

平面壁上に付着する半円筒のまわりの流れに関する研究 (第 1 報)
 — 抗力に関する理論解析 —

坂本 弘志*

森谷 優*

(昭和 47 年 9 月 26 日受理)

A Study on the Flow around a Semi-Circular Cylinder
 Placed on a Plane Wall (Part I)

— Theoretical analysis of the form drag —

by Hirosi SAKAMOTO and Masaru MORIYA

This study intends to perform successively theoretical and experimental investigations about the flow around a semi-circular cylinder placed on a plane wall. The main purpose of the investigation is to relate the form drag of the semi-circular cylinder to the characteristics of the smooth-wall boundary layer on the plane wall which the semi-circular cylinder is placed. This report describes the pressure distributions and the form drag of the semi-circular cylinder with the aid of the theory proposed by the authors. This theory treats about two-dimensional incompressible potential flow and includes the assumptions derived from two empirical facts in order to construct the theoretical model. The first assumption is that the upstream flow of the semi-circular cylinder will be separated by force from the plane wall and will be reattached to the surface of the semi-circular cylinder. Consequently the maximum pressure on the surface will become the stagnation pressure. The second assumption is that the time-averaged base pressure over the body surface exposed to the wake will be nearly constant. The pressure distributions on the surface of the semi-circular cylinder obtained by the application of the present theory are in close agreement with the experimental data.

1. 緒論

壁面から突起した物体をよぎる流れは、例えば地表面に建てられた構造物周辺の流れ、防風、防砂林を越す流れ、あるいは航空機の翼に見られるスパイラーなど自然界においても工学的においてもよく見られる現象である。このような流れにおいては、物体は、壁面に発達する境界層(一般に乱流境界層)の中に存在し、かつ物体の上流側および下流側に拘束された渦を

* 北見工業大学機械工学科

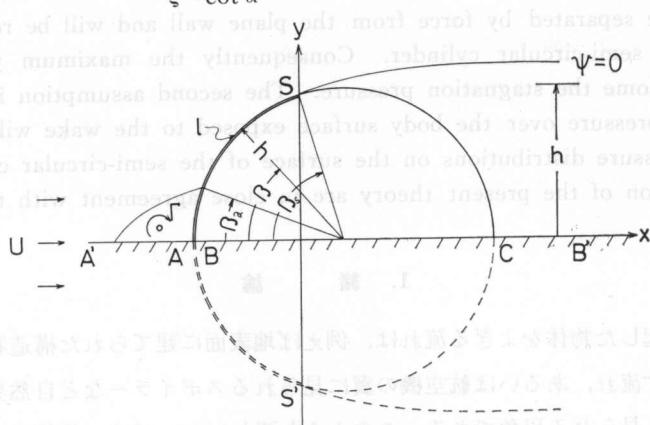
形成するという点で共通の性質を有しており、一様流れに置かれた物体周辺の流れとはかなり異なる特性をもっている。しかし一様流中の物体周辺の流れの場合にくらべ、この壁面上に存在する物体周辺の流れについては十分な研究がなされているとはいえない。有江、木谷^{1),2)} および Good & Jourbert³⁾ は圧力勾配のない標準的な乱流境界層の中に置かれた矩形柱および平板表面上の圧力分布、抗力などに関して研究を行なっており、著者もまた乱流境界層の中に置かれた物体に関して一連の研究を進めており、これまで単独⁴⁾ および二枚^{5),6)} の直立平板の圧力分布、抗力、平均流線図などについて報告してきた。

本研究もまた壁面に付着する種々の物体の形状の一つに属する、表面上が円形状をなす半円筒を乱流境界層の中に置き、その表面上の圧力分布、抗力および流れ模様などについて調べようとするものであって、本報では、まず自由流線理論を適用して解析を行なった半円筒表面上の圧力分布および抗力について報告するものである。

2. 理論解析

半円筒表面上の圧力分布および抗力を理論的に求めるために図1に示す ζ -平面において、渦および吹出しと吸込みとを有する円筒のまわりの流れを考え、等角写像によって物理平面 z における高さ h なる半円筒のまわりの流れに帰納させるものとする。今 ζ -平面の半径 R の円筒をよぎる速度 V なる一様流に、原点に強さ $2Q$ の吸込みと $Re^{\pm i\theta s}$ に強さ $2Q$ の吹出しおよび $\rho_v e^{\pm i\theta v}$ に循環 Γ の渦を組合せた流れを考える。この ζ -平面上の $Re^{\pm i\theta s}$ の位置における吹出しを等角写像法によって物理平面 z に写像すると、半円筒の表面上の S 点から離する自由流線が形成することになる。図2の円筒表面 c を図1の円弧 l に写像する関数は次式で与えられる。

$$z = f(\zeta) = \frac{1}{\zeta - \cot \alpha} \quad (1)$$



Z-Plane

図1 物理平面

Fig. 1. The physical plane.

