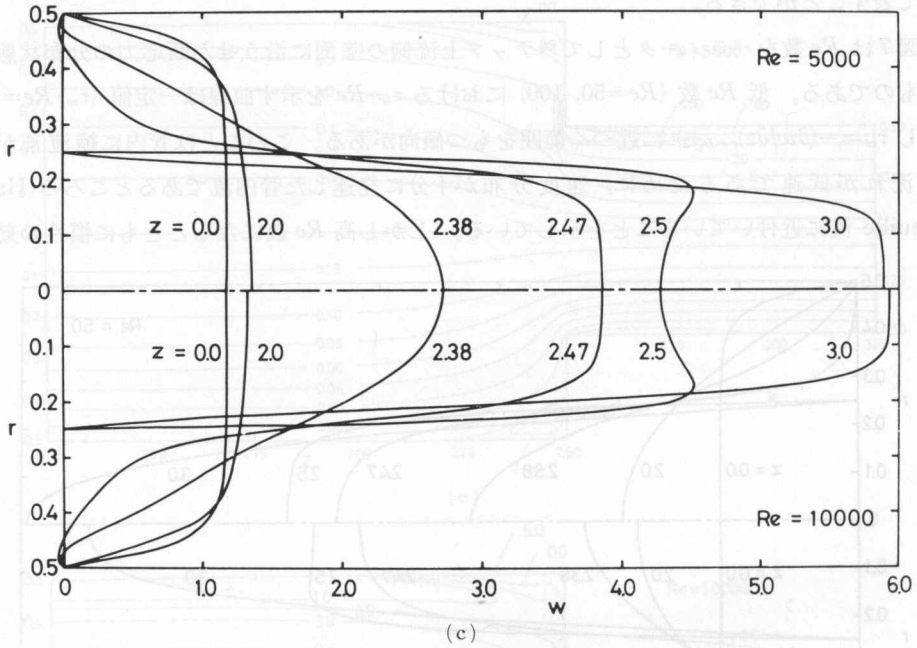
図7は Re 数をパラメータとしてステップ上流側の壁面に沿うせん断応力の分布状態を示したものである。低 Re 数 ($Re=50, 100$) における $\tau_w \cdot Re$ を示す曲線は一定値 ($\tau_w \cdot Re=8.0$), ただし $\tau_w = -(\partial w / \partial z)_{r=D_0/2}$ に近づく範囲をもつ傾向がある。このことは管内に縮流部があっても流れが低速であるために、速度分布が十分に発達した管内流であるところの Hagen-Poiseuille 流に近付いていることを示している。しかし高 Re 数になるとともに慣性の効果が



(a)



(b)



(c)
 図5 速度分布
 Fig. 5. Velocity distributions.

大きくなり、ステップの影響が上流側に拡大するため $\tau_w \cdot Re$ は一定値に近づく傾向を示さなくなる。このことは図5に示される速度分布からも推察される。図8はステップ前方の壁面に沿う圧力分布を圧力係数 $C_p = (p - p_0) / \frac{1}{2} \rho W_0^2$ ($p_0; z=0$)

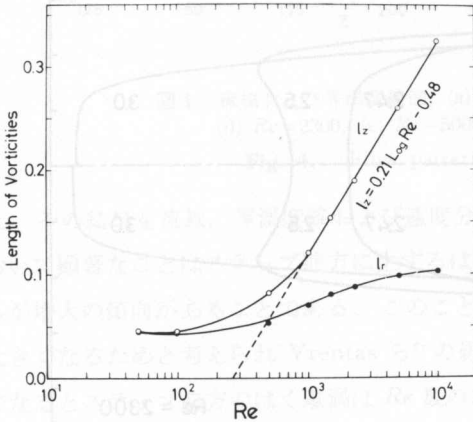


図6 はくり渦の変化
 Fig. 6. Variation of length of vortices with Reynolds number.

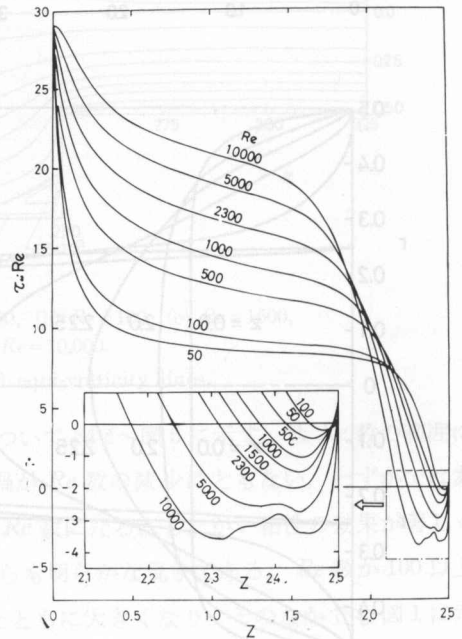


図7 壁面せん断応力
 Fig. 7. Shear stress distribution along the wall surface.

