

アームフライホイールにおける応力の計算*

追分重義**
道端久紀**
宇野和雄**

(昭和49年3月30日受理)

Calculation of Stresses in a Rotating Armed Flywheel

by Shigeyoshi OIWAKE, Hisanori DOBA
and Kazuo UNO

By comparing the values of stresses in the rim and the arm of a rotating armed flywheel obtained by several kinds of strength calculation procedures with those values measured by a telemeter, the following conclusion has been reached.

1. Either the principles of the least work or the displacement method about the points where statically indeterminate forces act, can be adopted to determine the statically indeterminate forces and thereafter to find the stress distribution in both the rim and the arm.

— 2. Because calculations will be more accurate with the least difference between the calculated value and the corresponding measured value, the calculation procedure must be as follows.

a) In the calculation, the rim must be dealt as a thick rotating ring and its bending stresses must be calculated from the bending moment as in the case of a curved beam.

b) To adopt the real length of the arm as its length in the calculation is recommended. The radial displacement of the circumference of the hub does not influence the stress distribution appreciably.

c) The measured position in the rim where the direction of bending is changed, is different from that based on the calculation.

1. 緒 言

回転する腕付き円環は不静定次数が高いために応力解析が難しいが、フライホイール、ベルトプーリなどの回転輪は重要な機械要素であり、その機能を達することができるように、かつその強さや変形が適切であるように設計されなければならない。

Tolle¹⁾, Timoshenko²⁾, Heusinger³⁾らは最小仕事の原理を用いて不静定力を求めたり、

* 日本機械学会北海道学生会第3回卒業研究発表会にて講演(昭49-3)

** 北見工業大学機械工学科

リムとアームとがその接点において分離していると仮定し、その接点における両者の変位が等しいとして不静定力を求めたりしている。彼らはこの問題を1次元的に取扱っているのに対し、永島⁴⁾は2次元問題として扱い、リムとアームの接点の応力分布を境界条件として解いている。Bizeno & Grammel⁵⁾は、高不静定次数の構造において、内力の変化がどうなるかを調べているが、応力までは求めていない。

これらの報告では実験と計算とを対照していない。回転体のひずみ測定には電気刷子、電磁誘導、無線通信などの手段で微弱なひずみ出力を忠実効果的に検出するための困難を併い、一応の検出精度を得るに至ったのは近時に属する。本研究では電磁誘導型検出装置による測定値に数種の計算法による算定値を対照し、フライホイールやその他の腕付き回転輪の強度設計に対する一資料としたい。

2. 計 算 式

本稿では1次元的解法でその間に若干の差異がある計算過程数種の骨子を統一的に示し、後章において測定結果と比較してこれらを評価することに備える。諸元の符号のおもなるものは表1に示す。なお算I, 算II, …で計算過程の番号を示した。図1はフライホイールの内力を解析するための図である。

表1 符号の説明

Table 1. Nomenclature

記号	単位	数値	内 容
A_r	cm ²	30	リムの断面積 (=5×6)
A_a	cm ²	4.95	アームの断面積 (=3.3×1.5)
b_r	cm	6	リムの幅
b_h	cm	6	ハブの幅
E	kg/cm ²	1.76×10 ⁶	フライホイールの材料のヤング係数
e	cm	0.137	リムの断面の中立面と図心面との距離
F	kg		遠心力
f	1		係数
G	kg/cm ²	0.688×10 ⁶	フライホイールの材料のせん断弾性係数
g	cm/sec ²	980	重力の加速度
h_1	cm	2.64	リムの断面における中立面と外径面との距離
h_2	cm	2.36	リムの断面における中立面と外径面との距離
I_r	cm ⁴	62.5	リムの断面の慣性モーメント (=6×5 ³ /12)
J_0			リムのアーム中間位置
J_1			アーム位置におけるリムの外側点
J_2			アーム位置におけるリムの内側点
J_3			アームとハブの外径面との接点
l	cm	10	アームの長さ

