微分係数と平均値について

——実関数の微分可能性についての一考察——

礒部熙郎*

(昭和51年4月30日受理)

On Differential Coefficients and Mean Values

—Some Notes on Differentiability of Real Functions—

by Kiro ISOBE

Let $f(x)$ be a Darboux function on $[a, b]$ and $f(a)=f(b)$. In this paper first we show that for any $\varepsilon>0$ there exist c and d such as $a<c<d<b$, $d-c<\varepsilon$ and $f(c)=f(d)$. Some methods for proof of this proposition which we use essentially are due to [1].

In the next place, let $f(x)$ be continuous on $[a, b]$. Adapting the previous proposition to $f(x)$, we have the following proposition that for any $\varepsilon>0$ there exist c and d such as $a<c<d<b$, $d-c<\varepsilon$ and

$$\frac{f(d)-f(c)}{d-c}=\frac{f(b)-f(a)}{b-c}.$$

Consequently we can show that there exist two sequences $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ such as $a<c_1<c_2<\cdots<d_2<d_1<b$, $d_n-c_n\to 0$ and

$$\frac{f(d_n)-f(c_n)}{d_n-c_n}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Thus we obtain x_0 in (a, b) as $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n=\lim\limits_{n\to+\infty} d_n=x_0$.

Moreover, let $f(x)$ be continuous on (α, β) and we put

$$\Gamma=\left\{\gamma:\gamma=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},\ a, b\in(\alpha,\beta) \text{ and } a\neq b\right\}.$$

To any $\varepsilon>0$ there exist two sequences $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ such that $\alpha<x_1<x_2<\cdots<y_2<y_1<\beta$, $y_n-x_n\to 0$ and

$$\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}=\gamma$$

and we obtain x in (α, β) as $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=x$.

Totality of all such x is denoted by $X_\gamma\ (\gamma\in\Gamma)$ and to any $x\ (\alpha<x<\beta)$ we put $\Gamma=\{\gamma: x\in X_\gamma\}$.

The following theorems are established:

---

* 北見工業大学一般教育

Theorem 1. *If* $f(x)$ *is differentiable at* $x_0\,(\alpha<x_0<\beta)$ *and* $\Gamma_{x_0}\neq\phi$, *then* $\Gamma_{x_0}=\{f'(x)\}$.

Theorem 2. *If* $\Gamma_{x_0}=\{\gamma\}$, *then* $f(x)$ *is differentiable at* x_0 *and* $f'(x_0)=\gamma$.

はじめに

$f(x)$ を $[a,b]$ 上の Darboux 関数 (中間値の定理の成立する関数) とし, $f(a)=f(b)$ とする。この小論では, 先ず, 任意の $\varepsilon>0$ に対し, $a<c<d<b$, $d-c<\varepsilon$ かつ $f(c)=f(d)$ である c, d の存在が示される。このことの証明は本質的に [1] に述べられている方法に負っている。

この事を $[a,b]$ 上の連続関数 $f(x)$ ($f(a)=f(b)$ は仮定しない。) に適用して, 任意の $\varepsilon>0$ に対して, $a<c<d<b$, $d-c<\varepsilon$ かつ

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(d)-f(c)}{d-c}$$

である c, d の存在を示すことができる。従って, $a<c_1<c_2<\cdots<d_2<d_1<b$, $d_n-c_n\to 0$ かつ

$$\frac{f(d_n)-f(c_n)}{d_n-c_n}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

である数列 $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ の存在が示され, $\lim_{n\to+\infty}c_n=\lim_{n\to+\infty}d_n=x_0$ として, (a,b) 内に x_0 が決定する。

今, $f(x)$ を (α,β) 上の連続関数とし,

$$\Gamma=\left\{\gamma:\gamma=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},\quad a,b\in(\alpha,\beta)\quad \text{かつ}\quad a\neq b\right\}$$

とおくとき, 任意の $\Gamma\ni\gamma$ に対し

$$x_1<x_2<\cdots<y_2<y_1,\qquad y_n-x_n\to 0$$

かつ

$$\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}=\gamma\qquad(n=1,2,\cdots)$$

