

# モデル追従系について (第1報)\*

— モデル追従系の構成 —

神谷 祐二\*

(昭和48年3月30日受理)

## On the Model Following System. (Part I)

— Constitution of the Model Following System —

by Yuji KAMIYA

The most important thing in a control system is that the characters of the system are not affected by the measurement error and the change of the parameters in the controlled object.

But at present, the effective method by which we design such a system is not reported yet.

This paper proposes the model following system as the system which has very low parameter sensitivity.

### 1. ま え が き

多くの制御系の設計法は、制御対象の全てのパラメータが確定したものととして与えられることを前提としている。しかし実際にパラメータを測定する際に、誤差を生ずることは避けられないことであるし、あるいは経時によって変化することもある。したがって制御系を設計する場合には、あらかじめ制御対象のパラメータ測定誤差や変化(以後両者を含めてパラメータ変動と称する)を考慮して、系の動特性、定常特性がパラメータ変動の影響を受けないような構成にしなければならない。そのような系の設計法として、パラメータ感度方程式を導入する方法<sup>1)</sup>が知られている。しかしこの方法は多入力系にのみ適用可能であり、また系の動特性、定常特性を指定するとき、パラメータ変動による影響を任意に小さくすることはできない。

本論文は、制御対象のパラメータ変動に関して極めて低感度な系としてモデル追従系を提案している。これは制御対象のパラメータ公称値を用いてモデルを作り、このモデルの出力に制御対象のそれを追従させるもので、追従誤差を制御することでパラメータ変動の影響を任意に設定することが可能となり、実用上は任意の入力に対して零感度の系を実現することができる。なお、既に発表されているモデル追従系<sup>2,3,4)</sup>は、モデルとして外部入力のないもの、ある

\* 昭和47年度電気四学会北海道支部連合大会で一部発表(1972.10)

\*\* 北見工業大学電気工学科

いは入力としてステップ関数と限定したものであり、またその目的はパラメータ変動に関して低感度な系を得ることではない。

## 2. モデル追従系の構成

制御対象は式(1)で与えられ、 $(\mathbf{P}+\Delta\mathbf{P}, \mathbf{Q}+\Delta\mathbf{Q})$  は可制御とし、さらに全ての状態変数  $\mathbf{X}(t)$  は直接観測可能とする。

$$\dot{\mathbf{X}} = (\mathbf{P} + \Delta\mathbf{P}) \mathbf{X} + (\mathbf{Q} + \Delta\mathbf{Q}) \mathbf{R} \quad (1)$$

ここで  $\mathbf{X}$  は  $n$  次元状態ベクトル、 $\mathbf{R}$  は  $m (< n)$  次元入力ベクトル、 $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$  はそれぞれ  $n \times n, n \times m$  のパラメータ公称値からなる行列、 $\Delta\mathbf{P}, \Delta\mathbf{Q}$  はそれぞれ  $n \times n, n \times m$  のパラメータ変動を表わす行列とする。

式(1)の制御対象のパラメータ公称値  $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$  を用いて、式(2)のモデルを作る。モデルの状態変数  $\mathbf{Z}(t)$  は全て直接観測可能とする。

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{P}\mathbf{Z} + \mathbf{Q}\mathbf{U} \quad (2)$$

ここで  $\mathbf{Z}$  は  $n$  次元状態ベクトル、 $\mathbf{U}$  は  $m$  次元入力ベクトルとする。

今、目的とするところは、 $\mathbf{Z}(t)$  に  $\mathbf{X}(t)$  を追従させることである。

$$\mathbf{X}(t) - \mathbf{Z}(t) = \mathbf{E}(t) \quad (3)$$

とすると、 $\mathbf{E}(t)$  はモデルに対する制御対象の追従誤差を意味し、式(1), (2)より式(4)の関係を満足している。

$$\dot{\mathbf{E}} = (\mathbf{P} + \Delta\mathbf{P}) \mathbf{E} + (\Delta\mathbf{P}\mathbf{Z} - \mathbf{Q}\mathbf{U}) + (\mathbf{Q} + \Delta\mathbf{Q}) \mathbf{R} \quad (4)$$