記号	単位	数値	内容
M	cmkg		リムの断面における曲げモーメント
M_0	cmkg		リムのアーム中間断面における曲げモーメント
N	kg		リムの円周方向内力
n	r.p.m.	1480	フライホイールの定常回転数
P	kg		アームの任意断面の法線力
P_2	kg		リムとアームとの接点 J_2 における引張内力
P_3	kg		アームとハブとの接点 J_3 における引張内力
r	cm		任意の半径
r_m	cm	17.5	リムの平均半径
r_1	cm	20	リムの外半径
r_2	cm	15	リムの内半径
r_3	cm	5	ハブの外半径
r_4	cm	25	ハブの口径の 1/2
S	kg		リムの断面におけるせん断力
U	cmkg		弾性ひずみエネルギー
U_r	cmkg		リムに蓄えられる弾性ひずみエネルギー
U_a	cmkg		アームに蓄えられる弾性ひずみエネルギー
u_{rc}	cm		リムの質量による遠心力のみにもとづくリム上の接点 J_2 の遠心変位
u_{ac}	cm		アームの質量による遠心力のみにもとづくアーム上の接点 J_2 の遠心変位
u_{rP}	cm		内力 P_2 にもとづくリム上の接点 J_2 の求心変位
u_{aP}	cm		内力 P_2 にもとづくアーム上の接点 J_2 の遠心変位
v	cm/sec	2710	リムの平均半径における円周速度
x	cm		接点 J_2 とアーム上の点との距離
Z_r	cm ³	25	真直がりとしてのリムの断面係数 (= $6 \times 5^2 / 6$)
α	rad	$\pi/4$	となり合うアーム間の中心角の 1/2
γ	kg/cm ³	7.08×10^{-3}	フライホイールの材料の比重量
ϕ	rad		となり合うアーム間の中間の半径線と任意の半径線との間の角度
ϕ	rad		$0 \leq \phi \leq \phi$
σ_c	kg/cm ²		リムを自由円輪と仮定したときのその遠心力のみにもとづくリムの円周方向応力
σ_N	kg/cm ²		リムの法線内力 N のみにもとづくリムの円周方向応力
σ_{M_1}	kg/cm ²		曲げモーメント M のみにもとづくリムの外径面の円周方向応力
σ_{M_2}	kg/cm ²		曲げモーメント M のみにもとづくリムの内径面の円周方向応力
σ_{P_2}	kg/cm ²		内力 P_2 のみにもとづくリムの円周方向応力
σ_{tro}	kg/cm ²		リムの外径面における円周方向応力
σ_{tri}	kg/cm ²		リムの内径面における円周方向応力
σ_a	kg/cm ²		アームの任意の断面に生じる軸方向応力
ω	rad/sec	155	フライホイールの角速度 = $2\pi n/60$

2.1 算式 I

$r_1 - r_2 \ll r_m$ として取扱い,

$$dF = \left(\frac{\gamma}{g} A_r r_m d\phi \right) (\omega^2 r_m) \quad (1)$$

力のつり合いより,

$$N = \frac{\gamma A_r r_m^2 \omega^2}{g} - \frac{P_2}{2 \sin \alpha} \cos \phi \quad (2)$$

$$M = M_0 - \frac{P_2 r_m}{\sin \alpha} \sin^2 \frac{\phi}{2} \quad (3)$$

$$U_r = 2 \int_0^\alpha \frac{M^2 r_m d\phi}{2EI_r} + 2 \int_0^\alpha \frac{N^2 r_m d\phi}{2EA_r} \quad (4)$$

$$U_a = \int_0^l \frac{P^2 dx}{2A_a E} \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial P_2} (U_r + U_a) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial M_0} (U_r + U_a) = 0 \quad (6)$$

式(1), (2), ..., (6)より,

$$\left. \begin{aligned} P_2 &= \frac{2}{3} \frac{\gamma A_r \omega^2 r_m^2}{g} \cdot \frac{1}{\frac{A_r r_m^2}{I} f_1 + f_2 + \frac{A_r}{A_a}} \\ f_1(\alpha) &= \frac{1}{2 \sin^2 \alpha} \left(\frac{\sin 2\alpha}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) - \frac{1}{2\alpha} \\ f_2(\alpha) &= \frac{1}{2 \sin^2 \alpha} \left(\frac{\sin 2\alpha}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) \\ M_0 &= \frac{P_2 r_m}{2} \left(\frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_N &= N/A_r, \quad \sigma_M = \pm M/Z \\ \therefore \sigma_{\text{tro}} &= \sigma_N \pm \sigma_M \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

2.2 算式 II

リムをアームで拘束しない自由円輪と仮定したときの遠心力によるたがはり応力 σ_c は,

$$\sigma_c = \frac{\gamma (\omega r_m)^2}{g} \quad (9)$$

σ_c のみによるリムとアームの接点の遠心方向変位を u_{rc} とする。

$$u_{rc} = \frac{\sigma_c}{E} r_m \quad (10)$$

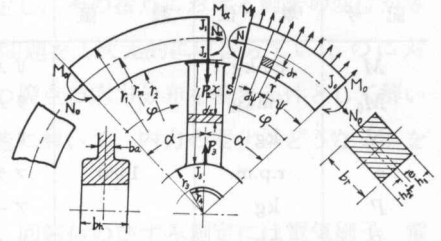


図1 フライホイールに生じる内力
Fig. 1. Internal forces produced in the flywheel.

