Semi-ordered Vector Space の Positive Cone になるような Semi-ordered Space について

磯 部 熙 郎*

(昭和 48 年 3 月 31 日受理)

Some notes on semi-ordered sets which form positive cones of semi-ordered vector spaces

by Kiro ISOBE

Let R be a semi-ordered vector space. We put

$$R^+ = \left\{x : x \in R,\ x \geqq 0\right\}$$

R^+ is a semi-ordered set with the least element 0 and satisfies the following conditions:

I. (1) for every $a, b \in R^+$ we have $a+b \in R^+$,
(2) $(a+b)+c = a+(b+c)$,
(3) $a+b = b+a$,
(4) $a+0 = a$,
(5) for every $a, b \in R^+$ we have $a \leqq a+b$,
(6) $a+c = b+c$ implies $a=b$,
(7) if $a \leqq b$, then we have uniquely determined $c \in R^+$ such that $a+c=b$,

II. (1) for any real number $\alpha \geqq 0$ and $a \in R^+$ we have $\alpha a \in R^+$,
(2) $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$,
(3) $\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b$,
(4) $(\alpha+\beta)a = \alpha a + \beta a$,
(5) $1a = a$.

Generally let X be a semi-ordered set and we assume that X satisfies the previous conditions I. (1)–(7) and II. (1)–(5). In this paper, such a semi-ordered set X is styled as "a semi-ordered set with the least element and non-negative real domain of operators". In this paper we discuss the existence of a semi-ordered vector space R which $R^+ = X$ and some properties of X.

は じ め に

R を semi-ordered vector space とする。

---

* 北見工業大学一般教育等

$$R^+ = \left\{x : x \in R,\ x \geqq 0\right\}$$

とし，R^+ は0を最小元とする semi-ordered space であり，つぎの条件を満足する。

I. (1) 任意の $R^+ \ni a, b$ に対し $a+b \in R^+$

(2) $(a+b)+c = a+(b+c)$

(3) $a+b = b+a$

(4) $a+0 = a$

(5) 任意の $R^+ \ni a, b$ に対し，$a \leq a+b$

(6) $a+c \leq b+c$ ならば $a \leq b$

(7) $a \leq b$ ならば $a+c = b$ なる $c \in R^+$ が唯一つ存在する。

II. (1) 任意の実数 $\alpha \geqq 0$ と $a \in R^+$ に対して $\alpha a \in R^+$

(2) $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta) a$

(3) $\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b$

(4) $(\alpha+\beta) a = \alpha a + \beta a$

(5) $1 a = a$

一般に最小元 θ をもつ semi-ordered space X があって，条件 I. (1)～(7)，II. (1)～(5) を満足するとき，**非負実数を作用域とする最小元をもつ semi-ordered space** と云うことにする。

この論文では非負実数を作用域とする最小元をもつ semi-ordered space X があるとき，$X = R^+$ となる semi-ordered vector space R の存在について，および X の二，三の性質を論ずることにする。

1. 非負実数を作用域とする最小元をもつ semi-ordered space X から semi-ordered vector space R の構成

X を非負実数を作用域とする最小元 θ をもつ semi-ordered space とする。

(i) $X \ni a, b$ に対し $a \leq b$ ならば $a+c \leq b+c$ $(c \in X)$

(証明) I. (7) より $a+d = b$ なる d が存在する。I. (5) より

$$b+c = (a+d)+c = (a+c)+d \geq a+c$$

(ii) $\alpha \geqq 0$, $a, b \in X$ に対し，$a \leq b$ ならば $\alpha a \leq \alpha b$

(証明) I. (7) より $a+c = b$ なる c が存在する。$\alpha b = \alpha(a+c) = \alpha a + \alpha c \geq \alpha a$

(iii) $\alpha \leq \beta$ ならば $\alpha a \leq \beta a$

(証明) $\beta = \alpha + \gamma$ とおき

$$\beta a = (\alpha+\gamma) a = \alpha a + \gamma a \geq \alpha a$$

(iv) $0. a = 0$

(証明) $0 a = (0+0) a = 0 a + 0 a$

I. (4), (7) より $0a=0$

$$\mathfrak{R}=\Big\{(a, b):\ a, b\in X\Big\}$$

とおき，$\mathfrak{R}\ni(a, b),\ (c, d)$ に対し，同値関係

$(a, b)\sim(c, d)$ を $a+d=c+b$ で定義する。

$\sim$が同値関係であることは反射律と対称律は明らかであるから移動律だけを示す。

$(a, b)\sim(c, d),\ (c, d)\sim(e, f)$ とすれば

$a+d=c+b,\ c+f=e+d,$ したがって

$(a+f)+(d+c)=(e+b)+(d+c)$

I. (6) より $a+f=e+b$ だから $(a, b)\sim(e, f)$

この同値関係で $\mathfrak{R}$ を類別したものを R とする。

$R\in\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ に対し，$\mathfrak{a}\ni(a, b),\ \mathfrak{b}\ni(c, d)$ として，$(a+c, b+d)\in\mathfrak{c}\in R$ なる $\mathfrak{c}$ を $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{c}$ と定義する。$\mathfrak{a}\ni(a', b'),\ \mathfrak{b}\ni(c', d')$ とすれば