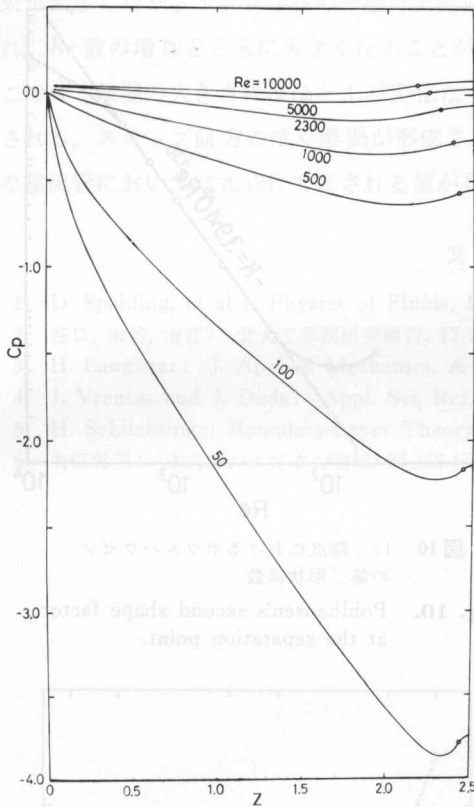


図8 壁面圧力分布

Fig. 8. Pressure distribution along the wall surface.

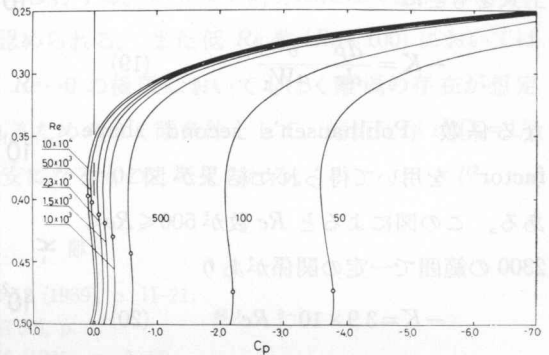


図9 ステップ面圧力分布

Fig. 9. Pressure distribution along the step surface.

における基準圧力)で示したものである。すなわち低 Re 数では C_p が z の一次関数となる範囲が存在し、Hagen-Poiseuille 流の流れにおいては C_p が z の一次関数であることと同一の状態を示している。しかし高 Re 数になるにつれてステップの影響が上流におよび、複雑な圧力分布を示している。図9はステップ面に沿う静圧分布を示したものである。この図から管内ステップ面の静圧分布が先の報告²⁾に示した二次元前向きステップ面に沿う静圧分布と類似しているが、最大圧力点が再付着点より上方に位置し、最大圧力点と再付着点が一致しない。このことは縮流管内流の特徴であると考えられる。

ステップ前方にはく離渦が形成されることを考えると、このような縮流管内の流れにおいても何らかのはく離条件が存在するものと想定される。そこで二次元層流はく離にならない局所的なはく離条件を知るための次元解析を行った。その結果を示せばつぎのようになる。

$$W_1 \left\{ \nu \frac{dC_p}{dz} Re_\theta^2 \right\} = \text{一定} \quad (18)$$

ここに

$$Re_\theta = W_1 \theta / \nu$$

$$\theta = a - \sqrt{\left\{ a^2 - 2 \int_0^a \frac{w}{W_1} \left(1 - \frac{w}{W_1} \right) r dr \right\}}, \quad a = D_0/2$$

W_1 = 中心軸上の流速

上式をもとに

$$-K = \frac{dp}{dz} \frac{\theta^2}{\mu W_1} \quad (19)$$

なる係数 (Pohlhausen's second shape factor⁵⁾) を用いて得られた結果が図 10 である。この図によると Re 数が $500 \leq Re \leq 2300$ の範囲で一定の関係があり

$$-K = 3.9 \times 10^{-6} Re^{1.38} \quad (20)$$

として表される。いま $-K$ を $Re^{1.38}$ で除したものを $-K^*$ とすれば

$$-K^* = 3.9 \times 10^{-6} \quad (21)$$

となり上記の Re 数の範囲内では K^* が Re 数に無関係な一定の値をとることになる。したがって $-K^*$ は Re 数が $500 \leq Re \leq 2300$ の範囲における縮流管 (縮流比 $d/D_0=1/2$) の前方はく離のはく離条件としての目安になると考えられる。

