

クーロン摩擦支持下にある弾性棒の 縦衝撃における反射波を考慮した 応力波の解析および実験*

追分重義**
宇野和雄**
鈴木守道***
長谷川敏明***

(昭和48年3月31日受理)

Analysis and Experiment on Longitudinal Wave Propagation in an Elastic Rod with Coulomb Friction in Consideration of the Reflected Waves

by Shigeyoshi OIWAKE, Kazuo UNO, Morimichi SUZUKI
and Toshiaki HASEGAWA

Longitudinal elastic wave propagation in an elastic rod supported by the Coulomb's friction force working axially on the surface of the rod has been analyzed and investigated experimentally.

The so-called wave equation was solved by Laplace' transformation. Factors for the reflected waves being introduced in the original function, considerable accordance was seen between the analyzed and the experimented result. In this report, however, the case was investigated, where the length of the striking rod was just a little shorter than twice that of the stationary one. The signs of the reflection of waves at the both ends of the stationary rod were taken into consideration and the stress changes and others after the steady state, were expressed in appropriate equations.

1. 緒 言

クーロン摩擦支持された弾性棒が縦衝撃を受ける際の弾性波の伝ばについては、E. V. Wilmsら¹⁾、C. S. Corneliusら²⁾の研究があるが、いずれも棒の各位置における定常状態までの現象しか取扱っていない。松本ら³⁾は反射波も含め、応力波を重畳させる方法で応力変化の全経過を取扱っている。各応力は衝撃速度に比例した一定値としている。筆者らは、半無限長

* 日本機械学会北海道学生会第2回卒業研究発表会にて発表(昭48.3.11)

** 北見工業大学機械工学科

*** 北見工業大学機械工学科4年目学生

の棒と有限長の棒とに生ずる現象を重合わせる手順を用い、反射波の影響を受ける定常状態後も含む、応力変化の全経過期間に対して解析を試み、実験をおこなった。

2. 理 論

2.1 記 号

- A: 棒の断面積
- c: 弾性波の伝ば速度
- E: 棒の材料のヤング係数
- f: 棒の単位長さあたりの摩擦力

$H\left(t - \frac{x}{c}\right)$: $x = ct$ において生ずる単位ステップ関数

- t: 衝撃時からの経過時間
- t_0 : 波面先端の粒子速度が零になる時間
- t_f : 衝撃面の粒子速度が零になる時間
- u: 変位
- v_p : 粒子速度
- V_0 : 衝撃速度
- x: 衝撃前の無ひずみ状態の断面の位置
- x_0 : 波面先端の粒子速度が零になる位置
- ρ : 棒の材料の密度
- σ : 応力

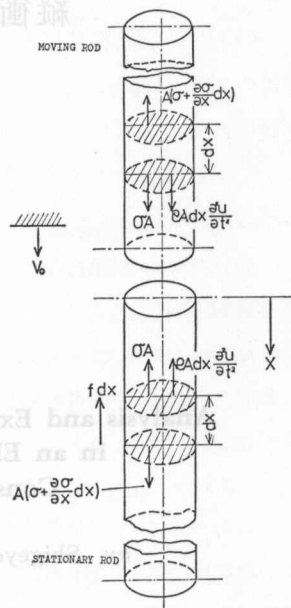


図1 力学系のモデル

Fig. 1. Model for the mechanics.

2.2 両棒が半無限長のとき。

2.2.1 図1は衝撃により発生する両棒の外力や内力を示す。打撃棒の運動方程式は厚さ dx の円板の平衡条件より、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad c = \sqrt{E/\rho} \tag{1}$$

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial u(0, t)}{\partial t} = V_0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = \text{有界} \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

式(1)を初期条件(2)のもとで Laplace 変換によって解くと、次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} u(x, t) &= V_0(t - x/c) H(t - x/c) \\ \sigma &= E \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{EV_0}{c} H(t - x/c) \\ v_p &= \frac{\partial u}{\partial t} = V_0 H\left(t - \frac{x}{c}\right) \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

2.2.2 静止棒の定常状態の方程式は、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{f}{AE} \quad (4)$$