式(4)で新しい外部入力  $\mathbf{V}$  ( $m$  次元ベクトル) を導入して

$$\mathbf{R} = \mathbf{U} + \mathbf{V} \quad (5)$$

とすると

$$\dot{\mathbf{E}} = (\mathbf{P} + \Delta\mathbf{P}) \mathbf{E} + (\Delta\mathbf{P}\mathbf{Z} + \Delta\mathbf{Q}\mathbf{U}) + (\mathbf{Q} + \Delta\mathbf{Q}) \mathbf{V} \quad (6)$$

を得る。式(6)をモデル追従系のエラーシステムと称することにする。式(6)から追従誤差  $\mathbf{E}(t)$  はパラメータ変動によって生じた一種の外乱と見なせる項  $(\Delta\mathbf{P}\mathbf{Z} + \Delta\mathbf{Q}\mathbf{U})$  と、初期誤差  $\mathbf{E}(0) = \mathbf{X}(0) - \mathbf{Z}(0)$  によって生ずることがわかる。したがって入力  $\mathbf{V}$  によって外乱項と初期誤差の影響を除くことができるとき、追従系の構成が可能となる。

最初に初期誤差だけが存在する場合を考える。この場合、追従誤差はエラーシステムの動特性のみに関係していることは明らかである。ところでエラーシステムは制御対象と同じシステムマトリックス  $(\mathbf{P} + \Delta\mathbf{P})$ 、入力マトリックス  $(\mathbf{Q} + \Delta\mathbf{Q})$  を有しているので可制御であり、また式(3)から  $\mathbf{E}(t)$  は全て直接観測可能であるから<sup>5)</sup>

$$\mathbf{V} = -\mathbf{K}\mathbf{E} \quad (7)$$

ここで  $\mathbf{K}$  は  $m \times n$  の行列なる全状態フィードバックによって  $n$  個の極を任意に設定することができる。したがってエラーシステムの入力を式(7)で与えて極の実数部を負に大きくするとき、初期誤差の影響を任意に低減することができる。

次に外乱項だけが存在する場合を考える。この場合、外乱項の影響を減ずる方策としてエラーシステムにおいて外乱項を入力、 $\mathbf{E}(t)$  を出力した伝達関係表示を行ない、このときのゲインを小さくすることが考えられる。式(6)の入力  $\mathbf{V}$  がスラッカーの場合、全状態フィードバックによってエラーシステムの零点は変化しないことが知られており<sup>6)</sup>、ゲインは  $n$  個の極の積の逆数に比例する。一方  $\mathbf{V}$  が  $m$  次元ベクトルの場合にはフィードバックによって極と同時に零点も変化するが、ゲインは小さくなる。したがって初期誤差だけが存在する場合と同じように、エラーシステムの入力を式(7)で与えて極を適当に設定するとき、外乱項の影響も任意に低減することができる。

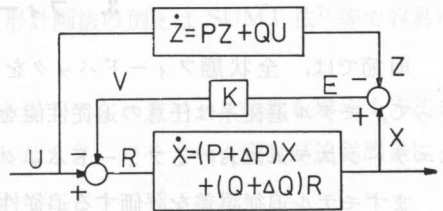


図1 モデル追従系

Fig. 1. Model following system.

以上の結果をまとめると、式(6)のエラーシステムにおいて初期誤差と外乱項が存在する場合に、入力  $\mathbf{V}$  を式(7)で与えて極の実数部を負に増大するとき追従誤差は零に漸近し、したがって極を適当に設定するとき、任意の追従性能を有するモデル追従系を得ることができる。図1はモデル追従系の構成を示している。

さらに一般に式(2)のモデルにおいて入力  $\mathbf{U}$  を

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{F}} &= \mathbf{A}_1\mathbf{F} + \mathbf{B}_1\mathbf{W} \\ \dot{\mathbf{H}} &= \mathbf{A}_2\mathbf{H} + \mathbf{B}_2\mathbf{Z} \\ \mathbf{U} &= \mathbf{C}_1\mathbf{F} + \mathbf{C}_2\mathbf{H} + \mathbf{C}_3\mathbf{Z} \end{aligned} \quad (9)$$

