

等方性正方形断面弾性波導波路の有限要素解析*

小柴正則**

鈴木道雄***

(昭和51年4月26日受理)

Finite Element Analysis of an Elastic Wave Guide with Square Cross Section

by Masanori KOSHIBA and Michio SUZUKI

Recently, electronic engineers have become interested in using a small wavelength of acoustic waves to achieve microminiatured circuits. However, boundary value problems involved in elastic waves in solids are generally very intricate and difficult to solve.

In this paper, the finite element method is applied to the problem of wave propagation in an isotropic rod of square cross section and compared with the experimental results of R. E. Booker with a satisfactory agreement. The finite element method is considered to play an important role in the analysis of boundary value problems involved in elastic waves in solids.

1. ま え が き

弾性波の境界値問題を解析することの困難さは、縦波、横波という2種類の波の混在よりなる弾性波の本質的な複雑さによるものと考えられ、単純な構成、境界条件を持つ系以外の実際的な問題では、解析学的解法に代表されるような厳密解析は、ほぼ不可能であるのが普通である。このため数値解析を行うことが重要な問題となり、計算機の発達と普及を背景にして種々の数値解析法^{1~3)}が開発されてきたが、とくに従来、土木、建築、機械工学の分野において急速な発展をとげてきた有限要素法⁴⁾に対する関心が、最近、電子通信技術者の間でも高まっている。有限要素法は適用範囲の広いことが特徴の一つになっているが、単に適用範囲の広さだけで価値を判断するのは尚早であり、常に他の競合する解析法と比較して、どれ程効率が良いかという点をあわせて考えるべきである。そこで、ここではガイドの基本形である等方性正方形断面弾性波導波路、とくに断面が正方形の場合を例にとり、その伝搬特性を明らかにするとともに有限要素法の適用性について議論する。

* 昭和50年部電気四学会連合大会で一部発表(1975年10月,東京)

** 北見工業大学電子工学科

*** 北海道大学工学部電子工学科

2. 有限要素法

有限要素法は、考えている系をいくつかの要素に分割し、その要素内の変位を要素間の接合点における変位などを未知関数とした一連の関数で表示して、系全体のエネルギーが極小となるように接合点での変位を調節しようとするものである⁴⁾。

ここでは、 z 軸を伝搬軸とする一様な断面の等方性無限長弾性波導波路を考え、時間因子を $\exp(j\omega t)$ 、 z 方向の伝搬定数を β とし、変位 $u_i (i=x, y, z)$ を次式で表す。

$$\left. \begin{aligned} u_x &= U_x(x, y) e^{j(\omega t - \beta z)} \\ u_y &= U_y(x, y) e^{j(\omega t - \beta z)} \\ u_z &= -jU_z(x, y) e^{j(\omega t - \beta z)} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

要素分割は任意の多角形で行ってよいが、断面がいかなる形状のガイドでも近似的には三角形の集合で表示することができるため、三角要素を採用する。又、 U_i などは、変位が隣接する要素の境界で連続となるべく定める必要があり、補間関数として一次形を用いる場合には各頂点に節点を有する三角要素を考えればよい^{4,5)}。

さて、計算結果の精度を上げるためには、単純に分割数をふやせばよいというわけではなく、更に高次の補間関数を用いる必要がある⁶⁾。例えば、補間関数に完全2次多項式を用いるとすると、各頂点の他に、各辺の midpoint に節点を有する三角要素を考える必要があり、このとき変位 \mathbf{u} は、これらの節点における変位 $\{\delta_k\} (k=1, 2, \dots, 6)$ によって次式のように与えられることになる。

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^6 N_k \{\delta_k\} \equiv [\mathbf{N}] \cdot \{\delta_e\} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} N_1 &= L_1(2L_1 - 1) & N_4 &= 4L_1L_2 \\ N_2 &= L_2(2L_2 - 1) & N_5 &= 4L_2L_3 \\ N_3 &= L_3(2L_3 - 1) & N_6 &= 4L_3L_1 \end{aligned}$$