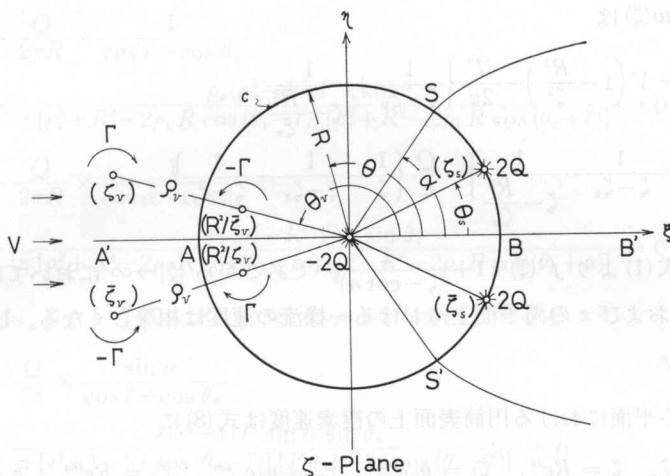


図 2 写像平面
Fig. 2. The mapping plane.

ここで ζ -平面における円筒の半径を

$$R = \operatorname{cosec} \alpha \quad (2)$$

とする。また円弧の径は

$$h = 2 \operatorname{cosec} \beta_s \quad (3)$$

となる。一方、 ζ -平面におけるよどみ点を示す角度 α と z -平面におけるはく離角度 β_s との間にはつぎの関係式が成立する⁷⁾。

$$\alpha = \frac{1}{2}(\pi - \beta_s) \quad (4)$$

さらに、式(1)に $\zeta = Re^{i\theta}$, $z = he^{i\beta}$ を代入すると、 z および ζ -平面の任意の角度 β と θ の間には

$$\sin \beta = \cos \alpha \sin \theta \left\{ \frac{2 - 2 \cos \theta \cos \alpha}{1 - 2 \cos \theta \cos \alpha + \cos^2 \alpha} \right\} \quad (5)$$

の関係が成立する。また、 z -平面と ζ -平面との相対応する点における複素速度 $w(z)$ と $w(\zeta)$ の間には、つぎの関係式が成立する。

$$w(z) = \frac{w(\zeta)}{f'(\zeta)} \quad (6)$$

一方、 ζ -平面において図2に示す渦および吹出しと吸込みとを有する円筒のまわりの流れを表わす複素ポテンシャル関数⁸⁾はつぎのようになる。

$$F(\zeta) = V \left(\zeta + \frac{R^2}{\zeta} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \left\{ \frac{(\zeta - \bar{\zeta}_v) \left(\zeta - \frac{R^2}{\bar{\zeta}_v} \right)}{(\zeta - \bar{\zeta}_s) \left(\zeta - \frac{R^2}{\bar{\zeta}_s} \right)} \right\} - \frac{Q}{\pi} \ln \left\{ \frac{\zeta}{(\zeta - \bar{\zeta}_s)(\zeta - \bar{\zeta}_v)} \right\} \quad (7)$$

また、複素速度 $w(\zeta)$ はの性質を有しており。 ζ -様流れに置かれた物体周辺の流れとはかなり異なる特性がある。

$$w(\zeta) = V \left(1 - \frac{R^2}{\zeta^2} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\zeta - \zeta_v} + \frac{1}{\zeta - \bar{\zeta}_v^2} \right\} - \frac{Q}{\pi} \left\{ \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\zeta - \zeta_s} - \frac{1}{\zeta - \bar{\zeta}_s^2} \right\} \quad (8)$$