アームがリムと無関係として, アームの質量の遠心力のみによるアーム上の接点 J_2 の変位 u_{ac} は,

$$u_{ac} = \frac{\gamma \omega^2 l^2}{gE} \left(\frac{r_3}{2} + \frac{l}{3} \right) \quad (11)$$

接点 J_2 でリムとアームがたがいに作用しあう力 P_2 によるそれぞれの求心変位および遠心変位を u_{rp} , u_{ap} とすると,

$$u_{rc} - u_{ac} = u_{rp} + u_{ap} \quad (12)$$

とおける。

リムを真直ばりとみなし中心角 α に対する実長さ区間の弾性曲線の角変化はないとみなせるから、面積モーメント法によって、

$$\int_0^\alpha \frac{M}{EI_r} r_m d\phi = 0 \quad (13)$$

つり合いの条件から P_2 , M_0 , M , N 間の関係を求めると、

$$M = \frac{P_2 r_m}{2} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\cos \phi}{\sin \alpha} \right), \quad N = \frac{P_2}{2 \sin \alpha} \cos \phi \quad (14)$$

径間 $\frac{\pi}{4} r_m$ の両端固定ばりが中央に集中荷重 P_2 を受けるときに P_2 のなす仕事と、はりの内力による弾性ひずみエネルギーとを等置すると、

$$2 \int_0^\alpha \frac{M^2}{2EI_r} r_m d\phi + 2 \int_0^\alpha \frac{N^2}{2EA_r} r_m d\phi = \frac{1}{2} P_2 u_p \quad (15)$$

式(14)を式(15)に代入すると、

$$u_{rp} = P_2 \left(\frac{r_m^3}{EI_r} f_1 + \frac{r_m}{EA_r} \right) \quad (16)$$

さらに、

$$u_{ap} = (P_2 l) / (EA_a) \quad (17)$$

式(16), (17)を式(12)に代入すると、

$$\left. \begin{aligned} P_2 &= \frac{\gamma (\omega r_m)^2 A_r}{g} \cdot \frac{1 - \frac{l}{r_m^3} \left(\frac{r_3}{2} + \frac{l}{3} \right)}{\frac{r_m^2 A_r}{I_r} f_1 + f_2 = \frac{A_r}{A_a} \frac{l}{r_m}} \\ f_1 &= \frac{1}{4 \sin \alpha} \left(\cos \alpha + \frac{\alpha}{\sin \alpha} \right) - \frac{1}{2\alpha} \\ f_2 &= \frac{1}{4 \sin \alpha} \left(\cos \alpha + \frac{\alpha}{\sin \alpha} \right) \\ M &= \frac{P_2 r_m}{2} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\cos \phi}{\sin \alpha} \right) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

遠心力に関係なく、リムのアームによる求心方向力 P_2 にもとづいてリムに生じる円周方向応力を σ_{P_2} とすると、

$$\sigma_{P_2} = - \frac{P_2}{2A_r \sin \alpha} \cos \phi \quad (20)$$

式(19)の M にもとづく曲げ応力 σ_M は,

$$\sigma_M = \pm \frac{P_2 r_m}{2Z_r} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\cos \phi}{\sin \alpha} \right) \quad (21)$$

2.3 算式 III

リムの微小要素に働く遠心力は,

$$dF = \int_{r=r_2}^{r=r_1} \frac{\gamma b r d\phi dr}{g} \omega^2 r \quad (22)$$

力のつり合いから,

$$\left. \begin{aligned} N &= \frac{\gamma b \omega^2}{3g} (r_1^3 - r_2^3) - \frac{P_2 \cos \phi}{2 \sin \phi} \\ S &= \frac{P_2 \sin \phi}{2 \sin \alpha} \\ M &= M_0 - \frac{P_2 r_m}{\sin \alpha} \sin^2 \frac{\phi}{2} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

アームに作用する荷重については平均荷重 P_2 のほかに中心に近づくほど増す質量の遠心力による荷重がある。

$$dP = \frac{\gamma A_a \omega^2}{g} (r_2 - x) dx \quad (24)$$

$$P = P_2 + \frac{\gamma A_a \omega^2}{2g} x (2r_2 - x) \quad (25)$$

$$\left. \begin{aligned} P_3 &= P_2 + \frac{\gamma A_a \omega^2}{2g} l (2r_2 - l) \\ &= P_2 + \frac{\gamma A_a \omega^2}{2g} l (r_2 + r_3) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$$U_r = 2 \int_0^a \frac{M_{r_m}^2}{2EI_r} d\phi + 2 \int_0^a \frac{N^2 r_m}{2EA_r} d\phi + 2 \int_0^a \frac{\chi S^2 r_m}{2GA_r} d\phi \quad (27)$$