粒子速度が零になる位置を求めるに、打撃棒と静止棒とは、(0, 0)において $\partial u / \partial x$ が連続であるという条件から、式(3)第2式と式(4)を用いて、つぎを得る。

$$x_0 = \frac{AEV_0}{fc}, \quad t_0 = \frac{AEV_0}{fc^2} \quad (5)$$

2.2.3 静止棒の過渡状態に対しては、

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{AEV_0^2}{2fc^2} \left\{ 1 - \frac{3}{4} \left(\frac{x}{x_0} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{t}{t_0} \right) \right\} \left\{ \left(\frac{t}{t_0} \right) - \left(\frac{x}{x_0} \right) \right\} H \left(t - \frac{x}{c} \right) \\ \sigma &= -\frac{EV_0}{2c} \left\{ 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{x}{x_0} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{t}{t_0} \right) \right\} H \left(t - \frac{x}{c} \right) \\ v_p &= \frac{v_0}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x_0} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{t}{t_0} \right) \right\} H \left(t - \frac{x}{c} \right) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

また次式も得られる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma(x, t_s) &= -\frac{EV_0}{c} \left\{ 1 - \left(\frac{x}{x_0} \right) \right\}, \quad 1 \leq \frac{t}{t_s} \leq \infty \\ u(x, t_s) &= \frac{AEv_0^2}{2fc^2} \left\{ 1 - \left(\frac{x}{x_0} \right) \right\}^2, \quad 1 \leq \frac{t}{t_s} \leq \infty \\ v_p(x, t_s) &= 0, \quad 1 \leq t/t_s \leq \infty \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

2.2.4 定常状態後の静止棒の運動方程式は、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{f}{AE} H \left(t - \frac{x}{c} \right) \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = \text{有界} \\ \frac{\partial u(0, t)}{\partial t} &= \frac{V_0}{t_0} t \text{ と仮定すると, } \quad u(0, t) = \frac{v_0}{2t_0} t^2, \quad u(0, 0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式(8)を初期条件(9)のもとで Laplace 変換によって解くと、つぎの諸式を得る。

$$\left. \begin{aligned} u_1(x, t) &= \frac{AEV_0^2}{25c^2} \left\{ \left(\frac{t}{t_0} \right)^2 - \left(\frac{x}{x_0} \right) \left(\frac{t}{t_0} \right) \right\} H \left(t - \frac{x}{c} \right) \\ \sigma_1 &= E \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{V_0 E}{2c} \left(\frac{t}{t_0} \right) H \left(t - \frac{x}{c} \right) \\ v_{p1} &= V_0 \left\{ \left(\frac{t}{t_0} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x_0} \right) \right\} H \left(t - \frac{x}{c} \right) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

2.3 両棒が有限長のとき。

静止棒の長さを l とする。衝撃後静止棒の位置 x に、時刻 $t=x/c$ に現われる圧縮波が最初の弾性波である。つぎに、下端面まで伝ばして、はね返ってくるのは引張波で、点 x に時刻 $t=(2l-x)/c$ に現われる。引張波の粒子速度の方向は波速の方向と反対であるから、支持端を

向くことになる。静止棒の支持は反衝撃側の端面は自由なるも、円筒面をクーロン摩擦によって支えている。したがってこの場合摩擦力は衝撃面の方向である。本実験の場合は打撃棒の長さが静止棒のその2倍弱程度であるから、静止棒で上記の現象が進んでいる間、打撃棒では自由端で伝ば応力の符号が圧縮より引張りに変って、はね返るので、粒子速度は自由端の方を向く。しかしながら静止棒で最初の反射波が

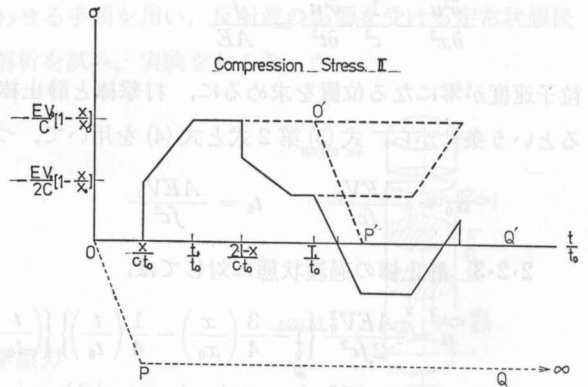


図2 反射波の導入

Fig. 2. Introduction of reflected waves.