となる。ここで式(1)より $f'(\zeta) = 1 + \frac{1}{(\zeta - \cot \alpha)^2}$ であるから $|\zeta| \rightarrow \infty$ においては $f'(\zeta) = 1$ となり、式(6)から ζ および $\bar{\zeta}$ の両平面上における一様流の速度は相等しくなる。したがって

$$U = V \quad (9)$$

となる。つぎに ζ -平面における円筒表面上の複素速度は式(8)に

$$V = U, \quad \zeta = Re^{i\theta}, \quad \zeta_v = \rho_v e^{i\theta v}, \quad \bar{\zeta}_v = \rho_v e^{-i\theta v}, \quad \zeta_s = Re^{i\theta s}, \quad \bar{\zeta} = Re^{-i\theta s}$$

なる関係式を代入すると

$$\begin{aligned} w(\zeta) &= U \left(1 - \frac{1}{e^{2i\theta}} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \left\{ \frac{1}{Re^{i\theta} - \rho_v e^{-i\theta v}} - \frac{1}{Re^{i\theta} - \frac{R^2}{\rho_v} e^{i\theta v}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{Re^{i\theta} - \rho_v e^{i\theta v}} - \frac{1}{Re^{i\theta} - \frac{R^2}{\rho_v} e^{-i\theta v}} \right\} - \frac{Q}{\pi} \left\{ \frac{1}{Re^{i\theta}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{Re^{i\theta} - Re^{i\theta s}} - \frac{1}{Re^{i\theta} - Re^{-i\theta s}} \right\} \\ &= 2ie^{-i\theta} \left\{ U \sin \theta + \frac{Q}{2\pi R} \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta - \cos \theta_s} \right) \right\} - \frac{2ie^{-i\theta} \rho_v (\rho_v^2 - R^2) \Gamma}{\pi} \\ &\quad \times \left\{ \frac{\sin \theta_v \cdot \sin \theta}{[\rho_v^2 + R^2 - 2\rho_v R \cos(\theta_v - \theta)][\rho_v^2 + R^2 - 2\rho_v R \cos(\theta_v + \theta)]} \right\} \quad (10) \end{aligned}$$

となる。さらに $|w(\zeta)|/U$ を求めると

$$\begin{aligned} (10)' \quad \frac{|w(\zeta)|}{U} &= 2 \left\{ \sin \theta + \frac{2\pi R}{Q} \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta - \cos \theta_s} \right) \right\} - \frac{2\rho_v (\rho_v^2 - R^2) \Gamma}{\pi} \\ &\quad \times \left\{ \frac{\sin \theta_v \cdot \sin \theta}{[\rho_v^2 + R^2 - 2\rho_v R \cos(\theta_v - \theta)][\rho_v^2 + R^2 - 2\rho_v R \cos(\theta_v + \theta)]} \right\} \quad (10)' \end{aligned}$$

となる。一方、循環 Γ と吹出しの強さ Q はつぎの方法で決定することができる。すなわち円筒前面に存在する渦は流線関数 $\psi = 0$ を境界とする閉じた領域内に存在し、かつ円筒前方ではなく離した流線は円筒表面上の $Re^{i\gamma}$ なる点に付着するものとすると、その点はよどみ点となり、

$$w(\zeta)|_{\theta=\gamma} = 0 \quad (11)$$

なる関係式が成立する。また円筒表面の吹出し点から流出する上流方向への流れは、円筒表面上の $Re^{i\alpha}$ なる位置によどみ点を形成し、その点においては速度は零となる。したがって

$$w(\zeta)|_{\theta=\alpha} = 0 \quad (12)$$

なる関係式が成立する。ここで式(11)および(12)に式(10)'を代入すると

$$(13) \quad U + \frac{Q}{2\pi R} \times \frac{1}{\cos \gamma - \cos \theta_s} - \frac{\rho_v (\rho_v^2 - R^2) \Gamma \times \sin \theta_v}{\pi [\rho_v^2 + R^2 - 2\rho_v R \cos(\theta_v - \gamma)] [\rho_v^2 + R^2 - 2\rho_v R \cos(\theta_v + \gamma)]} = 0$$

$$(14) \quad U + \frac{Q}{2\pi R} \times \frac{1}{\cos \alpha - \cos \theta_s} - \frac{\rho_v (\rho_v^2 - R^2) \Gamma \times \sin \theta_v}{\pi [\rho_v^2 + R^2 - 2\rho_v R \cos(\theta_v - \alpha)] [\rho_v^2 + R^2 - 2\rho_v R \cos(\theta_v + \alpha)]} = 0$$