ここで  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{W}$  はそれぞれ  $l_1 (\geq m)$ ,  $l_2 (> n)$ ,  $l_3 (< l_1)$  次元ベクトル、 $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{A}_2$ ,  $\mathbf{B}_1$ ,  $\mathbf{B}_2$  はそれぞれ  $l_1 \times l_1$ ,  $l_2 \times l_2$ ,  $l_1 \times l_3$ ,  $l_2 \times n$  の行列、 $\mathbf{C}_1$ ,  $\mathbf{C}_2$ ,  $\mathbf{C}_3$  はそれぞれ  $m \times l_1$ ,  $m \times l_2$ ,  $m \times n$  の行列で与えるとき、図2の系を構成することによって式(10)のモデルの  $\mathbf{Z}$  に  $\mathbf{X}$  を追従させることができる。

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{Z}} \\ \dot{\mathbf{H}} \\ \dot{\mathbf{F}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} + \mathbf{Q}\mathbf{C}_3 & \mathbf{Q}\mathbf{C}_2 & \mathbf{Q}\mathbf{C}_1 \\ \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Z} \\ \mathbf{H} \\ \mathbf{F} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_1 \end{pmatrix} \mathbf{W} \quad (10)$$

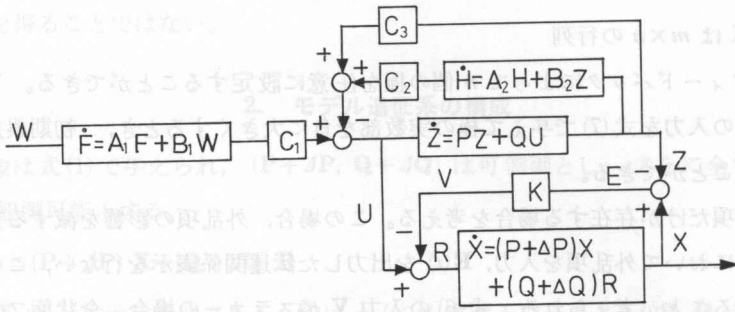


図2 モデル追従系の一般形

Fig. 2. The general type of the model following system.

### 3. フィードバック係数の設定

前節では、全状態フィードバックを行ないエラーシステムの極を適当に設定することによって、モデル追従系は任意の追従性能を得ることができることを述べたが、ここでは具体的にエラーシステムにおけるフィードバック係数をどのように設定すべきかについて検討する。

まずモデル追従誤差を評価する追従性能指数、およびその目標値を定めなければならないが、これは追従系に加えられる入力 class や、追従系を使用する目的によって異なったものとなるであろう。例えば入力の class として

- (A) ステップ関数、周期関数
- (B) 時間の多項式

の二つを考えると、追従性能指数としては (A), (B) 共に

$$J_i = \int_{t_0}^{t_1} E_i^2(t) dt \quad i = 1 \sim n \tag{11}$$

ここで  $t_0, t_1$  はそれぞれ追従性能の評価を開始、および終了する時刻で与えるのが適当と思われるが、その目標値としては

(A) の場合

$$J_i \leq \delta_i \quad i = 1 \sim n, \delta_i: \text{正の実数} \tag{12}$$

(B) の場合

$$J_i \leq \delta_i \int_{t_0}^{t_1} Z_i^2(i) \quad i = 1 \sim n \tag{13}$$

等が考えられる。また追従系に終端値指定の最適制御を行なわせるような場合には、追従性能指数およびその目標値は

$$J_i = |E_i(T)| \leq \delta_i \quad i = 1 \sim n \tag{14}$$

ここで T は制御終了時刻、 $\delta_i$  は終端における許容誤差

としなければならないであろう。いずれの場合においても  $E_i(t)$  に関する追従性能指数の値を  $J_i$ , その目標値を  $J_{i0}$  として

$$J_i \leq J_{i0} \quad i = 1 \sim n \tag{15}$$

の関係が成立するとき、追従性能が満足されたと称することにする。ところで一般に追従性能を満足するフィードバック係数の set は無数に存在し、さらに式(16)を最小にする条件を付加するのが工学的に妥当と思われる。

$$J_V = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{V}' \mathbf{S} \mathbf{V} dt \tag{16}$$

ここで  $\mathbf{S}$  は  $m \times m$  の正定行列、 $\mathbf{V}'$  は  $\mathbf{V}$  の転置ベクトル

したがってエラーシステムのフィードバック係数を求める問題は、式(15)の拘束条件の下で式(16)を最小にする問題として定式化され、非線形計画法の例えば SUMT 法<sup>7)</sup> 等で容易に解くことができる。