(長方形の断面に対して, $\chi = 3/2$)

$$U_a = \int_0^l \frac{P^2 dx}{2EA_a} \quad (28)$$

$$\partial(U_r + U_a)/\partial P_2 = 0, \quad \partial(U_r + U_a)/\partial M_0 = 0 \quad (29)$$

$$\left. \begin{aligned} P_2 &= \frac{\gamma \omega^2}{6gr_m} \left\{ \frac{2br_m(r_1^3 - r_2^3) - l^2(2r_2 + r_3)A_r}{f_1 \frac{r_m^2}{I} A_r + f_2 + 3.9f_3} + \frac{l}{r_m} \frac{A_r}{A_a} \right\} \\ f_1 &= f_2 - \frac{1}{2\alpha}, \quad f_2 = \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4} \right) / (2 \sin^2 \alpha) \\ f_3 &= \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right) / (2 \sin^2 \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

$$M_0 = \frac{P_2 r_m}{2} \left(\frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) \quad (31)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_N &= \frac{N}{A_r} \\ \sigma_{M_1} &= M \frac{h_1}{A_r e r_1} \quad (\text{外側}) \\ \sigma_{M_2} &= -M \frac{h_2}{A_r e r_2} \quad (\text{内側}) \\ \sigma_{\text{tro}} &= \sigma_N + \sigma_{M_1} \\ \sigma_{\text{tri}} &= \sigma_N + \sigma_{M_2} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

2.4 算式 IV

リムの微小要素に働く遠心力は、

$$dF = \int_{r=r_2}^{r=r_1} \frac{\gamma b_r r d\phi dr}{g} \omega^2 r \quad (22)$$

力のつり合いから、

$$N = \frac{\gamma \omega^2}{3g} b_r (r_1^3 - r_2^3) - \frac{P_2}{2 \sin \alpha} \cos \alpha, \quad (33)$$

N によって生じる直径ひずみは、

$$\frac{4}{\pi E A_r} \int_0^\alpha N d\phi \quad (34)$$

で、これによる接点の変位は、

$$u_{rN} = \frac{4r_m}{\pi E A_r} \int_0^\alpha N d\phi. \quad (35)$$

アーム中央 1/4 輪のリムの中央に集中荷重を受ける、径間 $2r_m\alpha$ の断面一様両端固定ばりのたわみだけ求心方向に接点の変位するから、

$$u_{rp} = \frac{P_2 (2r_m\alpha)^3}{192 E I_r}. \quad (36)$$

接点でリムとアームが切れているとしたときの遠心力によるアームの伸びは、

$$u_{ac} = \frac{\gamma \omega^2}{2gE} (r_2 l^2 - l^3/3). \quad (37)$$

また P_2 によるアームの伸びは、

$$u_{ap} = \frac{P_2 l}{E A_a} \quad (17)$$

$$u_{rN} - u_{rp} = u_{ac} + u_{ap} \quad (38)$$

式 (35), (36), (37), (17) を式 (18) に代入すると、

$$P_2 = \frac{4}{3\pi} \frac{\gamma \omega^2}{g} \frac{b_r r_m (r_1^3 - r_2^3) \alpha}{A_r} - \frac{1}{6} \frac{\gamma \omega^2}{g} l^2 (3r_2 - l) \quad (39)$$

$$\frac{2}{\pi} \frac{r_m}{A_r} + \frac{(r_m\alpha)^3}{24I_r} + \frac{l}{A_a}$$

以下式(23), (31), (32)により σ_{tro} , σ_{tri} が求まる。

2.5 算式 V

算式 IV に遠心力によるアームとハブの付け根の遠心方向変位を考慮した。

$$P_3 = P_2 + \frac{\gamma A_a \omega^2}{2g} l (r_2 + r_3) \quad (40)$$

ハブの外周の単位面積当たりの遠心力はほぼ,

$$q_0 = P_3 \left/ \left(\frac{\pi r_3}{2} b_h \right) \right. = \frac{2P_3}{\pi r_3 b_h} \quad (41)$$

ハブに生じる応力は,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= - \frac{(r_4 r_3)^2 q_0}{(r_3^2 - r_4^2) r^2} + \frac{q_0 r^2}{r_3^2 - r_4^2} \\ \sigma_\theta &= \frac{(r_4 r_3)^2 q_0}{(r_3^2 - r_4^2) r^2} + \frac{q_0 r^2}{r_3^2 - r_4^2} \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

半径方向変位 u は,

$$u = \varepsilon_\theta r = \frac{\sigma_\theta - \nu \sigma_r}{E} r = \frac{q_0 r \{ (r_4/r)^2 (1+\nu) + (1-\nu) \}}{E \{ 1 - (r_4/r_3)^2 \}} \quad (43)$$

外周では,

$$u_h = \frac{\frac{2}{\pi} P_3 \{ (r_4/r_3)^2 (1+\nu) + (1-\nu) \}}{E b_h \{ 1 - (r_4/r_3)^2 \}} \quad (44)$$