ここに $\{\delta_e\}$ は $\{\delta_k\}$ をひとまとめにして表したものであり、 (L_1, L_2, L_3) は面積座標である。変位 \mathbf{u} が式 (2) で与えられることから、ひずみ \mathbf{S} も節点変位 $\{\delta_e\}$ によって表されることになる。

$$\mathbf{S} = [\mathbf{B}] \cdot \{\delta_e\} \quad (3)$$

$[\mathbf{N}]$, $[\mathbf{B}]$ については文献 (6) を参照されたい。

ここでは式 (1) の解を仮定しているので、伝搬方向には単位長を取り、応力 \mathbf{T} が

$$\mathbf{T} = [\mathbf{C}] \cdot \mathbf{S} \quad (4)$$

$[\mathbf{C}]$: 弾性定数テンソル

なる構成方程式によってひずみ \mathbf{S} と結びつけられている点に留意すると、三角要素のラグランジャンも又、節点変位 $\{\delta_e\}$ で与えられることが分かる。従って系全体のラグランジャンが全

節点における変位 $\{\delta_e\}$ によって表されることになり、更にハミルトンの原理を適用すると、一様な断面の無限長ガイドの伝搬問題は、結局、次式のような固有値問題に帰着される。

$$[K] \cdot \{\delta\} = \Omega^2 [M] \cdot \{\delta\} \tag{5}$$

$$[K] = \sum_e \int_{\Delta} dS [B]^t \cdot [C] \cdot [B] / G$$

$$[M] = \sum_e \int_{\Delta} dS [N]^t \cdot [N]$$

$$\Omega^2 = \omega^2 \rho / G$$

ここに $[K]$, $[M]$ はそれぞれ、剛性マトリクス、質量マトリクス、 ρ は媒質密度、 G は剛性率である。又、 \sum_e は各要素についての和、 $\int_{\Delta} dS$ は三角形領域での積分、 t は複素共役を取り転置することを意味する。

3. 正方形断面弾性波導波路

ここでは有限要素法の有効性を検討するため、図1に示すような正方形断面導波路を取り上げ、他の手法による結果^{1,2)}との比較の都合上、粒子変位が $x=0$ 及び $y=0$ の面に関して対称なモード、いわゆる縦モード (Longitudinal mode) の考察を行う。

さて断面の四分の一の部分について、補間関数に一次形を用いた場合には図2(a), (b)、二次形を用いた場合には(c), (d), (e)のごとく要素分割を行うことにする。前述したように二次補間関数を用い

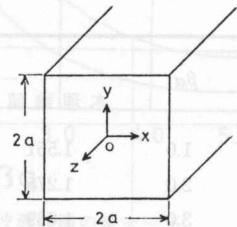
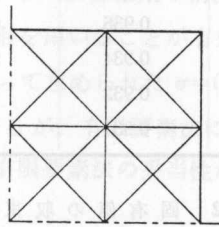
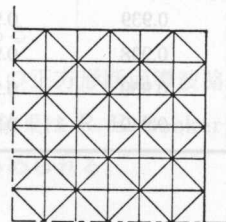


図1 正方形断面弾性波導波路

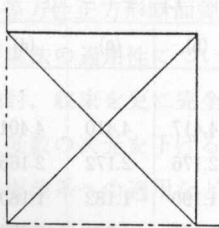
Fig. 1. An elastic wave guide with square cross section.



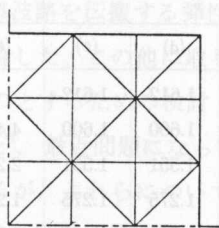
(a) 16要素13節点



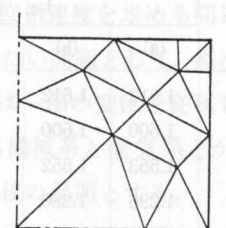
(b) 72要素49節点



(c) 4要素13節点



(d) 18要素49節点



(e) 18要素47節点

図2 正方形断面弾性波導波路の要素分割

Fig. 2. Element divisions for an elastic wave guide with square cross section.

