Bool 環の定義について

磯部熙郎*

(昭和47年9月30日受理)

Some Note of Definitions for Boolean Rings

by Kiro Isobe

G. R. Blakley gave some definitions of commutative rings with unity (See [1].). He tried to formulate associative laws, commutative laws and distributive laws of commutative rings by only one formula and he obtained the following theorem.

Theorem B. *A commutative ring (with unity) is a set with two nullary operations,* 0 *and* 1, *with one unary operations,* $-$, *and two binary operations,* $+$ *and juxtaposition such that*

(1) $r+0=0$

(2) $r1=r$

(3) $((-r)+r)a=0$

(4) $((ay+bx)+cz)r=b(rx)+(a(yr)+z(rc))$

for every a, b, c, r, x, y, z.

S. Tamura applied this theorem to Boolean rings (See [2].). And he obtained the following:

Theorem T. *A set with two nullary operations,* 0 *and* 1, *with two binary operations,* $+$*and juxtaposition such that*

(1) $r+0=r$

(2) $r1=r$

(3) $(r+r)a=0$

(4) $(a+(br+cz))r=(br+ar)+z(cr)$

for any a, b, c, r, z, *is Boolean ring with unity.*

In this short note we shall try to apply the previous theorems to Boolean rings without the unity 1 and we shall get the following result.

Theorem *A set R with a nullary operation,* 0, *and two binary operations,* $+$*and juxtaposition such that*

(1) $r+0=r$

(2) *to every two elements* $a, b\in$R, *there exists* $e(a, b)\in$R *such that* $ae(a, b)=a$ and $be(a, b)=b$.

(3) $(ab)c=b(ac)$

---

* 北見工業大学一般教育等

(4) $(r+r)a=0$

(5) $(a+(br+c))r=(br+ar)+cr$

for every $a, b, c, r \in \mathrm{R}$, *is Boolean ring.*

まえがき

C. R. Blakley は [1] で単位元をもつ可換環の定義について，加法・乗法の結合法則，交換法則や分配法則を一つの式にまとめて表現する試みを行なった。また田村三郎は [2] で C. R. Blakley の着想を単位元をもつ Bool 環に応用して，その簡単な定義を導いた。

集合 R に 0 と 1 で表わされる 2 つの特別な元と任意の $r \in \mathrm{R}$ に対し $-r \in \mathrm{R}$ で表わされる元が対応する対応と演算 $a+b$, ab が定義されているとする。

定理 B (C. R. Blakley)

(1) $r+0=r$

(2) $r1=r$

(3) $((-r)+r)a=0$

(4) $((ay+bx)+cz)r=b(rx)+(a(yr)+z(rc))$

を満足するとき R は単位元をもつ可換環になる。

勿論 R が単位元をもつ可換環ならば (1), (2), (3), (4) を満足することは明らかである。

定理 T (田村三郎)

(1) $r+0=r$

(2) $r1=r$

(3) $(r+r)a=0$

(4) $(a+(br+cz))r=(br+ar)+z(cr)$

を満足するとき R は単位元をもつ Bool 環になる。

勿論 R が単位元をもつ Bool 環ならば (1), (2), (3), (4) を満足することは明らかである。

この小論では R に 1 の存在を仮定しないとき，つまり単位元をもたない Bool 環についてこのような着想による定義がどの程度可能であるかを論じている。

得られた結果

集合 R に 0 で表わされる特別な元が存在し，かつ演算 $a+b$ と ab が定義されているとする。

定理 1

(1) $r+0=r$

(2) R の有限個の元 $a_1, \cdots, a_n$ に対して，元 $e=e(a_1, \cdots, a_n) \in \mathrm{R}$ が存在し，$a_1e=a_1, \cdots, a_ne=a_n$ が成立する。

(3) $(r+r)\,a = 0$

(4) $(a+(br+cz))\,r = (br+ar)+z(cr)$

を満足するとき R は Bool 環である。

勿論 R が Bool 環ならば (1), (2), (3), (4) を満足することは明らかである。

定理 1 は定理 T で 1 を使うかわりに $e(a_1, \cdots, a_n)$ を使うのであるから木質的には定理 T とかわらないが，定理 T を理解するために証明を与える。

(証　明)