$a+b'=a'+b,\ c+d'=c'+d$ だから

$(a+c)+(b'+d')=(a'+c')+(b+d)$ となり

$(a+c, b+d)\sim(a'+c', b'+d')$ であるから $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ は一意的に決まる。この和に対し

(v) $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})+\mathfrak{c}=\mathfrak{a}+(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})$

(vi) $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{b}+\mathfrak{a}$

の成立は明らかである。

(vii) $R\ni\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ に対し $\mathfrak{a}+\mathfrak{c}=\mathfrak{b}$ なる $\mathfrak{c}\in R$ が存在する。

(証明) $\mathfrak{a}\ni(a, b),\ \mathfrak{b}\ni(c, d)$ とし，$(c, d)\sim(c+a+b, d+a+b)$ だから，$(c+b, d+a)\in\mathfrak{c}\in R$ とすれば $\mathfrak{a}+\mathfrak{c}=\mathfrak{b}$。

$R\ni\mathfrak{a}\ni(a, b)$ に対し $\alpha\geq0$ ならば $(\alpha a, \alpha b)\in\mathfrak{b}\in R$ なる $\mathfrak{b}$ を $\alpha\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$ と定義し，$\alpha<0$ ならば $(-\alpha b, -\alpha a)\in\mathfrak{b}\in R$ を $\alpha\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$ と定義する。このような $\alpha\mathfrak{a}$ が一意的に決まることは明らかでありつぎの条件も満足する。

(viii) $\alpha(\beta\mathfrak{a})=(\alpha\beta)\,\mathfrak{a}$

(ix) $\alpha(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})=\alpha\mathfrak{a}+\alpha\mathfrak{b}$

(x) $(\alpha+\beta)\,\mathfrak{a}=\alpha\mathfrak{a}+\beta\mathfrak{b}$

(xi) $1\mathfrak{a}=\mathfrak{a}$

したがって R は linear space である。

$R\ni\mathfrak{a}\ni(a, b),\ R\ni\mathfrak{b}\ni(c, d)$ に対し

$a+d\leq c+b$ のとき $\mathfrak{a}\leq\mathfrak{b}$ と定義すれば $\leq$ は order condition を満足し，かつ

(xii) $\mathfrak{a}\leq\mathfrak{b}$ ならば $\mathfrak{a}+\mathfrak{c}\leq\mathfrak{b}+\mathfrak{c}$

(xiii) $\alpha\geq0,\ \mathfrak{a}\leq\mathfrak{b}$ ならば $\alpha\mathfrak{a}\leq\alpha\mathfrak{b}$

また $(\theta, \theta) \in 0 \in R$ とし

(ix)　$\mathfrak{a} \geq 0$, $-\mathfrak{a} \geq 0$ ならば $\mathfrak{a} \equiv 0$

したがって，R は semi-ordered vector space になり，$X \ni a$ に対し，$(a, \theta) \in \mathfrak{a} \in R$ なる $\mathfrak{a}$ を a と同一視すれば $X = R^+$ となる。

X が Dedekind complete ならば R は universally continuous であり，X が Dedekind σ-complete ならば R は continuous であり，X が distributive lattice ならば R は vector lattice である。このとき $R \ni \mathfrak{a} \ni (a, b)$ に対し

(xiv)　$\mathfrak{a}^+ = a^{\cup} b - b \,(= (a^{\cup} b, b))$

となる。

2.　非負実数を作用域とする最小元をもつ distributive lattice の二, 三の性質

X を非負実数を作用域とし，最小元 θ をもつ distributive lattice とする。$X \ni a$ に対し

$$I_a = \left\{ x_{\cap} na : x \in X,\ n = 1,\ 2,\ \cdots \right\}$$

とおく。I_a は X の ideal[1] である。

(i)　I_a は一般に band[2] にならない。

(例)　X を $[0, 1]$ 上の連続関数の全体がつくる ordered vector space の positive cone とする。

$X \ni a = a(\lambda) = \lambda^3$,　$X \ni x = x(\lambda) = \lambda^2$ とし

$$x_{\cap} na = \min\left\{\lambda^2, n\lambda^3\right\} = \begin{cases} n\lambda^3 \left(0 \leq \lambda \leq \dfrac{1}{n}\right) \\ \lambda^2 \left(\dfrac{1}{n} < \lambda \leq 1\right) \end{cases}$$