以上はパラメータ変動が与えられることを前提としてフィードバック係数を求める方法を示したが、逆にフィードバック係数がある値に設定したとき、パラメータ変動が追従誤差にどの程度影響するかを知りたい場合が多いと思われる。

式(6)において入力を式(7)で与えると

$$\dot{\mathbf{E}} = [\mathbf{P} + \Delta \mathbf{P} - (\mathbf{Q} + \Delta \mathbf{Q}) \mathbf{K}] \mathbf{E} + (\Delta \mathbf{P} \mathbf{Z} + \Delta \mathbf{Q} \mathbf{U}) \tag{17}$$

となる。

$$\mathbf{E} = \mathbf{T} \mathbf{Y} \tag{18}$$

の変換によって式(17)を式(19)で示されるように対角化する。

$$\dot{\mathbf{Y}} = \Delta \mathbf{Y} + \mathbf{T}^{-1} (\Delta \mathbf{P} \mathbf{Z} + \Delta \mathbf{Q} \mathbf{U}) \tag{19}$$

ここで

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\lambda_i$  を式(2)のモデルの極や、 $\mathbf{U}$  を command system\* で表わしたときの極よりも実数部を十分に負するとき、式(19)は

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{T}^{-1} (\Delta \mathbf{P} \mathbf{Z} + \Delta \mathbf{Q} \mathbf{U}) \tag{20}$$

と表わしてよい。ところで式(17), (18)から式(20)は

$$\mathbf{Y} = \mathbf{T}^{-1} [\mathbf{P} + \Delta \mathbf{P} - (\mathbf{Q} + \Delta \mathbf{Q}) \mathbf{K}]^{-1} (\Delta \mathbf{P} \mathbf{Z} + \Delta \mathbf{Q} \mathbf{U}) \tag{21}$$

となる。さらに式(18)から

\*  $\mathbf{U}$  は外部入力のない系 (command system) の出力として表わすことができる<sup>8)</sup>。

$$\mathbf{E} = [\mathbf{P} + \Delta\mathbf{P} - (\mathbf{Q} + \Delta\mathbf{Q}) \mathbf{K}]^{-1} (\Delta\mathbf{P}\mathbf{Z} + \Delta\mathbf{Q}\mathbf{U}) \tag{22}$$

の関係を得ることができ、追従誤差に対するパラメータ変動の影響  $\Delta\mathbf{P}$ ,  $\Delta\mathbf{Q}$  を知ることができる。

ここでアナログ計算機による簡単な実験結果を示す。

制御対象を式 (23) で与える。

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -0.5 \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} R \tag{23}$$

モデルを式 (24) で与えて

$$\begin{pmatrix} \dot{Z}_1 \\ \dot{Z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} U \tag{24}$$

エラーシステムを求めると

$$\begin{pmatrix} \dot{E}_1 \\ \dot{E}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -0.5 \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0.5 \sin t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} V \tag{25}$$

となる。図 3 はパラメータ変動 ( $0.5 \sin t$ ) が存在しないとしてエラーシステムの極を  $-2, -4$  に設定した場合のモデル追従系を示している。図 3 の系で  $E_1(0) = E_2(0) = 0$  としてステップ入力を加えたときの応答を図 4 に示す。式 (22) から追従誤差を求めると

$$[\mathbf{P} + \Delta\mathbf{P} - (\mathbf{Q} + \Delta\mathbf{Q}) \mathbf{K}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6 \end{pmatrix} \tag{26}$$

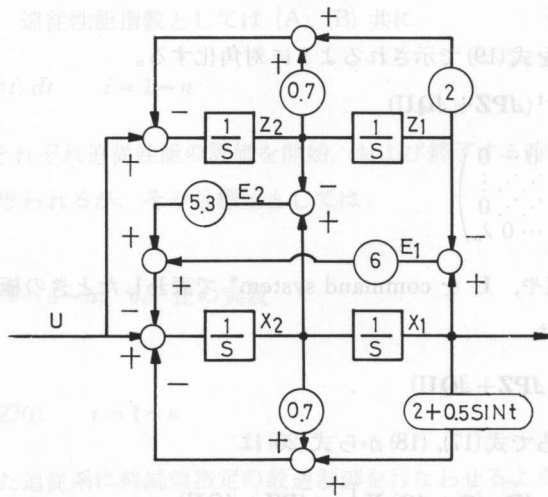


図 3 (23) 式の制御対象に対するモデル追従系

Fig. 3. The model following system for the controlled object of eq. (23).