となる。さらに、これらの式に $R = \operatorname{cosec} \alpha$, $\rho_v = \lambda R$ を代入すると

$$(13)' \quad U + \frac{Q}{2\pi} \times \frac{\sin \alpha}{\cos \gamma - \cos \theta_s} - \frac{\lambda(\lambda^2 - 1) \Gamma \sin \alpha \sin \theta_v}{\pi [\lambda^2 + 1 - 2\lambda \cos(\theta_v - \gamma)] [\lambda^2 + 1 - 2\lambda \cos(\theta_v + \gamma)]} = 0$$

$$(14)' \quad U + \frac{Q}{2\pi} \times \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha - \cos \theta_s} - \frac{\lambda(\lambda^2 - 1) \Gamma \sin \alpha \sin \theta_v}{\pi [\lambda^2 + 1 - 2\lambda \cos(\theta_v - \alpha)] [\lambda^2 + 1 - 2\lambda \cos(\theta_v + \alpha)]} = 0$$

となる。ここで

$$a = [\lambda^2 + 1 - 2\lambda \cos(\theta_v - \alpha)] [\lambda^2 + 1 - 2\lambda \cos(\theta_v + \alpha)]$$

$$b = [\lambda^2 + 1 - 2\lambda \cos(\theta_v - \gamma)] [\lambda^2 + 1 - 2\lambda \cos(\theta_v + \gamma)]$$

とし、式(13)', (14)' から Q および Γ を求めると

$$\left. \begin{aligned} Q &= \frac{2\pi U (a - b) (\cos \alpha - \cos \theta_s) (\cos \gamma - \cos \theta_s)}{\sin \alpha [(a - b) \cos \theta_s + b \cos \alpha - a \cos \gamma]} \\ \Gamma &= \frac{\pi U ab (\cos \alpha - \cos \gamma)}{\lambda(\lambda^2 - 1) \sin \alpha \sin \theta_v ((a - b) \cos \theta_s + b \cos \alpha - a \cos \gamma)} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

となる。

また、吹出しの位置を示す角度 θ_s は、はく離した部分における半円筒表面上の圧力は一定であり、かつはく離点 S における圧力はそれに等しいものとすれば、はく離した部分の半円筒表面上の実測した圧力を与えることによって決定される。すなわち、 z -平面において、半円筒から十分上流の位置における圧力 p_∞ 、速度 U を基準として、半円筒表面上の圧力 p 、速度 $|w(z)|$ に対して Bernoulli の定理を適用すると

$$p + \frac{1}{2} \rho |w(z)|^2 = p_\infty + \frac{1}{2} \rho U^2$$

または

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho U^2} = 1 - \frac{|w(z)|^2}{U^2} \quad (16)$$

となる。したがってはく離した部分における半円筒表面上の圧力係数を C_{pb} とすると、はく離点 S において式(16)からつぎの関係式が成立する。

$$\left| \frac{w(z)}{U} \right|_s = (1 - C_{pb})^{\frac{1}{2}} = k \quad (17)$$

また、 z -平面における複素速度は式(6)から $w(z) = w(\zeta)/f'(\zeta)$ によって与えられるから

$$\left| \frac{w(z)}{U} \right|_s = \frac{1}{|f'(\zeta)|} \times \left| \frac{w(\zeta)}{U} \right|_s \quad (18)$$

となる。式(18)の右辺において、まず式(1)から $f'(\zeta)$ を求める

$$f'(\zeta) = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{(e^{i\theta} - \cos \alpha)^2}$$

となり、さらに $|f'(\zeta)|$ は

$$|f'(\zeta)| = \frac{2(\cos \alpha - \cos \theta)}{1 - 2 \cos \alpha \cos \theta + \cos^2 \alpha} \quad (19)$$

となる。したがって円筒表面上のよどみ点 S においては $|f'(\zeta)| = 0$ となる。また、 $|w(\zeta)|$ もよどみ点 S においては零であるから式(18)の右辺は不定形となるので R'Hospital の定理を適用すると式(18)は

$$\left| \frac{w(z)}{U} \right|_s = \frac{1}{\frac{d}{d\theta} |f'(\zeta)|} \times \left| \frac{\frac{d}{d\theta} |w(\zeta)|}{U} \right|_s \quad (20)$$