衝撃面まで戻ってきたときでも、棒の長さの関係で打撃棒の最初の反射波はやっと自由端から折返した程度で、その衝撃面付近はまだ自由端に向って進む圧縮波が存在する。したがって粒子速度の方向も自由端向きであるから、この時期には両棒は相離れようとするから衝撃面も自由面として取扱うことができる。静止棒で衝撃面から第2の圧縮波が帰るときにその波頭が位置 x に現われる時刻は $t = \frac{2l+x}{c}$ である。つぎに引張波となって位置 x に表われる時刻は $t = \frac{3l-x}{c}$ である。一般に時刻

$$t = \frac{nl-x}{c} \text{ および } \frac{nl+x}{c}, \quad n = 0, 1, 2 \tag{11}$$

に位置 x にそれぞれ圧縮波および引張波が現われる。

さて式(10)は図2の $\overline{O'P'}$ が \overline{OP} に平行移動されている状態の式であるから、これを $\overline{O'P'}$ に平行移動すると、

$$\left. \begin{aligned} u_1(x, t) &= \frac{AEv_0^2}{2fc^2} \left\{ \left(\frac{t}{t_0} \right)^2 - \left(\frac{x}{x_0} \right) \left(\frac{t}{t_0} \right) \right\} H\left(t - \frac{x}{a} \right) \\ \sigma_1 &= -\frac{v_0 E}{2c} \left(\frac{t}{t_0} \right) H\left(t - \frac{x}{a} \right) \\ v_{p1} &= v_0 \left\{ \left(\frac{t}{t_0} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x_0} \right) \right\} H\left(t - \frac{x}{a} \right) \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

ただし上式中 $a = (cx)/(x + cT_1)$ で、 T_1 は図2中の時間である。

ゆえに各時点で観測される u, σ, v_p は、

$$\left. \begin{aligned} u(x, t) &= u(x, t_s) - u_1(x, t) \\ \sigma(x, t) &= \sigma(x, t_s) - \sigma_1(x, t) \\ v_p(x, t) &= v_p(x, t_s) - v_{p1}(x, t) \end{aligned} \right\} \tag{12}$$

で、式(7)および(10)より、

$$\left. \begin{aligned} u(x, t) &= \frac{AEV_0^2}{2fc^2} \left[\left\{ 1 - \left(\frac{x}{x_0} \right)^2 \right\} - \left\{ \left(\frac{t}{t_0} \right)^2 - \left(\frac{x}{x_0} \right) \left(\frac{t}{t_0} \right) H \left(t - \frac{x}{a} \right) \right\} \right] \\ \sigma(x, t) &= -\frac{EV_0}{c} \left\{ 1 - \left(\frac{x}{x_0} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{t}{t_0} \right) H \left(t - \frac{x}{a} \right) \right\} \\ v_p(x, t) &= V_0 \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x_0} \right) - \left(\frac{t}{t_0} \right) \right\} H \left(t - \frac{x}{a} \right) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

最大応力は境界で粒子速度が零になったときに生ずる。式(13)第1, 2式より,

$$\sigma(0, t_0) = -\frac{EV_0}{c}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{f}{AE} \quad (14)$$

ここで式(15)が t より独立なのは定常状態であるからである。式(13)の第1, 2式より,

$$u = -\frac{AEV_0^2}{2fc^2} \left\{ 1 - \left(\frac{x}{x_0} \right)^2 \right\}, \quad \sigma = \frac{EV_0}{c} \left\{ 1 - \left(\frac{x}{x_0} \right)^2 \right\}, \quad v_p = 0 \quad (15)$$