である (α,β) の数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ と

$$\lim_{n+\to\infty}x_n=\lim_{n+\to\infty}y_n=x$$

として x が決まる。このような x の全体を X_γ とおく。

また, $(\alpha,\beta)\ni x$ に対し,

$$\Gamma_x=\left\{\gamma:x\in X_\gamma\right\}$$

とおく。このとき, 次の事が成立する。

$f(x)$ が $x_0\in(\alpha,\beta)$ で微分可能で $\Gamma_{x_0}\neq\phi$ ならば $\Gamma_{x_0}=\{f'(x_0)\}$。

$\Gamma_{x_0}=\{\gamma\}$ ならば $f(x)$ は x_0 で微分可能で $\gamma=f'(x_0)$。

1. 区間と平均値

命題 1. $f(x)$ を $[a, b]$ 上の Darboux 関数, $f(a)=f(b)$ とする。

$$a<c<d<b\,,\quad d-c<\frac{2(b-a)}{3}\,,\quad f(c)=f(d)$$

なる c, d が存在する。

(証明) $f(x)$ が $[a, b]$ で一定ならば命題は成立している。従って,

$$f(x_0)\neq f(a)\Bigl(=f(b)\Bigr),\qquad a<x_0<b$$

なる x_0 が存在する場合について証明する。一般性を失なわずに $f(a)=f(b)<f(x_0)$ と仮定する。$f(a)=f(b)<k_1<f(x_0)$ なる k_1 をとる。$a<a_1<x_0$, $f(a_1)=k_1$ なる a_1 と $x_0<b_1<b$, $f(b_1)=k_1$ なる b_1 とが存在する。

$$\lambda_1=\frac{b_1-a_1}{3}<\frac{b-a}{3}$$

とおき, $x_1=a_1+\lambda_1$, $y_1=b_1-\lambda_1$ とおく $f(a_1)=f(x_1)$, $f(x_1)=f(y_1)$, $f(y_1)=f(b_1)$ のいずれか一つが成立していれば命題は成立しているから, これらはどの一つも成立していないとして, 次の 4 つの場合に分けられる。

A_1) $f(a_1)<f(x_1)<f(y_1)$　の場合,

A_2) $f(a_1)<f(x_1)$, $f(x_1)>f(y_1)$　の場合,

B_1) $f(a_1)>f(x_1)>f(y_1)$　の場合,

B_2) $f(a_1)>f(x_1)$, $f(x_1)<f(y_1)$　の場合。

A_1) の場合は $f(x_1)<k_2<f(y_1)$ である k_2 をとり, $f(c)=k_2$, $x_1<c<y_1$ なる c と $f(d)=k_2$, $y_1<d<b_1$ なる d が存在して,

$$d-c<b_1-x_1<\frac{2}{3}(b-a)$$

であるから命題は成立。

A_2) の場合は, $\max\{f(a_1), f(y_1)\}<k_2<f(x_1)$ なる k_2 をとり, $f(c)=k_2$, $a_1<c<x_1$ である c と $f(d)=k_2$, $x_1<d<y_1$ である d が存在して,

$$d-c<y_1-a_1<\frac{2}{3}(b-a)$$

であるから命題は成立。

B_1) の場合は, $f(x_1)>k_2>f(y_1)$ なる k_2 をとり, $f(c)=k_2$, $x_1<c<y_1$ なる c と $f(d)=k_2$, $y_1<d<b_1$ なる d が存在して,

$$d-c<b_1-x_1<\frac{2}{3}(b-a)$$

であるから命題は成立。

B_2) の場合は，$\min\{f(a_1), f(y_1)\} > k_2 > f(x_1)$ なる k_2 をとり，$f(c)=k_2$, $a_1<c<x_1$ なる c と $f(d)=k_2$, $x_1<d<y_1$ なる d が存在して，

$$d-c<y_1-a_1<\frac{2}{3}(b-a)$$

であるから命題は成立。(証終)

命題 1. をくり返し用いれば，次の命題が得られる。

命題 2. $f(x)$ を $[a, b]$ 上の Darboux 関数，$f(a)=f(b)$ とする。このとき，任意の $\varepsilon>0$ に対して，$a<c<d<b$, $d-c<\varepsilon$ かつ $f(c)=f(d)$ である c, d が存在する。