縮流管前後 ($z_0=0.0 \sim 3.5$) における損失水頭を

$$\Delta h = \xi \frac{w_0^2}{2g} \quad (22)$$

としたときの損失係数 ξ を示したのが図 11 である。図中の破線は $d/D_0=1/2$ の縮流管における乱流の場合の損失係数⁶⁾ を示したものであり両者の差は管内の流れが層流と乱流との違いによるものと考えられる。

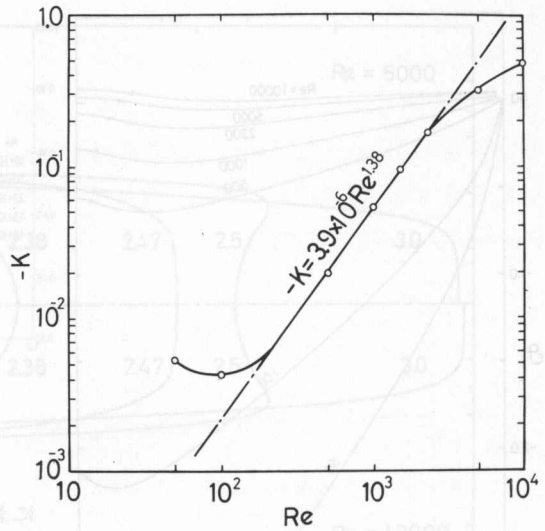


図 10 はく離点におけるポウルハウゼンの第二形状係数

Fig. 10. Pohlhausen's second shape factor at the separation point.

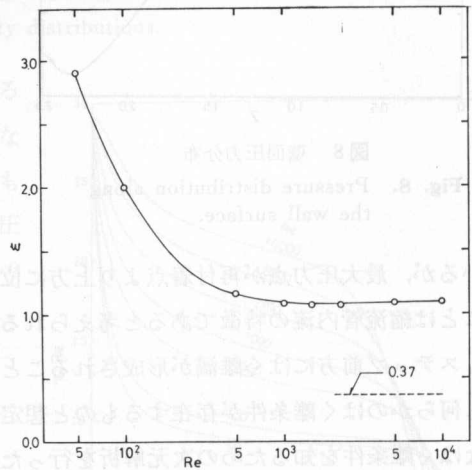


図 11 損失係数

Fig. 11. Loss head coefficient.

4. 結 論

本報告は層流定常状態の管内流が急激な収縮 (縮流比 $d/D_0=1/2$) によっていかなる変化を生ずるかを数値的に明らかにしたものであって、つぎの結論を得た。

管内縮流部前方の流れは低 Re 数 ($Re \leq 100$) の範囲で粘性の効果が大きく表れ、図 1 で示される管長においても Hagen-Poiseuille 流に近づく。しかし Re 数の増加とともに慣性の効

果が大きくなりステップ存在の影響は上流側に移行する。ステップ前方にははく離渦が形成され、 Re 数の増加とともに大きくなることが認められる。また低 Re 数 ($Re \leq 100$) においてははく離渦の大きさにはほとんど変化なく $Re \rightarrow 0$ の極限においてもはく離渦の存在が想定される。ステップ前方のはく離渦が形成されるためのはく離条件として、縮流比が $d/D_0 = 1/2$ の縮流管においては式 (21) で表される値が目安になるものと考えられる。

文 献

- 1) D. Spalding, et al.: Physics of Fluids, **12-12** (1969), p. II-21.
- 2) 谷口, 木谷, 有江: 北大工学部研究報告, **77** (昭50), p. 1.
- 3) H. Langhaar: J. Applied Mechanics, **A-56** (1942), p. A-55.
- 4) J. Vrentas and J. Duda: Appl. Sci. Res., **28** (1973), p. 241.
- 5) H. Schlichting: Boundary-Layer Theory, 6th. ed., **192** (1968), McGraw-Hill.
- 6) 有江幹男: 水力学および水力機械, **95** (昭47), 工学図書.

1. 論文の要約

ここでは、直流電力系統の最適化について論じた。ここでは

前報での、送電損失を負荷とみなし、発電機および負荷ノードに割り付ける方法に対し、負荷ノードにも割り付ける方法について検討する。すなわち、前報の方法では、発電機により系統に注入される有効電力の総和が、送電出力の総和より小さくなること、

送電損失も小さく見られるようになる点を考慮して、損失の割り付けに就いて改善を計る。また、

DC法を用いた方法による電力系統最適化の妥当性を、前報では、定数法でも定数法を用いて検討したが、ここでは、厳密解法である Newton-Raphson 法 (N-R 法) で検討することとする。

2. 送電損失の負荷ノードへの割り付け

前報における送電損失の割り付け法は

$$P_{ij} = C_{ij} P_{ij}^0 - \sum_k L_{ijk} \cdot D_{ijk} \quad (1)$$

* 電気学会論文誌A(電力・エネルギー)昭和51年10月1日発表

** 東北工業大学電気工学部