た場合には、三角要素内に6個の節点が含まれているので全節点数は、(a)と(c)、(b)と(d)でそれぞれ同じである。

表1は、ポアソン比 $\sigma=0.3$ なる等方性正方形断面導波路の縦モードについての速度分散特性を示したものであり、位相速度は横波速度 $v_s=(G/\rho)^{1/2}$ で規格化されている。又、有限要素法による結果は図2(e)の分割を行って求められたものであり、比較のために変分法¹⁾、選点法²⁾による結果を示した。添字0, 1はモードの次数を表す。

表1から分かるように、有限要素法による結果は、 L_0 モード、 L_1 モードともに $\beta a=5.0$ 程度まで変分法及び選点法による結果と極めてよく一致している。しかしながら、 L_1 モードについては、 βa の値が大きくなるでの有限要素法による結果は変分法による結果よりも低めに

表1 正方形断面弾性波導波路の縦モード分散特性

Table 1. Dispersion characteristics of longitudinal modes for an elastic wave guide with square cross section

βa	L_0			L_1		
	本理論値	文献(1)	文献(2)	本理論値	文献(1)	文献(2)
1.0	1.551	1.551	1.551	2.165	2.165	2.165
2.0	1.275	1.274	1.274	1.180	1.179	1.179
3.0	1.069	1.069	1.069	0.976	0.976	0.976
4.0	0.993	0.992	0.992	0.924	0.924	0.923
5.0	0.962	0.962	0.962	0.909	0.909	0.908
6.0	0.949	0.949	0.948	0.905	0.906	0.904
7.0	0.943	0.942	0.942	0.905	0.906	0.903
8.0	0.940	0.939	0.938	0.905	0.907	0.903
9.0	0.939	0.937	0.936	0.906	0.910	0.903
10.0	0.938	0.936	0.934	0.908	0.912	0.903
12.0	0.939	0.937	0.932	0.910	0.918	
14.0	0.940	0.939	0.931	0.913	0.923	

表2 固有値の収束性

Table 2. Convergence of eigen values

βa	L_0 モード					L_1 モード				
	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
0.1	1.612	1.612	1.612	1.612	1.612					
0.5	1.600	1.600	1.600	1.600	1.600	4.471	4.417	4.410	4.401	4.401
1.0	1.553	1.552	1.551	1.551	1.551	2.208	2.176	2.172	2.165	2.166
2.0	1.296	1.280	1.276	1.275	1.275	1.219	1.190	1.182	1.180	1.180
3.0	1.079	1.076	1.072	1.069	1.069	1.020	0.990	0.984	0.977	0.976
4.0	1.022	1.002	0.999	0.993	0.993	0.973	0.940	0.939	0.925	0.924
5.0	0.995	0.974	0.973	0.963	0.962	0.964	0.930	0.932	0.912	0.909

出ており、これらの手法がいずれもエネルギー極小の理に基づいていることを考えあわせると、この場合には図2(e)程度の分割で有限要素法による解の収束が変分法によるそれに比べてよくなっているものと考えられる。

表2は、図2(a)~(e)の要素分割を行って求められた $\sigma=0.3$ の正方形断面導波路の L_0 モード、 L_1 モードについての分散特性を示したものである。

補間関数に一次形を用いた図2(a)の分割によって得られる結果と(e)の分割によって得られる結果との差異は、 $\beta a=5.0$ で L_0 モード、 L_1 モードそれぞれ、3%、6%程度であるのに対して同じ節点数でも二次形を用いた(c)の分割ではそれぞれ、1%、3%になっている。又、一次形を用いた場合には更に節点数をふやして(b)のごとく分割しても、解の収束は(c)の分割を行った場合と同程度でしかない。このように計算結果の精度を上げるためには、単純に分割数をふやすことよりも、補間関数に高次形を用いることが有効である。