さて \overline{OP} を $\overline{O'P'}$ に平行移動したように, \overline{PQ} を $\overline{P'Q'}$ に平行移動すると,

$$u = 0, \quad \sigma = 0, \quad v_p = 0 \quad (16)$$

つぎに式(11)および式(14)第1式より, 位置 x において圧縮応力と引張応力が現われるときに対してそれぞれ,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_c &= -\frac{EV_0}{c} \left(1 - \frac{nl+x}{ct_0} \right) \\ \sigma_t &= \frac{EV_0}{c} \left(1 + \frac{nl-x}{ct_0} \right) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

式(17)の両式を重量したのが曲線 $\sigma-t/t_0$ である。

3. 実験

3.1 実験方法

打撃棒, 静止棒ともに径 16.0 mm の丸棒で, 長さはそれぞれ 700 mm および 425 mm とした。静止棒には, 図3に示す I, II, ..., V の位置に半導体ひずみゲージを貼った。材質は3種類として, 同種類間のみの衝撃を行なった。表1には各材料のヤング係数 E , 比重量 γ , 伝ば

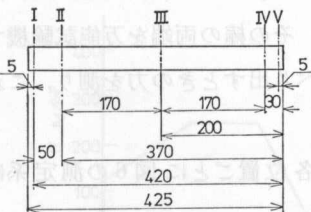


図3 静止棒における計測位置

Fig. 3. Measured location on the stationary rod.

表1 材料の物理定数

Table 1. Physical properties of the materials of rods

諸元	材料	S45C	BsB	Al
単位				
E	10^6 kg/cm^2	2.12	0.975	0.720
γ	10^3 kg/m^3	7.81	8.48	2.71
c	10^3 m/s	5.15	3.36	5.10

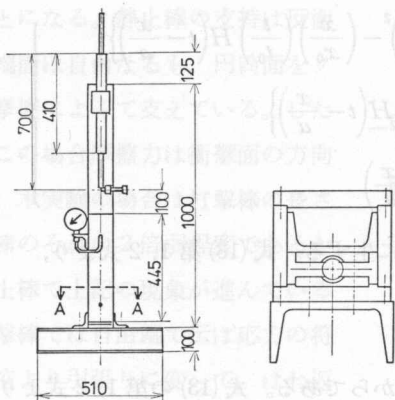


図4 実験装置の概観

Fig. 4. Outline of the experimental apparatus.

速度 $c = \sqrt{Eg/l}$ を示した。

図4に示す装置により静止棒の縦長さの全長にわたって単位長さ当りに均一なクローン摩擦を与えるようにした。図4は打撃棒がその下端面を側方向から突出されたピンで支えられている状態を示す。静止棒はその円筒面に2つ割の硬質塩化ビニール管を押付けることによるクローン摩擦力で自然落下しないようにしてある。A-A断面がこの押付装置を示す静止棒まわりの横断面で、他の材料はすべて軟鋼である。小さい方の溝形綱はそのフランジ面で筐体の内壁と接触して、水平にすべれる様になっている。ゴム袋をこの溝形綱の内側と筐体との密閉した空間に入れ、ゴム袋に空気を注入し、この空気圧によって袋を収縮して、静止棒に対するクローン摩擦力を調節できるようにしてある。静止棒に貼付ける半導体ひずみゲージは棒の同じ母線に並ぶようにし、塩化ビニール管の割間に来さして実験中損傷しないようにした。

静止棒と塩化ビニールとの間の縦方向単位長さあたりの摩擦力 f は同材質、同径、同表面仕上げの棒を、図5で本体からはずした静止棒締付筐でくわえ、その棒の両端を万能試験機でくわえて引張り、空気圧をパラメータとして、棒が筐体からすべり出すときの力を測り、これから f を求めた。

打撃棒を静止棒に衝撃させたときのひずみゲージの出力は各位置ごとに図6の測定系によりシンクロスコープに導き、これを撮影した。

図7(a), (b), ..., (g) は解析による $\sigma-t$ 曲線であり、それぞれの下に示す(A), (B), ..., (G) は実験による曲線である。両曲線の間にかんがりの一致が見られる。しかし本解析においては静

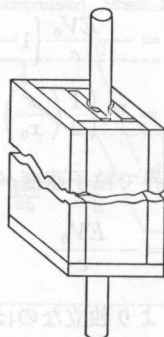


図5 単位摩擦力の測定

Fig. 5. Measurement of the unit frictional force.