算式 IV における式(38)の右辺に u_h を加えて,

$$u_{rN} - u_{rD} = u_{ac} + u_{ap} + u_h \quad (45)$$

式(35), (36), (37), (11), (44), (45)より P_2 が求まり,

$$\left. \begin{aligned} P_2 &= \left[\frac{4}{3\pi} \cdot \frac{\gamma \omega^2 b_r r_m (r_1^3 - r_2^3) \alpha}{g E A_r} - \frac{\gamma \omega^2 l^2 (3r_2 - l)}{6gE} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\gamma \omega^2 A_a l (r_2 + r_3) \{ (r_4/r_3)^2 (1+\nu) + (1-\nu) \}}{\pi g E b_h \{ 1 - (r_4/r_3)^2 \}} \right] \\ &\quad \left/ \left[\frac{2}{\pi} \frac{r_m}{E A_r} + \frac{(r_m \alpha)^3}{24EI} + \frac{l}{E A_a} + \frac{2}{\pi} \frac{\{ (r_4/r_3)^2 (1+\nu) + (1-\nu) \}}{E b_h \{ 1 - (r_4/r_3)^2 \}} \right] \right\} \quad (46) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} N &= \frac{\gamma b \omega^2}{3g} (r_1^3 - r_2^3) - \frac{P_2}{\sin \alpha} \cos \phi \\ M_0 &= \frac{P_2 r_m}{2} \left(\frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) \\ M &= M_0 - \frac{P_2 r_m}{\sin \alpha} \sin^2 \phi / 2 \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

算式 III, 算式 IV と同じように σ_N , σ_M , σ_{tro} , σ_{tri} が順次に求まる。

表2は各計算過程の内容を簡略に対照したものである。

表 2 各計算過程の対照表

Table 2. Comparison among the calculation procedures

比較項目 \ 計算過程	I	II	III	IV	V
解法の原理	最小仕事の原理	接点の変位の等置	最小仕事の原理	接点の変位の等置	接点の変位の等置
円環の取扱いとしての薄肉, 厚肉の別	薄肉円環	薄肉円環	厚肉円環	厚肉円環	厚肉円環
真直ばり, 曲りばりの別	真直ばり	真直ばり	曲りばり	曲りばり	曲りばり
アームの応力を算出するときのアームの長さの取扱い	$l=r_2$	$l=r_2-r_3$	$l=r_2-r_3$	$l=r_2-r_3$	$l=r_2-r_3$
境界点		J_0, J_2		J_0, J_2	J_0, J_2, J_3

3. 実験

実験に用いたフライホイールの形状, 寸法を図2に示す。すなわちアームは4本で, 断面は全長にわたって一様な長方形 60 mm × 50 mm である。材質はダクタイル鋳鉄で表3はその機械的性質を示す。

フライホイールを 5.5 kW, 4P, 全閉外扇形三相誘導電動機に直結した。実験中

表 3 フライホイールの材料の性質

Table 3. Properties of the material of the flywheel

球状黒鉛鋳鉄 FCD 45 相等			
比重 kg/cm ³	最大引張強さ kg/cm ²	引張破断強さ kg/cm ²	ヤング係数 kg/cm ²
0.00708	50.31	47.91	1.76×10^6

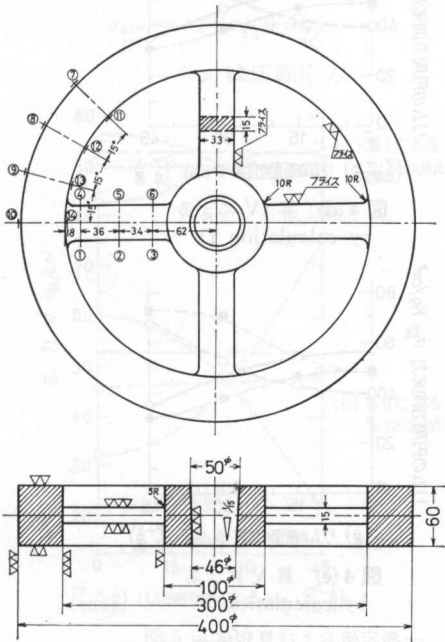


図 2 試験したフライホイール
Fig. 2. Flywheel tested.

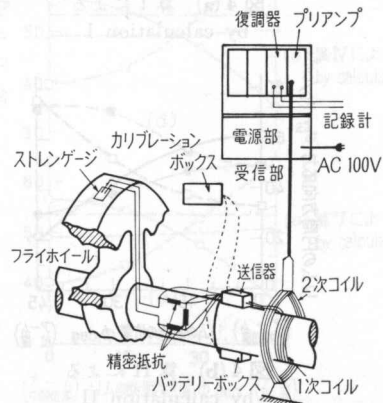


図 3 応力測定系
Fig. 3. Outline of stress measuring system.