となり、式(20)における右辺の項 $\frac{d}{d\theta} \left(\frac{|w(\zeta)|}{U} \right)$ および $\frac{d}{d\theta} |f'(\zeta)|$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} |f'(\zeta)| &= \frac{2}{\sin \alpha} \\ \frac{d}{d\theta} \left(\frac{|w(\zeta)|}{U} \right) &= 2 \sin^2 \alpha \\ &\times \left\{ \frac{(a-b)(\cos \gamma - \cos \theta_s)}{[(a-b)\cos \theta_s + b \cos \alpha - a \cos \gamma](\cos \alpha - \cos \theta_s)} \right. \\ &\left. - \frac{4\lambda b (\cos \gamma - \cos \alpha)[(\lambda^2 + 1) \cos \theta_v - 2\lambda \cos \alpha]}{a [(a-b)\cos \theta_s + b \cos \alpha - a \cos \gamma]} \right\} \end{aligned}$$

となり、 z -平面の半円筒表面上の S 点における複素速度を定めることができる。したがって式(17)と式(20)から複素速度 $\left| \frac{w(z)}{U} \right|_s$ を求めると

$$\begin{aligned} \left| \frac{w(z)}{U} \right|_s &= \frac{\frac{d}{d\theta} \left(\frac{|w(\zeta)|}{U} \right)}{\frac{d}{d\theta} |f'(\zeta)|} \\ &= \sin^3 \alpha \left\{ \frac{(a-b)(\cos \gamma - \cos \theta_s)}{[(a-b)\cos \theta_s + b \cos \alpha - a \cos \gamma](\cos \alpha - \cos \theta_s)} \right. \\ &\left. - \frac{4\lambda b (\cos \gamma - \cos \alpha)[(\lambda^2 + 1) \cos \theta_v - 2\lambda \cos \alpha]}{a [(a-b)\cos \theta_s + b \cos \alpha - a \cos \gamma]} \right\} = k \end{aligned}$$

となる。したがって上式から $\cos \theta_s$ を求めると

$$\cos \theta_s = \frac{\nu - \sqrt{\nu^2 - 4\mu\lambda}}{2\mu} \quad (21)$$

となって吹出しの位置が決定されることになる。ここで

$$\mu = a(a-b)$$

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{\sin^3 \alpha}{k} \left\{ a(a-b) + 4\lambda b (\cos \alpha - \cos \gamma) [(\lambda^2 + 1) \cos \theta_v - 2\lambda \cos \alpha] \right\} \\ &\quad - \left\{ a(b \cos \alpha - a \cos \gamma) - a(a-b) \cos \alpha \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\sin^3 \alpha}{k} \left\{ a(a-b) \cos \gamma + 4\lambda b \cos \alpha (\cos \alpha - \cos \gamma) [(\lambda^2 + 1) \right. \\ &\quad \left. \cos \theta_v - 2\lambda \cos \alpha] \right\} - a(b \cos \alpha - a \cos \gamma) \cos \alpha \end{aligned}$$

とする。

3. 半円筒表面上の圧力分布および抗力

z -平面における半円筒表面上に作用する圧力を一様流 U を用いて無次元化した圧力係数 C_p は式(16)から

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho U^2} = 1 - \frac{|w(z)|^2}{U^2}$$

である。ここで $|w(z)| = |w(\zeta)| / |f'(\zeta)|$ の関係が成立するので、式(10)' および(19)に示される $|w(\zeta)|$ と $|f'(\zeta)|$ の値を用いて $|w(z)|/U$ を求めると

$$\begin{aligned} \frac{|w(z)|}{U} &= \frac{1 - 2 \cos \alpha \cos \theta + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha - \cos \theta} \left\{ \sin \theta \right. \\ &\quad + \frac{(a-b)(\cos \alpha - \cos \theta_s)(\cos \gamma - \cos \theta_s) \sin \theta}{[(a-b) \cos \theta_s + b \cos \alpha - a \cos \gamma] (\cos \theta - \cos \theta_s)} \\ &\quad - \frac{ab (\cos \alpha - \cos \gamma) \sin \theta}{[(a-b) \cos \theta_s + b \cos \alpha - a \cos \gamma] [\lambda^2 + 1 - 2\lambda \cos(\theta_v - \theta)] [\lambda^2 + 1 - 2\lambda \cos(\theta_v + \theta)]} \left. \right\} \quad (22) \end{aligned}$$