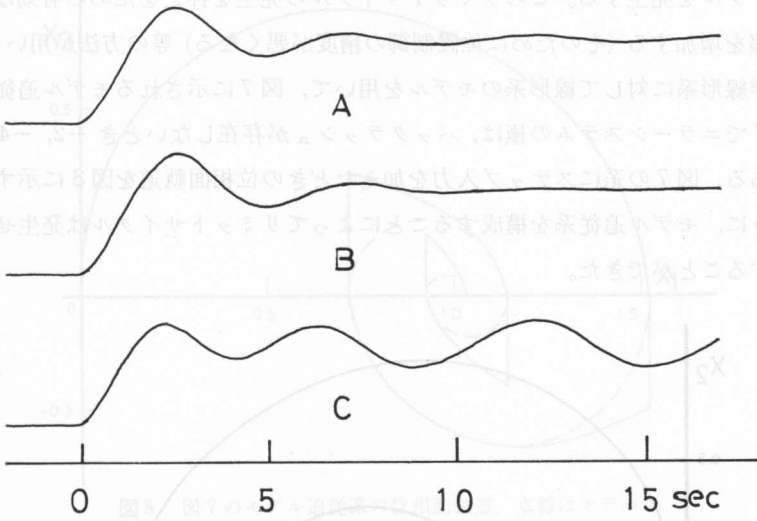


図4 A, B, Cはそれぞれモデル追従系, モデル, 制御対象のステップ応答

Fig. 4. A is the step response of the model following system, B is of model, and C is of the controlled object.

として

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0.5 \sin t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0.5 \sin t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (27)$$

となり

$$E_1(t) = \frac{\sin t}{16} Z_1(t) \quad (28)$$

の追従誤差を生ずることになるが、これは実験結果と一致する。

#### 4. 非線形系の近似線形系化

モデル追従系を構成するとき、制御対象のパラメータ変動に関して極めて低感度とすることができるとを示したが、パラメータ変動としてとらえることのできる非線形系の制御対象を、線形系のモデルに追従させることによって近似線形系化できることが予想される。非線形系の例として図5に示されるような位置検出部にバックラッシュの存在する位置制御系を取り上げてみる。図5の系にステップ入力を加えるとき、図6に示されるような

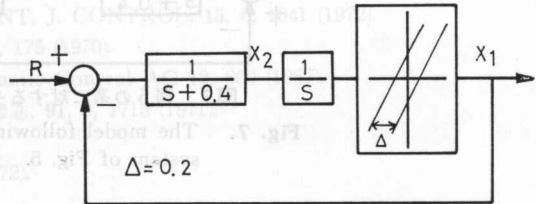


図5 バックラッシュの存在する位置制御系  
Fig. 5. The servo system with the backlash.

リミットサイクルを発生する。このリミットサイクルの発生を抑えをための有効な手段はなくクーロン摩擦を増加する(そのために位置制御の精度が悪くなる)等の方法が用いられている。今、図5の非線形系に対して線形系のモデルを用いて、図7に示されるモデル追従系を構成してみる。図7でエラーシステムの極は、バックラッシュが存在しないとき-2, -4となるように設定してある。図7の系にステップ入力を加えたときの位相面軌道を図8に示す。図8から判明するように、モデル追従系を構成することによってリミットサイクルは発生せず、近似的に線形系化することができた。