図3は、図2(c)の要素分割を行って求められた $\sigma=0.3424$ の正方形断面導波路の L_0 、 L_1 モードの分散特性を示したものであるが、有限要素法による結果はR. E. Bookerの実験値⁷⁾(○印)と極めてよく一致しており、有限要素法の妥当性が確かめられる。

4. あとがき

以上、等方性正方形断面弾性波導波路を伝搬する弾性波の位相速度を求める問題を取り、有限要素法の適用性について議論した。この他に取り上げたい問題として、高次モードについての検討、収束を更に完全なものとするための検討(例えば一部の変位を従属していると考えて独立変数の次元を下げる⁴⁾など)、最近問題になっている機械系と電気系とが結合した圧電弾性波導波系への適用などがあるが、これらについては今後の課題とする。

他の数値解析法では、単純な構成、境界条件を持つ系以外の実際的な問題への適用が比較的困難であるのに対して、有限要素法では適用範囲が極めて広く、又、補間関数に高次形を用いて要素数を適宜ふやすことにより、原則的にはいくらかでも厳密解に近い結果を得ることが可

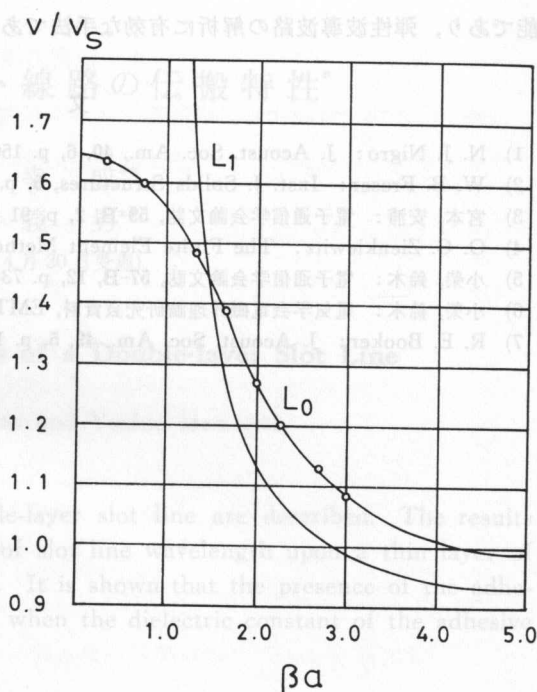


図3 正方形断面弾性波導波路の縦モード分散特性

Fig. 3. Dispersion curves of longitudinal modes for an elastic wave guide with square cross section.

能であり、弾性波導路の解析に有効な手法であると考えられる。

文 献

- 1) N. J. Nigro: J. Acoust. Soc. Am., **40**, 6, p. 1501 (1966).
- 2) W. B. Fraser: Inst. J. Solids Structures, **5**, p. 379 (1969).
- 3) 宮本, 安浦: 電子通信学会論文誌, **59-B**, 2, p. 91 (1976).
- 4) O. C. Zienkiewicz: The Finite Element Method in Engineering Science (1971), McGraw-Hil.
- 5) 小柴, 鈴木: 電子通信学会論文誌, **57-B**, 12, p. 734 (1974).
- 6) 小柴, 鈴木: 電気学会電磁界理論研究会資料, EMT 75-10 (1975).
- 7) R. E. Booker: J. Acoust. Soc. Am., **49**, 5, p. 1671 (1971).

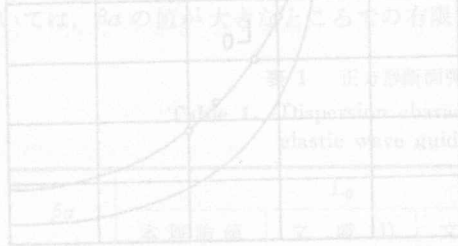


Table 2. Some numerical values

Mode	Frequency	Amplitude	Phase
Fundamental mode	0.0	0.000	0.000
	0.1	0.100	0.000
	0.2	0.200	0.000
	0.3	0.300	0.000
Higher order mode	0.0	0.000	0.000
	0.1	0.100	0.000
	0.2	0.200	0.000
	0.3	0.300	0.000