表 4 応力分布の測定値

Table 4. Stress distribution measured

アーム	位置	①—④	②—⑤	③—⑥					
	応力 kg/cm ²	50.48	64.84	68.32					
リム	位置	⑦	⑧	⑨	⑩	⑪	⑫	⑬	⑭
	応力 kg/cm ²	48.40	46.94	38.14	30.80	48.40	54.82	70.40	72.81

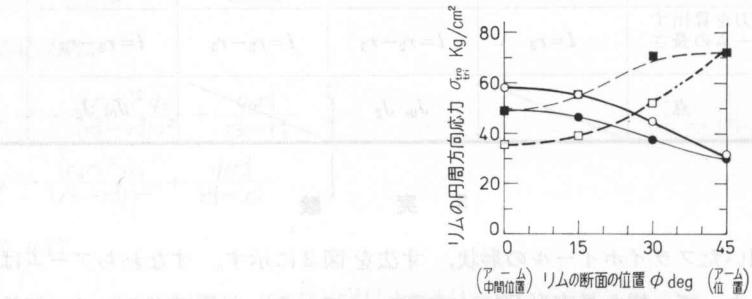


図 4(c) 算 III による
by calculation III

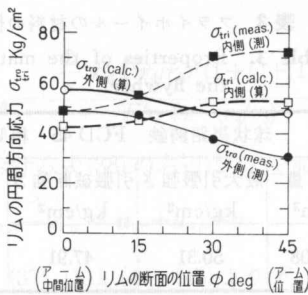


図 4(a) 算 I による
by calculation I

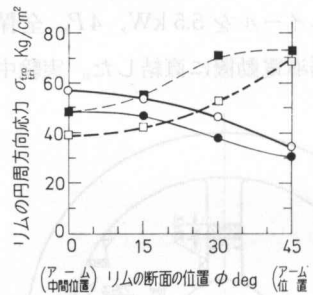


図 4(d) 算 IV による
by calculation IV

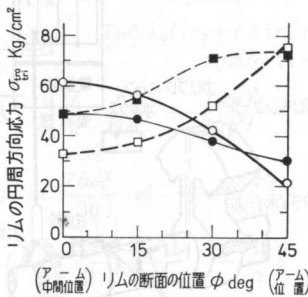


図 4(b) 算 II による
by calculation II

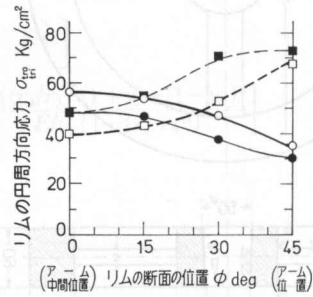


図 4(e) 算 V による
by calculation V

図 4 リムにおける円周方向応力分布力 —測定値および算定値—
Fig. 4. Distribution of circumferential stress in the rim.
—measured and calculated—

を計算過程別に示したものであるが、上記の3つの応力の一致が現われている。図6は $\phi=45^\circ$ すなわちアーム位置におけるリムの断面に対する式(49)の応力構成を σ_c を100%とする構成割合で示したものである。算I, II, III, IV, Vに対して $(\sigma_{P_2}/\sigma_c) \times 100\%$ はそれぞれ-4, -9, -8, -7, -6%; $(\sigma_{M_1}/\sigma_c) \times 100\%$ および $(\sigma_{M_2}/\sigma_c) \times 100\%$ はそれぞれ(-4, +4), (-51, +51), (-37, +43), (-30, +35), (-27, +33)%である。

なお $\phi=0^\circ$ および 45° では、対称の理由によって図5、図6の σ_N , σ_{tro} , $\sigma_{tri}-\phi$ 曲線はすべて最大または最小値を示すべきであるが、本式の上では極値をとらないので図もそうになっている。

$\phi=0$ すなわちリムのアーム中間点是对称の理由から変曲点ではあり得ず、かつ図4の測定による曲線 $\sigma_{tro}-\phi$ と $\sigma_{tri}-\phi$ とが $\phi=0$ を共有点としていることから推定すると、両曲線は $\phi=0$ で接している。

変曲点の位置については前述の理由によって、計算上から推定される回転中のリムの変形は図7(a)であり、測定値からのそれは図7(b)である。

図8はアームに生じる軸方向応力 σ_a の断面の位置 x に関する分布で、各計算過程の場合と測定値とを示している。算定値と測定値との近似がリブ側でみられるものとハブ側でみられるものとある。ハブ側で近似を示すものはアーム長さの中央あたりからハブにかけて近似して

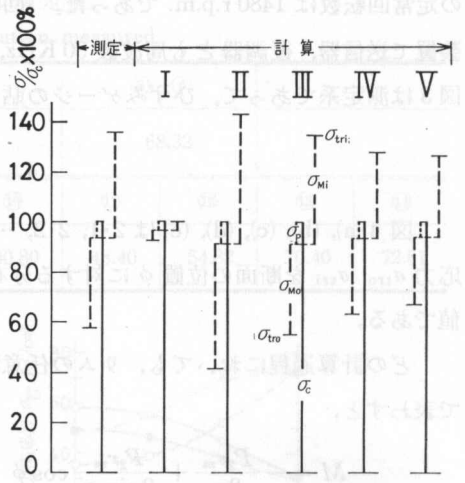


図6 リムの応力の構成割合 (アーム支持点)

Fig. 6. Constitution % of the circumferential stress in the rim. (where an arm supports)

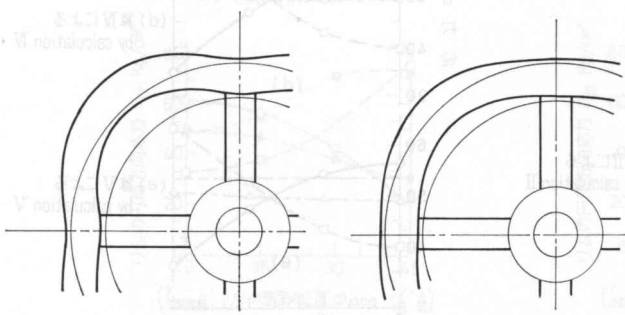


図7(a) 算定値にもとづく (a) based on the calculation. 図7(b) 測定値にもとづく (b) based on the measurement.