今度は $[a, b]$ 上の連続関数* $f(x)$ ($f(a)=f(b)$ は仮定しない。) に対して命題 2. の適用を考えることにする。

命題 3. $f(x)$ を $[a, b]$ 上の連続関数とする。任意の $\varepsilon>0$ に対して，

$$a<c<d<b, \qquad d-b<\varepsilon$$

かつ，

$$\frac{f(d)-f(c)}{d-c}=\frac{f(b)-f(a)}{b-c}$$

である c, d が存在する。

(証明)

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

とおき，$F(x)$ は $[a, b]$ 上の連続関数 (したがって Darboux 関数)，$F(a)=F(b)=0$ である。

$F(x)$ に命題 2. を適用すれば，任意の $\varepsilon>0$ に対して，$a<c<d<b$, $d-c<\varepsilon$ かつ $F(c)=F(d)$ である c, d が存在する。

$$F(c)=f(c)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a)$$

$$F(d)=f(d)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(d-a)$$

$$F(d)-F(c)=f(d)-f(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(d-c)=0$$

$$\frac{f(d)-f(c)}{d-c}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

である。(証終)

---

* 一般に Darboux 関数と Darboux 関数の和が Darboux 関数になるかどうか解らないために，$f(x)$ を連続関数とした。

2.　微分可能性についての考察

$f(x)$ を (α, β) 上の連続関数とする。記号 Γ, $X_\gamma (\gamma\in\Gamma)$, $\Gamma_x (\alpha<x<\beta)$ 等の定義は「まえがき」に述べたので省略する。$X_\gamma (\gamma\in\Gamma)$ の存在については命題3. より明らかである。

つぎの命題は明らかである。

命題 4.　$\bigcup_{\Gamma\ni\gamma} X_\gamma$ は (α, β) で稠密である。しかし，一般に $\bigcup_{\Gamma\ni\gamma} X_\gamma=(\alpha, \beta)$ は成立しない。

例 1.　$f(x)=x^3\,(-<x<1)$ とする。明らかに $0\in\Gamma$ である。ある $\gamma\in\Gamma$ に対して，$0\in X_\gamma$ とすれば

$$x_1<x_2<\cdots<0<\cdots<y_2<y_1, \qquad \lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = 0$$

かつ

$$\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n} = \gamma>0$$

$(n=1, 2, \cdots)$ なる数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ が存在するが

$$\frac{f(y_n-f(x_n)}{y_n-x_n} = y_n^2+y_nx_n+x_n^2\longrightarrow 0$$

となるから $0\in X_\gamma$ なる $\gamma\in\Gamma$ は存在しない。

また $f(x)$ が $x=x_0$ で微分可能で $f'(x_0)\in\Gamma$ であっても，$x_0\in X_{f'(x_0)}$ が成立とはかぎらない。

例 2.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & (x\leq 1) \\ -x+2 & (x>1) \end{cases} \quad \text{とおく。}$$

$f'(0)=0$ であり，例えば

$$\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)} = 0\in\Gamma$$

であるが $X_0=\{1\}$ であり $0\overline{\in} X_0$。

定理 1.　$f(x)$ が $x=x_0$ で微分可能であり，$x_0\in X_\gamma$ とすれば $f'(x_0)=\gamma$。

(証明)　条件より

$$x_1<x_2<\cdots<y_2<y_2\,, \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = x_0\,, \quad \frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n} = \gamma \qquad (n=1, 2, \cdots)$$

なる数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ が存在する。また

$$\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} = f'(x_0)+\varepsilon_n$$

$$\frac{f(y_n)-f(x_0)}{y_n-x_0} = f'(x_0)+\varepsilon_n'$$

とおけば ε_n, $\varepsilon_n'\to 0$ $(n\to+\infty)$ である。

$$f(x_n)=f'(x_0)(x_n-x_0)+\varepsilon_n(x_n-x_0)+f(x_0)$$

$$f(y_n)=f'(x_0)(y_n-x_0)+\varepsilon'_n(y_n-x_0)+f(x_0)$$

$$\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}=f'(x_0)+\frac{\varepsilon'_n(y_n-x_0)}{y_n-x_n}-\frac{\varepsilon_n(x_n-x_0)}{y_n-x_n}=\gamma$$

$$\left|\frac{\varepsilon'_n(y_n-x_0)}{y_n-x_n}-\frac{\varepsilon_n(x_n-x_0)}{y_n-x_n}\right|<|\varepsilon'_n|+|\varepsilon_n|\longrightarrow 0 \qquad (n\to+\infty)$$