(5) $r+r = (r+r)\,e(r+r) = 0$

(6) $0a = (0+0)\,a = 0$

$e = e(a, b, a+b)$ とおいて，

(7) $$\begin{aligned} a+b &= (a+(be+00))\,e \\ &= (be+ae)+0(0e) \\ &= b+a \end{aligned}$$

$e=e(c, cz)$ とおいて

(8) $$\begin{aligned} cz &= (0+(0e+cz))\,e \\ &= (0e+0e)+z(ce) \\ &= zc \end{aligned}$$

$e = e(a, b, c, a+(b+c))$ とおいて，

(9) $$\begin{aligned} a+(b+c) &= (a+(be+ce))\,e \\ &= (be+ae)+e(ce) \\ &= (a+b)+c \end{aligned}$$

(10) $$\begin{aligned} (zc)\,r = (cz)\,r &= (0+(0r+cz))\,r \\ &= z(cr) \end{aligned}$$

(11) $$\begin{aligned} (a+c)\,r &= (a+(0r+ce(c))\,r \\ &= (0r+ar)+e(c)\,(cr) \\ &= ar+cr \end{aligned}$$

(12) $$\begin{aligned} rr &= (0+(e(r)\,r+00)\,r \\ &= (e(r)\,r+0r)+0(0r) \\ &= r \end{aligned}$$

(13) 任意の $a, b \in \mathrm{R}$ に対して $a+(a+b)=b$

(証 明 終)

補　題

(1) 任意の２つの元 $a, b \in \mathrm{R}$ に対して，$e(a, b) \in \mathrm{R}$ が存在して，$ae(a, b)=a$，$be(a, b)=b$ が成立する。

(2) $(ab)c=a(bc)$

を満足するとき定理１の (2) は成立する。

(証明) $n-1$ 個の $a_1, \cdots, a_{n-1} \in \mathrm{R}$ に対して $e(a_1, \cdots, a_{n-1})=e_0 \in \mathrm{R}$ が存在し，$a_1e_0=a_1, \cdots, a_{n-1}e_0=a_{n-1}$ が成立することを仮定すれば，$a_1, \cdots, a_n \in \mathrm{R}$ に対しては $e(a_n, e_0)=e$ とおいて，

$$a_i e=(a_i e_0)e=a_i(e_0 e)=a_i e_0=a_i \qquad (i=1, \cdots, n-1)$$

$$a_n e=a_n$$

(証明終)

定理 2

(1) $r+0=r$

(2) 任意の２つの元 $a, b \in \mathrm{R}$ に対して，$e(a, b) \in \mathrm{R}$ が存在し，$ae(a, b)=a$，$be(a, b)=b$ が成立する。

(3) $(ab)c=b(ac)$

(4) $(r+r)a=0$

(5) $(a+(br+c))r=(br+ar)+cr$

を満足するとき R は Bool 環になる。

勿論 R が Bool 環ならば (1), (2), (3), (4), (5) を満足する。

(証明) 定理１の証明と同様に

(6) $r+r=0$

(7) $0a=0$

$e=e(a, ab)$ とおいて

(8) $ab=(ab)e=b(ae)=ba$

(9) $(ab)c=(ba)c=a(bc)$

したがって補題から

(10) 定理１の (2) を満足する。

$e=e(a, b, a+b)$ とおいて

(11) $a+b=(a+(be+0))e$

$=(be+ae)+0e$

$=b+a$

(12) $rr=(0+(e(r)r+0))r$

$$= (e(r)\,r+0r)+0r = r$$

$e=e(a, b, c, a+(b+c))$ とおいて,

(13) $a+(b+c) = (a+(be+c))\,e$

$$= (be+ae)+ce$$

$$= (a+b)+c$$

(14) $(a+c)\,r = (a+(0r+c))\,r$

$$= (0r+ar)+cr = ar+cr$$

(15) 任意の $a, b \in \mathrm{R}$ に対して

$$a+(a+b) = b$$

(証 明 終)

参 考 文 献

1) J. R. Blakley: Four axioms for commutative rings, Notice of Amer. Math. Soc., 15, p. 730 (1968).

2) S. Tamura: Axioms for Boolean Rings. Proc. Japan Acad., 46, p. 121–123 (1970).