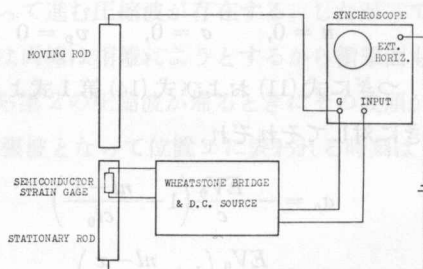
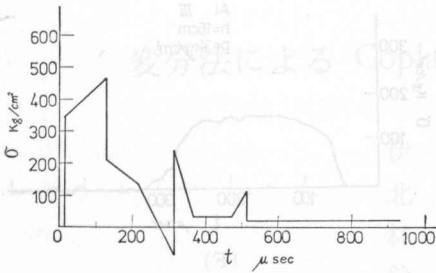
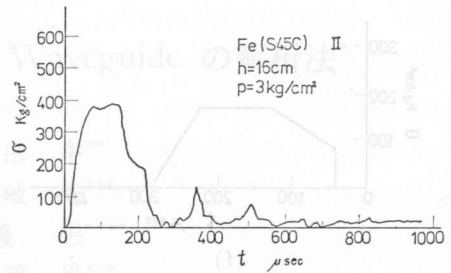


図6 ひずみゲージ出力の測定回路

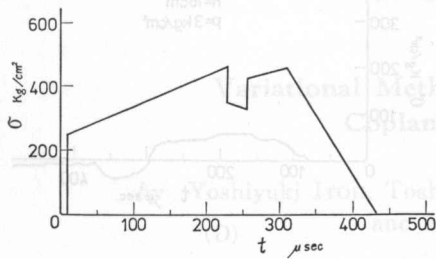
Fig. 6. Circuit measuring the strain-gage output.



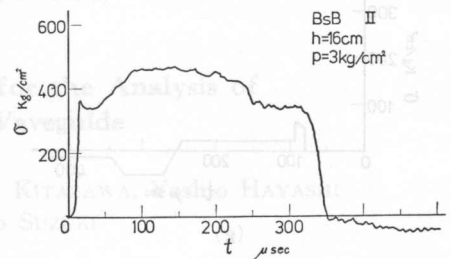
(a)



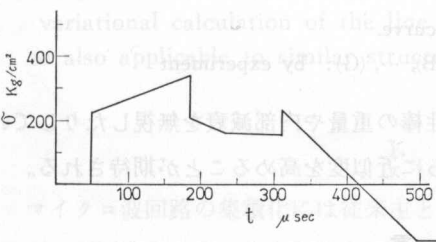
(A)



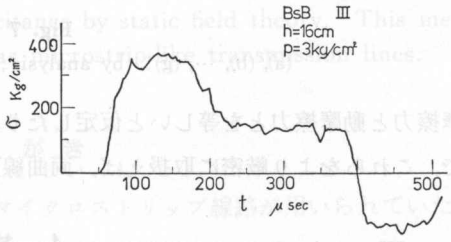
(b)



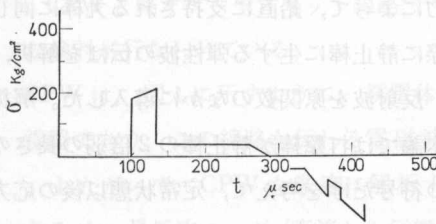
(B)



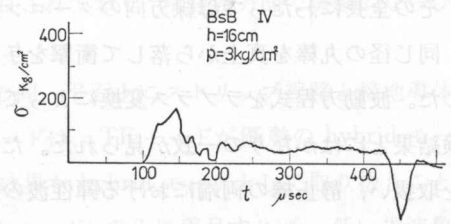
(c)