図7 リムの変形

Fig. 7. Deformation of the rim.

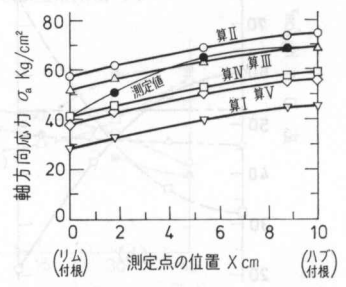


図8 アームにおける長手方向応力分布

Fig. 8. Longitudinal stress distribution in the arm.

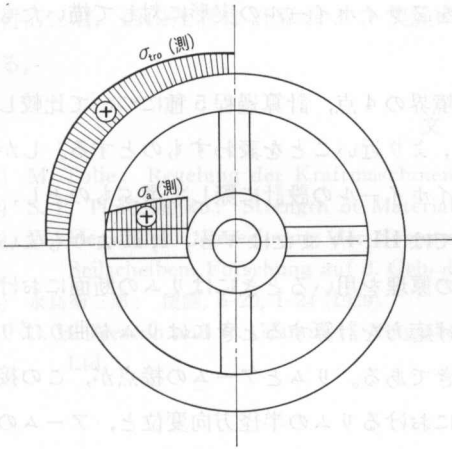


図 9 (a) リム外側およびアーム (測)
(a) Rim outside & arm (measured).

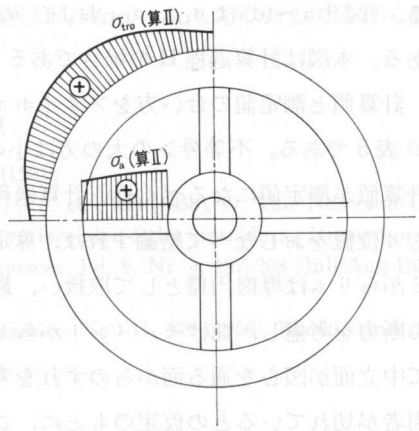


図 9 (c) リム外側およびアーム (算)
(c) Rim outside & arm (calculated).

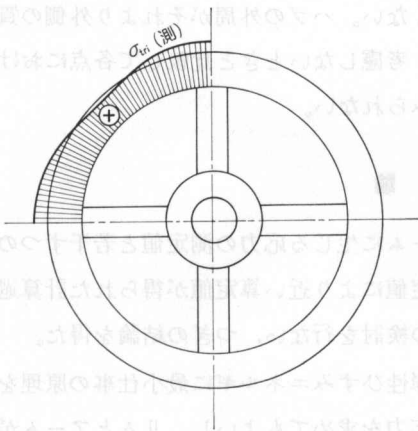


図 9 (b) リム内側 (測)
(b) Rim inside (measured).

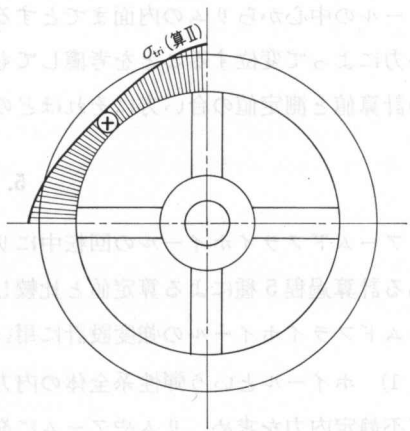


図 9 (d) リム内側 (算)
(d) Rim inside (calculated).

図 9 実形に対して示した応力分布
—測定値 (測) および算定値 (算)—

Fig. 9. Stress distributions shown for the actual shape.
—measured & calculated—

表 5 各境界点における算定値と測定値の合い方
Table 5. Accordance with the calculated and the measured values

部 分	境 界 点	J_0 アーム支持の中間位置	J_1, J_2 アーム支持位置	J_3 アームとハブの接点
リ ム		$I > IV > III > II$	$III > IV > II > I$	
ア ム			$IV > V > III > I > II$	$III > II > IV > V > I$

いる。図9(a)~(d)は σ_{tro} 、 σ_{tri} および σ_a の分布をフライホイールの実形に対して描いたものである。本図は計算過程IIの場合である。