であるから $f'(x_0)=\gamma$。(証終)

定理 2. $\Gamma_{x_0}=\{\theta\}$ ならば $f(x)$ は $x=x_0$ で微分可能であり，$f'(x_0)=\theta$。

(証明) 先ず $f(x)$ が $x=x_0$ で微分可能であることを示す。そのためには，

$$x_1<x_2<\cdots,\quad x_n\longrightarrow x_0,\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=a,$$

$$y_1>y_2>\cdots,\quad y_n\longrightarrow x_0,\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{f(y_n)-f(x_0)}{y_n-x_0}=b$$

とおくとき，つねに $a=b$ であることを示せばよい。今 $a\neq b$ として，一般性を失うことなく a,b を有限な実数とし，$a<b$ と仮定しておく。$a<\gamma<b$ である任意の γ をとる。$\delta>0$ を $a+\delta<\gamma<b-\delta$ になるように定め，任意の $\varepsilon>0$ に対して，

$$x_0<y_{n_1}<x_0+\varepsilon$$

かつ

$$\frac{f(y_{n_1})-f(x_0)}{y_{n_1}-x_0}>\beta-\delta$$

となる y_{n_1} が存在する。このような y_{n_1} を固定して，

$$\frac{f(y_{n_1})-f(x)}{y_{n_1}\ x}\qquad(x\leqq x_0)$$

は x の関数として連続である。また

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=a$$

を考え合せれば，

$$x_0-\varepsilon<x_{m_1}<x_0,\quad \frac{f(y_{n_1})-f(x_{m_1})}{y_{n_1}-x_{m_1}}>\beta-\delta,$$

かつ

$$\frac{f(x_0)-f(x_{m_1})}{x_0-x_{m_1}}<\alpha+\delta$$

を満たす x_{m_1} が存在する。このような x_{m_1} を固定して

$$\frac{f(x)-f(x_{m_1})}{x-x_{m_1}}\qquad(x\geqq x_0)$$

は x の関数として連続であり

$$\frac{f(x_0)-f(x_{m_1})}{x_0-x_{m_1}}<\gamma<\frac{f(y_{n_1})-f(x_{m_1})}{y_{n_1}-x_{m_1}}$$

であるから,

$$x_0<d_1<y_{n_1},$$

かつ

$$\frac{f(d_1)-f(x_{m_1})}{d_1-x_{m_1}}=\gamma$$

を満たす d_1 が存在する。$x_{m_1}=c_1$ とおけば,

$$x_0-\varepsilon<c_1<x_0<d_1<x_0+\varepsilon$$

かつ

$$\frac{f(d_1)-f(c_1)}{d_1-c_1}=\gamma$$

を満たす c_1, d_1 が存在する。$\varepsilon>0$ は任意であるから，この事は

$$c_1<c_2<\cdots<x_0<\cdots<d_2<d_1, \qquad \lim_{n\to+\infty} c_n=\lim_{n\to+\infty} d_n=x_0$$

かつ

$$\frac{f(d_n)-f(c_n)}{d_n-c_n}=\gamma$$

を満たす数列 $\{c_n\}, \{d_n\}$ の存在を示していて，$x_0\in X_\gamma$ である。γ は $a<\gamma<b$ として任意であるから $\Gamma_{x_0}\supset(a,b)$ であり Γ_{x_0} が唯一点 θ よりなることに反する。故に $a=b$。$\Gamma_{x_0}=\{\theta\}, x_0\in X_\theta$ であるから定理 1. より $f'(x_0)=\theta$。(証終)

文　献

1) Kiro Isobe: A certain consideration on derivatives and Rolle's Theorem, Mem. Kitami Inst. Tech. Vol. 7, No. 2 (1976).