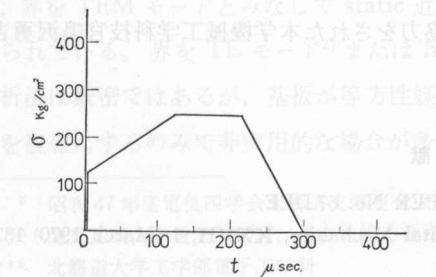
(C)



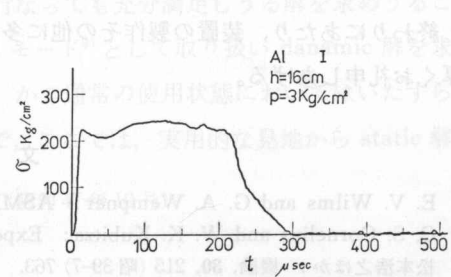
(d)



(D)



(e)



(E)

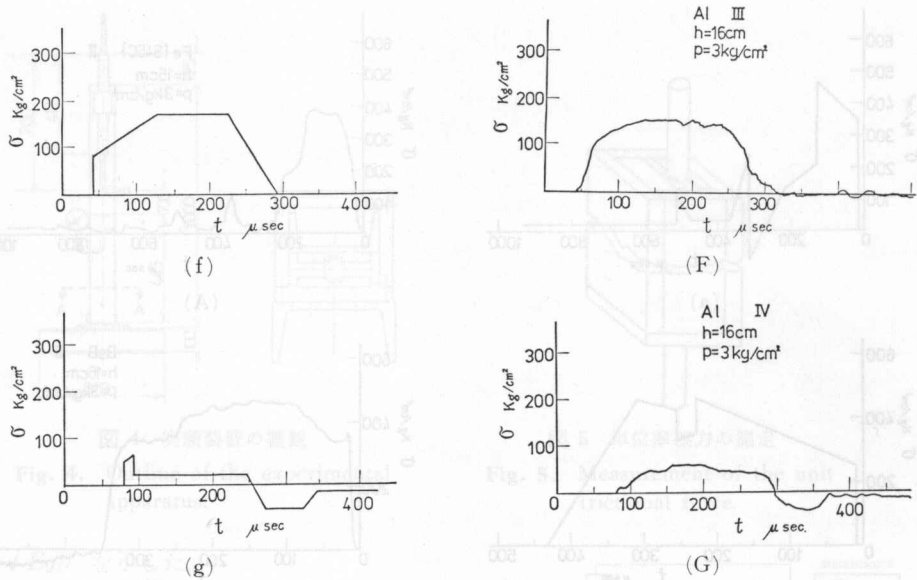


図 7 σ - t 曲線

(a), (b), ..., (g): 解析値; (A), (B), ..., (G): 実験値

Fig. 7 σ - t curve.

(a), (b), ..., (g): by analysis; (A), (B), ..., (G): by experiment

止摩擦力と動摩擦力とを等しいと仮定したり，弾性棒の重量や内部減衰を無視したりしている
ので，これらをより厳密に取扱えば，両曲線がさらに近似度を高めることが期待される。

4. 結 言

その全長にわたって母線方向のクーロン摩擦力によって，鉛直に支持される丸棒と同じ材
質，同じ径の丸棒を真上から落して衝撃を与える際に静止棒に生ずる弾性波の伝ばを解析，実
験した。波動方程式をラプラス変換によって解き，反射波を原関数のなかに導入した。解析と
実験結果とにはかなりの一致が見られた。ただし本論では打撃棒が静止棒の2倍弱の長さの場
合を取扱い，静止棒の両端における弾性波の反射の符号だけを考えて，定常状態以後の応力変
化等を表現したのである。

終わりにあたり，装置の製作その他に多大の協力をされた本学機械工学科技官鳴沢勇吉氏
に厚くお礼申しあげる。

文 献

- 1) E. V. Wilms and G. A. Wempner: ASME PAPER No. 67 DEE.
- 2) C. S. Cornelius and W. K. Kubitz: Experimental Mechanics, **XXVII**, 1 (March 1970) 137.
- 3) 松本浩之ほか: 機論, **30**, 215 (昭39-7) 763.