ベクトル空間の Positive Cone についての一考察

礒　部　熙　郎

(昭和47年4月15日受理)

A Note of Positive Cone in Vector Spaces

by Kiro Isobe

Let E be a real vector space. A positive cone in E is a non-void subset P such that

1) $P+P\subset P$,
2) $\alpha P\subset P$ whenever α is a non-negative scalar,
3) $a,\ -a\in P$ implies $a=0$,
4) $E=\{x-y:\ x,\ y\in P\}$.

If E is an ordered vector space, then $E^{+}=\{x:\ x\in E,\ x\geqq 0\}$ is a positive cone. In this note is discussed the introduction of a positive cone in E and the expansion of a positive cone.

はじめに

Eを実ベクトル空間とする。Eの部分集合Pがつぎの条件：

1) $P\ni a,\ b\Rightarrow a+b\in P$.

2) $P\ni a,\ \alpha\geqq 0\Rightarrow \alpha a\in P$.

3) $P\ni a,-a\ \Rightarrow a=0$.

4) $E=\{x-y:\ \ x,\ y\in P\}$.

を満足するとき，Pを **positive cone** と呼ぶことにする。Eが順序ベクトル空間ならば

$$E^{+}=\{x:\ \ x\in E,\ x\geqq 0\}$$

は positive cone である。この小論では，Eに positive cone を導入する問題とEに positive cone があるとき，それを拡張する問題が論じられている。

§1. Hamel base からつくられた positive cone とその拡張

(i) 任意のベクトル空間 E に positive cone をつくることができる。

証明　Eの Hamel base[1] の一つをHとする。Hの有限個の要素の非負なスカラーをもつ一次結合の全体をP_Hとすれば，P_Hは明らかに positive cone の条件を満足する。P_Hを

1) 任意の有限個の要素が一次独立である極大な集合。

Hamel base H から生成された Positive cone と呼ぶことにする。(証終)

P_H を E^+ とする順序ベクトル空間 E が得られるが，このようにして得られる順序ベクトル空間は明らかに Archimedean なベクトル束である。

E の次元が2よりも大きいとき，E の Hamel base H には一次独立な要素 a, b が存在する。$c=a-b$, $H'=(H\backslash\{a\})\cup\{c\}$ とおけば，

(ii) **H' は E の Hamel base である。**

証明　H' の有限個の相異なる要素 $a_1, \cdots, a_n$ はその中に c を含まなければ明らかに一次独立である。その中に c を含めば，一般性を失うことなく $a_1=c$ として，$a_2, \cdots, a_n$ の中に b を含まなければ

$$\lambda_1 c+\lambda_2 a_2+\cdots+\lambda_n a_n = \lambda_1 a-\lambda_1 b+\lambda_2 a_2+\cdots+\lambda_n a_n = 0$$

とおくとき $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$ が得られるから，$a_1, \cdots, a_n$ は一次独立である。また $a_2, \cdots, a_n$ の中に b を含めば，一般性を失うことなく $a_2=b$ として，

$$\lambda_1 c+\lambda_2 b+\lambda_3 a_3+\cdots+\lambda_n a_n = \lambda_1 a+(\lambda_2-\lambda_1) b+\lambda_3 a_3+\cdots+\lambda_n a_n = 0$$

とおくとき，$\lambda_1=\lambda_2-\lambda_1=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=0$, $\lambda_2=0$ となるから，$a_1, \cdots, a_n$ は一次独立である。

また H の極大から H' の極大性は明らかである。(証終)

このように Hamel base H から Hamel base H' をつくるとき

(iii) **$P_H \subsetneqq P_{H'}$.**

証明　$a=b+c$ だから，$P_H \subset P_{H'}$ は明らかである。しかも $P_H \not\ni a-b=c \in P_{H'}$ より $P_H \subsetneqq P_{H'}$ (証終)

(iv) **E の次元が2より大きいときには，E の Hamel base H の要素は P_H の internal point[2] にはなりえない。**

証明　任意の $a \in H$ に対し，a と一次独立な $b \in H$ が存在し，$a+\lambda(a-b)=(1+\lambda)a-\lambda b \notin P_H$ $(\lambda>0)$ であるから a は P_H の internal point にはなりえない。(証終)

§ 2.　positive cone の拡張。極大 positive cone

(v) **P を positive cone とし，$a, -a \notin P$ なる a が存在するとき，a, P を含む positive cone をつくることができる。**

証明　$P \cup \{a\}=K$ とおき，K の有限個の要素の非負なスカラーをもつ一次結合の全体を Q とする。Q は明らかに 1), 2), 4) を満足する。

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i, \qquad \lambda_i>0, \qquad a_i \in K \qquad (i=1, \cdots, n)$$

2)　点 a が集合 A の internal point であるとは，任意の $x \in E$ に対して，適当な $\delta>0$ が存在し，$|\lambda| \leqq \delta$ ならば $a+\lambda x \in A$ が成立すること。

$$-x=\sum_{j=1}^{m}\mu_j b_j,\qquad \mu_j>0,\qquad b_j\in K\qquad (j=1,\cdots,m)$$