計算値と測定値の合い方をフライホイールの境界の4点、計算過程5種について比較したのが表5である。不等号>の大的方は小の方より、より近いことを表わすものとする。しかし計算値が測定値になるべく近い計算過程をフライホイールの設計に際して選ぶものとし、しかも4位置をおしなべて結論すれば、算定法としてはIII、IVまたはVが、I、IIよりもよい。表2からリムは厚肉円環として取扱い、最小仕事の原理を用いるときにはリムの断面におけるせん断力を考慮し、曲げモーメントからリムの曲げ応力を計算するときにはリムを曲りばりとして中立面が図心を通る面からのずれを考慮すべきである。リムとアームの接点が、この接点で両者が切れているとの仮定のもとに、この接点におけるリムの半径方向変位と、アームの半径方向変位とが等しいとして問題を解いてもよいが、この場合もリムは厚肉円環、曲りばりとして取扱う方がよい。アームの長さについては、ハブの外周からリムの内面までの長さを当て、ホイールの中心からリムの内面までとするのはよくない。ハブの外周がそれより外側の質量の遠心力によって変位することを考慮してもよいが、考慮しないときと比較して各点における応力の計算値と測定値の合い方にそれほどの影響はみられない。

5. 結 論

アームフライホイールの回転中にリムやアームに生じる応力の測定値と若干ずつの差異のある計算過程5種による算定値と比較して、測定値により近い算定値が得られた計算過程をアームフライホイールの強度設計に用いるための検討を行ない、つぎの結論を得た。

1) ホイールという弾性系全体の内力による弾性ひずみエネルギーに最小仕事の原理を適用して不静定内力を求め、リムやアームに発生する応力を求めてもよいし、リムとアームがその接点で切れていると仮定し、その接点のリム上の点としての変位と、アーム上の点としての変位とが等しいという条件から同様不静定内力を求め、応力を求めてもよい。

2) リムは厚肉円環として取扱い、曲げモーメントから曲げ応力を計算するときには曲りばりとして中立面と図心を通るこれに平行な面とのずれを計算に入れるのがよい。

3) アームの長さについてはその実長を採る。遠心力によるハブの外周上の点の半径方向変位はアームとリムの応力分布にはあまり影響を与えない。

4) 各計算過程の結果によるとリムの変曲点の位置はリムのアーム支持間中央より中心角で $\phi \doteq 25^\circ 48'$ の点である。一方測定によると変曲点は存在しない。このような変曲点の不一致の原因は今後の課題と思われる。

報告を終えるにあたり、本学機械工学科科技官阿部清氏のフライホイールの製作、鳴沢勇吉氏の実験の遂行に対するご協力に対し厚くお礼申しあげる。また、当時機械工学科4年目学生

中村浩三君、西山茂君は計算および実験に助力を惜しまれなかったことに対しても深く感謝する。

文 献

- 1) M. Tolle: Regelung der Kraftmaschinen, Berlin (1921).
- 2) S. P. Timoshenko: Strength of Materials, Part I, 3rd. ed., 398 (1958), D. Van Nostrand Co.
- 3) W. Heusinger: Berechnung der Spannungen in rotierender Schwungrädern, Riemen-order Seilscheiben, Forschung auf d. Geb. d. Ingenieurwes. Bd. 9, Nr. 4, 197-208 (Juli/Aug-1938).
- 4) 永島菊三郎: 機論, 5-20, I-24 (1939).
- 5) C. B. Biezeno and R. Grammel: Engineering Dynamics, Vol. II, 170 (1956), Blackie and Son Ltd.

papers have appeared, mainly from the economic side, about startup and shutdown for thermal generating units.

On the other hand, researches generally concern for power systems to bring warranted reliability. When we study this problem from the stand point of a reliable operation, we must consider not only economy but also load forecasting error and its impact.

The problem of considering reliability, spinning reserve does the important role. It does properly evaluate the operation of a spinning reserve such as a Gas

at this point of view, this paper intends to develop a new optimum scheduling of startup and shutdown for the thermal power system with a Gas Turbine. A stochastic scheduling problem considering random unit outages is modeled after a deterministic process and is formulated by using the principle of optimum Programming; then, this method is applied to a simple model power system. A discussion is done about the numerical results.

1. ま え が き

電力需要の増大と共に、電力系統のローカル負荷対策が重要な問題となってきて、これに対する対応策として、揚水式水力の調整、交城電系による電力融通(フロー)と揚水式発電は中継負荷(電力調整)の担当事業、更にはガスターボ(GT)の輸送電が考えられ、これらは、高度信頼性としての組合せで実施されている。

これらの中で、石打についてみると、これは本来、ローカル負荷対策として、揚水式水力とともに揚水式水力の調整電系との組合せで運用されるが、一方、その備えた回転電力によって、系統予備力としての機能を果たして、単にローカル負荷対策としてだけでなく、系統信頼度の向上を期待する際にも、系統の供給信頼度を維持し得るものとして期待される。

* 東京大学工学部電気工学科(現東京大学工学部電気工学科)で発表

† 東京大学工学部電気工学科