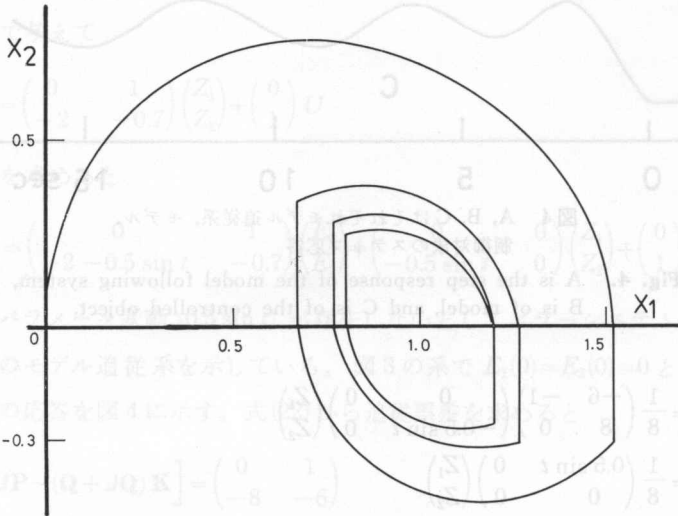


図6 ステップ入力に対する図5の系の位相面軌道

Fig. 6. Phase trajectory of the servo system of Fig. 5 for step input.

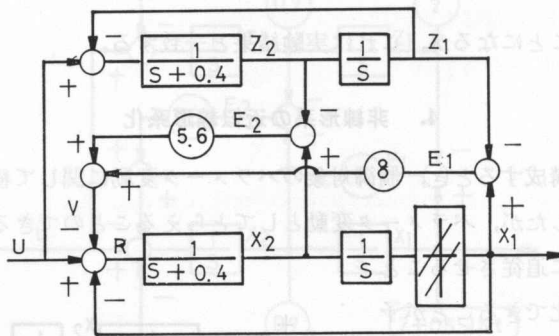


図7 図5の系に対するモデル追従系

Fig. 7. The model following system for the system of Fig. 5.



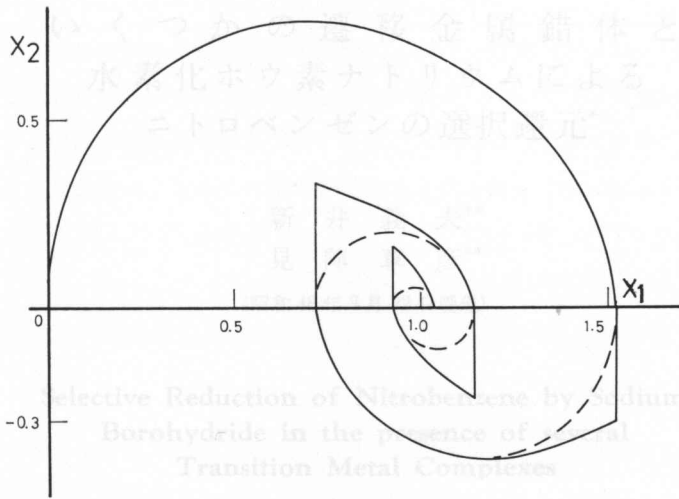


図8 図7のモデル追従系の位相面軌道。点線はモデルの位相面軌道を示す。

Fig. 8. Phase trajectory of the system of Fig. 7 for step input. Dotted line shows the trajectory of the model.

### 5. む す び

制御対象のパラメータ変動が存在する場合においても制御系の特性を一定に保つ方法として、モデル追従系を構成することを提案した。パラメータ変動によって生ずる追従誤差は、エラーシステムの極の配置によって決定され、極を負に増大するにしたがって零に漸近することが判明し、実用的にはパラメータ変動に関して零感度な系を実現することができる。

本論文では制御対象の状態変数は全て直接観測できるとの仮定をしたが、モデル追従系をより実際的にするために、一部の状態変数しか直接観測されない場合に拡張することを、今後の研究課題としたい。最後に日頃御指導を賜わっている北海道大学工学部三浦良一教授、田川遼三郎教授、小山昭一助教授に深く感謝いたします。

### 文 献

- 1) 藤田昭平： 制御工学, **13**, 3, 56 (1969).
- 2) 細江繁幸・伊藤正美： 電気学会論文誌, **92-C**, 10, 369 (1972).
- 3) S. P. Bhattacharyya, J. B. Pearson: INT. J. CONTROL, **15**, 6, 1041 (1972).
- 4) 須賀一郎： 計測自動制御学会論文集, **6**, 2, 175 (1970).
- 5) W. M. Wonham: IEEE Trans. Automatic Control **AC-12**, 660 (1967).
- 6) 伊藤正美・細江繁幸・古田公人： 電気学会雑誌, **91**, 9, 1715 (1971).
- 7) 前田活郎： 計測と制御, **11**, 3, 301 (1972).
- 8) 土谷武士： システムと制御, **16**, 1, 73 (1972).