とすれば，

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i+\sum_{j=1}^{m}\mu_j b_j=0.$$

$a_i(i=1,\cdots,n)$, $b_j(j=1,\cdots,m)$ の中に a が含まれていれば，$-a\in P$ となり矛盾する。したがって，a_i, $b_j\in P(i=1,\cdots,n,\ j=1,\cdots,m)$ となり，$x=0$，つまりが 3) 得られる。$P^{\cup}\{a\}\subset Q$ は明らかである。(証終)

このとき，

(vi)　a は Q の internal point にはなりえない。

証明　$P\ni b\neq 0$ なる b をとり，$\lambda>0$ に対して，$a+\lambda(a-b)\in Q$ とすれば，

$$a+\lambda(a-b)=(1+\lambda)a-\lambda b=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i$$

$$\lambda_i>0\qquad K\ni a_i\neq 0\qquad (i=1,\cdots,n)$$

とおくことができる。

$$(1+\lambda)a=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i+\lambda b$$

a_i $(i=1,2,\cdots,n)$ の中に a が含まれなければ，$a\in P$ となるから，$a_i(i=1,\cdots,n)$ の中に a が含まれる。一般性を失うことなく $a=a_1$, $a_i\in P(i=2,\cdots,n)$ とおいて，

$$(1+\lambda-\lambda_1)a=\sum_{i=2}^{n}\lambda_i a_i+\lambda b\in P.$$

$a, -a\in P$ より $1+\lambda-\lambda_1=0$, $1+\lambda=\lambda_1$ である。したがって，

$$-\lambda b=\sum_{i=2}^{n}\lambda_i a_i\in P,\qquad -b\in P$$

となり矛盾するから $a+\lambda(a-b)\notin Q$ である。したがって，a が Q の internal point になることはありえない。(証終)

E の positive cone を要素とするある集合 $\mathfrak{P}$ があり，$\mathfrak{P}\ni A$, B に対して $A\supset B$，または，$A\subset B$ が成立するとき，このような $\mathfrak{P}$ で極大なものを考えることができる。いま $\mathfrak{P}$ をこのような極大なものであるとする。つぎのことは明らかである：

(vii)　$P=\bigcup_{A\in\mathfrak{P}}A$ とおけば P は positive cone であり，かつ，極大な positive cone である。

(viii)　positive cone P が極大である必要十分条件は $P=E^{+}$ とする順序ベクトル空間 E が全順序になることである。

証明　必要条件は (v) より明らかである。

(十分条件) E が全順序ベクトル空間であり，$E^{+}\subsetneqq P$ なる positive cone P が存在すれば，

$a\bar{\in}E^+$, $a\in P$ なる a が存在する。$-a\in E^+\subset P$ だから, $a, -a\in P$ となり矛盾。したがって E^+ は極大な positive cone である。(証終)

P が極大 positive cone であるとき $P=E^+$ とする全順序ベクトル空間は, E が一次元でないかぎり Archimedean にはならない。何故ならば Archimedean な全順序ベクトル空間は一次元だからである。したがって, つぎのことがわかる。

(ix) E が一次元である必要十分な条件は任意の positive cone が極大であることである。

証明 必要条件は明らかである。

(十分条件) E の Hamel base の一つを H とし, もし, H に一次独立な要素 a, b が存在すれば, (iii) より P_H は極大な positive cone にならないから条件に反する。したがって E は一次元である。(証終)

最後に, つぎのような事実を指摘する:

(x) あるベクトル空間 E の positive cone P が internal point を一つもたない場合がある。

例 非負実数上の実関数の全体を E とし,

$$P=\{f(x):\ f(x)\in E,\ f(x)\geqq 0\ (x\geqq 0)\}$$

とおく, P は positive cone である。$f(x)\in P$ が $f(a)=0$, $a\geqq 0$ なる点 a を一点でももてば, $f(x)$ は P の internal point ではない。$f(x)\in P$ が $f(x)>0$ $(x\geqq 0)$ のとき, $g(x)=xf(x)$ として, $\lambda>0$ に対して, $x>\dfrac{1}{\lambda}$ ならば

$$f(x)-\lambda g(x)=(1-\lambda x)f(x)<0$$

だから, $f(x)-\lambda g(x)\bar{\in}P$ である。したがって, f は P の internal point にはなりえず, P には internal point が一点も存在しない。

附記 [1]で筆者はベクトル空間 E の positive cone P に対して,

$$\bar{P}=\{x:\ y-x\in P\Rightarrow y\in P\}$$

なる集合 $\bar{P}$ を定義した。P の internal point の全体を P_0 として, $B=\bar{P}\backslash P_0$ とおくとき, $\bar{P}$ が positive cone になっているとして, $\bar{P}$ が B の有限個の要素の非負なスカラーをもつ一次結合の全体と一致するか否かという問題が未解決である。

文献

[1] K. Isobe and T. Higashiyama: A Certain Expansion of Positive Cone of Partially Ordered Linear Spaces. (1971) unpulished.

[2] J. L. Kelly and I. Namioka: Linear Topological Spaces. van Nostrand (1963).