となる。したがって圧力係数 C_p は

$$\begin{aligned} C_p &= 1 - \left[\frac{1 - 2 \cos \alpha \cos \theta + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha - \cos \theta} \left\{ \sin \theta \right. \right. \\ &\quad + \frac{(a-b)(\cos \alpha - \cos \theta_s)(\cos \gamma - \cos \theta_s) \sin \theta}{[(a-b) \cos \theta_s + b \cos \alpha - a \cos \gamma] (\cos \theta - \cos \theta_s)} \\ &\quad - \left. \frac{ab (\cos \alpha - \cos \gamma) \sin \theta}{[(a-b) \cos \theta_s + b \cos \alpha - a \cos \gamma] [\lambda^2 + 1 - 2\lambda \cos(\theta_v + \theta)] [\lambda^2 + 1 - 2\lambda \cos(\theta_v - \theta)]} \right\}^2 \left. \right] \quad (23) \end{aligned}$$

となる。

また、半円筒に作用する形状抵抗 D は、半円筒の高さを h とすると次式で示される。

$$D = \int_A (p - p_\infty) \cos \beta dA = \int_0^\pi (p - p_\infty) \cos \beta h dh \quad (24)$$

図3 圧力分布の理論値と実験値との比較
($Re=9.35 \times 10^3$)

Fig. 3. Comparison between the theoretical values and the experimental values of pressure distribution.
($Re=9.35 \times 10^3$)

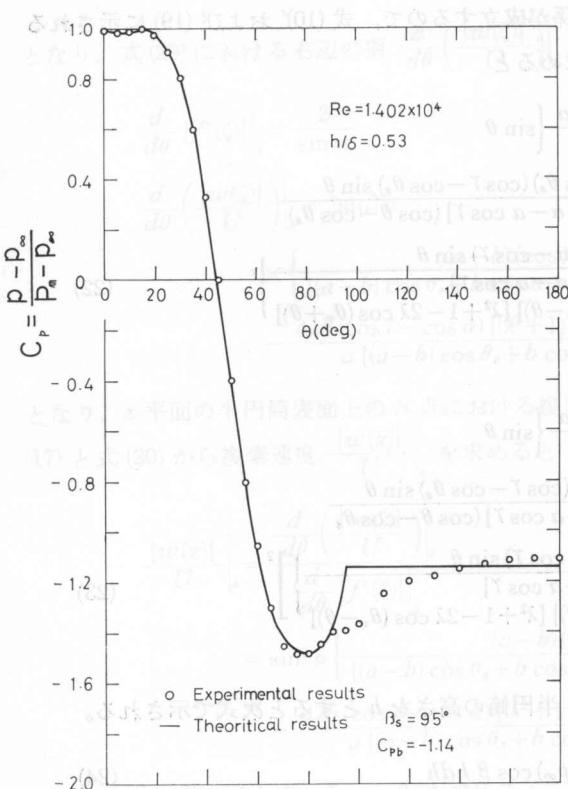
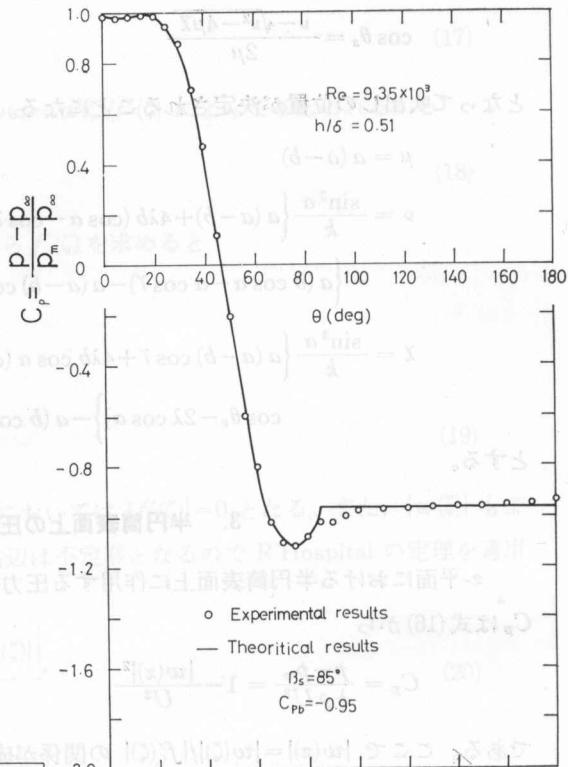


図4 圧力分布の理論値と実験値との比較
($Re=1.402 \times 10^4$)

Fig. 4. Comparison between the theoretical values and the experimental values of pressure distribution.
($Re=1.402 \times 10^4$)