故に $x_{\cap} na \Big|_{n=1}^{\uparrow \infty} x$ であるが $x \in I_a$ とすれば $x \leq na$ なる n が存在するから $x \in Ia$ である。

I を ideal とするとき I を含む最小の band を $\{I\}$ で表わすことにする。

(ii)　$\{I\} = \{\bigcup_{x \in D} x :$ for some $D \subset I\}$

(証明)　$J = \{\bigcup_{x \in D} x :$ for some $D \subset I\}$ とおく。

$J \in a, b$ とすれば $a = \bigcup_{x \in D} x$, $b = \bigcup_{y \in E} y$　　$(D, E \subset I)$

$a^{\cup} b = (\bigcup_{x \in D} x)^{\cup} (\bigcup_{y \in E} y) = \bigcup_{x \in D, y \in E} (x^{\cup} y)$

I は ideal だから $\{x^{\cup} y : x \in D, y \in E\} \subset I$ であり

$a^{\cup} b \in J$

---

(1)　$x, y \in I_a \Rightarrow x^{\cup} y \in I_a$,
　　$0 \leqq y \leqq x$, $x \in Ia \Rightarrow y \in I_a$

(2)　ideal I が band であるとは $I \supset D$.　$\bigcup_{x \in D} x = x_0$ ならば $x_0 \in I$.

また $\theta \leq x \leq a \in J$ とすれば

$$x = x_\cap a = x_\cap (\bigcup_{y \in D} y) \quad (D \subset I)$$
$$= \bigcup_{y \in D} (x_\cap y) \in J$$

故に J は ideal になり，また $F \subset J$, $x_0 = \bigcup_{x \in F} x$ とすれば $F \ni x$ に対し，$E_x \subset I$ が存在し，

$x = \bigcup_{y \in E_x} y$

$$x_0 = \bigcup_{x \in F} (\bigcup_{y \in E_x} y) = \bigcup_{y \in \bigcup_{x \in F} E_x} y \in J$$

したがって J は band である。

$I \subset J$, $J \subset \{I\}$ は明らかだから $J = \{I\}$

(iii) $\{I_a\} = \left\{x : x_\cap na \Big\uparrow_{n=1}^{\infty} x\right\}$

(証明) $J = \left\{x : x_\cap na \Big\uparrow_{n=1}^{\infty} x\right\}$ とおく。

$J \ni x, y$ とすれば

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (x^\cup y)_\cap na = \bigcup_{n=1}^{\infty} (x_\cap na)^\cup (y_\cap na) \leqq x^\cup y$$

一方 $x = \bigcup_{n=1}^{\infty} x_\cap na$, $y = \bigcup_{n=1}^{\infty} y_\cap na$ より $\bigcup_{n=1}^{\infty} (x_\cap na)^\cup (y_\cap na) \geq x^\cup y$

故に $(x_\cap y)_\cap na \Big\uparrow_{n=1}^{\infty} (x^\cup y)$

また $\theta \leq y \leq x \in J$ とすれば

$$y = y_\cap x = y^\cap \bigcup_{n=1}^{\infty} x_\cap na = \bigcup_{n=1}^{\infty} y_\cap x_\cap na = \bigcap_{n=1}^{\infty} y_\cap na$$

すなわち $y_\cap na \Big\uparrow_{n=1}^{\infty} y$ だから $y \in J$ 故に J は ideal である。

また $x_0 = \bigcup_{x \in D} x$, $(D \subset J)$ とすれば

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} x_{0\cap} na = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\bigcup_{x \in D} x)_\cap na = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\bigcup_{x \in D} (x_\cap na))$$
$$= \bigcup_{x \in D} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (x_\cap na) \right) = \bigcup_{x \in D} x = x_0$$

したがって $x_{0\cap} na \Big\uparrow_{n=1}^{\infty} x_0$ であり $x_0 \in J$

故に J は band であり

$I_a \subset J$, $J \subset \{I\}$ は明らかだから $J = \{I\}$。

文献

1) H. Nakano: modern Spectral Theory (1950), Tokyo Math. Book Ser. Vol. II, Tokyo.
2) W. A. J. Luxemburg and A. C. Zaanen: Riesz Space. Vol. 1 (1971). Amsterdam.