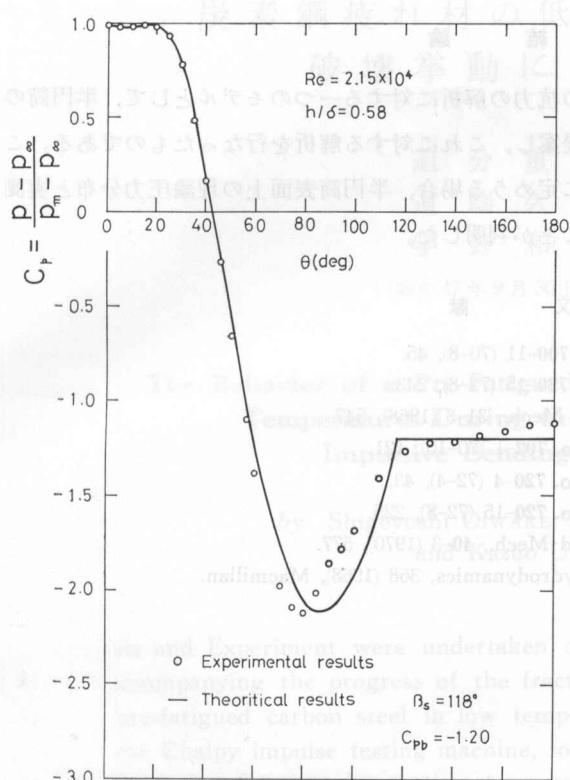


図 5 圧力分布の理論値と実験値との比較
($Re=2.15 \times 10^4$)

Fig. 5. Comparison between the theoretical values and the experimental values of pressure distribution.
($Re=2.15 \times 10^4$)

さらに一様流 U を用いて無次元化した抗力係数 C_D は

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho U^2 A} = \int_0^\pi C_p \cos \beta d\beta \quad (25)$$

で与えられる。

以上で平面壁上に付着する半円筒表面上の圧力および抗力が式(23)と(24)によって算定されることとなるが、ここで半円筒前方に生ずる渦の位置をいかにして決定するかが問題となる。現在のところ理論的に与えることはできない。しかし、一つの試みとして半円筒前面の実測した圧力分布の形状を検討すると、 $\beta=5^\circ \sim 6^\circ$ 附近に圧力の極小値が現われる。したがって、この極小値を示す附近に渦の中心が存在するものと仮定すると、この極小値を示す圧力とその位置とを与えることによって、渦の位置を定めることができる。図3は再付着点を $\beta_a=16^\circ$ 、はく離点 $\beta_s=85^\circ$ 、背圧 $C_{pb}=-0.950$ として、式(23)によって算定した半円筒表面上の圧力分布を示したものであり、図4、図5もまた同様にして得られた圧力分布であるが、いずれの理論圧力分布も実測値と比較的よく一致を示していることがわかる。また図3に示される圧力分布を基にして式(25)を用いることによって得られた抗力係数は0.635となって、実測値0.632とほぼ一致を示し、図4、図5に示される場合の抗力係数も同様に実測値と比較的よく一致することが判明した。

4. 結論

本研究は平面壁上に付着する半円筒の抗力の解析に対する一つのモデルとして、半円筒の前面にはく離渦を伴う自由流線モデルを提案し、これに対する解析を行なったものである。このモデルは、理論に含まれる定数を適切に定めうる場合、半円筒表面上の理論圧力分布と実測値とは比較的よく一致する結果を与えることが判明した。

文 献

- 1) 有江ほか 3 名： 機械学会講演論文集, No. 700-11 (70-8), 45.
- 2) 有江ほか 3 名： 機械学会講演論文集, No. 720-15 (72-8), 243.
- 3) M. C. Good & P. N. Joubert: J. Fluid Mech., 31-3 (1968), 547.
- 4) 坂本・森谷・有江： 機械学会講演論文集, No. 702-1 (70-10), 121.
- 5) 坂本・森谷・有江： 機械学会講演論文集, No. 720-4 (72-4), 43.
- 6) 坂本・森谷・有江： 機械学会講演論文集, No. 720-15 (72-8), 225.
- 7) G. V. Parkinson & T. Jandali: J. Fluid Mech., 40-3 (1970), 577.
- 8) L. M. Milne-Thomson: Theoretical Hydrodynamics, 368 (1968), Macmillan.